Übungszettel 5 - Kondensatoren und Spiegelladungen (Abgabetermin: 19.11.2014)

Aufgabe 1 - Zylinderkondensator (20 Punkte)

Betrachte zwei unendlich lang ausgedehnte, koaxiale, hohle Metallkreiszylinder, deren gemeinsame Zylinderachse entlang der z-Achse liegt. Die beiden Zylinder haben den Radius a bzw. b mit $b > a > 0$.

(a) Bestimme die Ladungsdichte, falls der innere Zylinder die Ladung q auf einer Länge von L trägt, während der äußere Zylinder die Ladung $-q$ auf einer Länge von L trägt.

(b) Bestimme das elektrische Feld der Konfiguration aus Teilaufgabe (a) mit Hilfe des Satzes von Gauß.
Hinweis: Es ist günstig, das Gesamtproblem in drei verschiedene Gebiete aufzuteilen.

(c) Bestimme die elektrostatische Feldenergie dieser Anordnung auf einer Länge von L.

(d) Finde die Kapazitätsdichte dieser Anordnung. Warum ist in dieser Aufgabe nur eine Kapazitätsdichte statt einer einfachen Kapazität sinnvoll? Welche Einheit sollte sie haben?
Hinweis: Überprüfe, dass deine Kapazitätsdichte positiv ist.

Aufgabe 2 - Zwei Punktladungen vor Platte (18 Punkte)

Betrachte eine unendlich ausgedehnte, geerdete Platte in der (x, y)-Ebene sowie eine Punktladung mit Ladung q am Ort $(a, 0, a)$ und eine Punktladung mit Ladung $-q$ am Ort $(-a, 0, a)$, wobei $a > 0$.

(a) Fertige eine Skizze für dieses Problem an.

(b) Es sei $(q, \vec{r}_0)$ ein Tupel, welches eine Punktladung durch ihre Ladung q und ihren Ort $\vec{r}_0$ beschreibt. Bestimme die Abbildung $S : (q, \vec{r}_0) \mapsto (q', \vec{r}\,'_0)$, welche dieser Punktladung ihre Spiegelladung mit Ladung q' und Ort $\vec{r}\,'_0$ unter den Randbedingungen dieser Aufgabe zuweist.

(c) Bestimme das elektrostatische Potential für $z > 0$ mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen durch Anwendung der Abbildung S aus Teilaufgabe (b) auf alle "realen" Punktladungen der Konfiguration in dieser Aufgabe. Zeige explizit, dass dein Ergebnis die Randbedingungen der Problemstellung erfüllt.

(d) Bestimme das elektrische Feld für $z > 0$.

(e) Bestimme die induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$. Zeige, dass sie am Ort $(a, 0, 0)$ folgenden Wert annimmt,

$$\sigma(a, 0) = \frac{q}{2\pi a^2} \left(\frac{1}{5\sqrt{5}} - 1 \right).$$

Aufgabe 3 - Eine Punktladung in der Zange (22 Punkte)

Betrachte ein geerdetes Objekt, das durch folgende Punktmenge beschrieben wird,

$$\left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\right\} \cup \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{\sqrt{3}}\right\},$$

wobei $\cup$ die Vereinigung zweier Mengen symbolisiert.

(a) Skizziere dieses geerdete Objekt zusammen mit einer Punktladung am Ort $\left(a, \frac{a}{\sqrt{3}}, 0\right)$.
Hinweis: Es gilt $\tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *sowie* $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

(b) Bestimme die Spiegelabbildungen für dieses Problem, analog zu Aufgabe $(2b)$.
Hinweis: Man erhält hier zwei Spiegelabbildungen. Überlege, wie eine Spiegelung die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes parallel bzw. orthogonal zur Spiegelebene beeinflusst.

(c) Bestimme die Spiegelladungen für diese Konfiguration mit Hilfe deiner Spiegelabbildungen aus Teilaufgabe (b). Prüfe, ob das resultierende Potential aus realen Ladungen und Spiegelladungen die Randbedingungen erfüllt. Falls nicht, versuche einen Grund zu finden, warum deine Herangehensweise nicht funktioniert, und finde die korrekte Spiegelladungskonfiguration. Fertige eine Skizze dieser Konfiguration an.
Hinweis: Um zu zeigen, dass die gefundene Spiegelladungskonfiguration in der Tat die korrekten Randbedingungen wiedergibt, genügt ein Argument mit Hilfe der Skizze. Die Relation

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ist hilfreich, um die Ausdrücke für die Spiegelladungen zu vereinfachen.