Probeklausur zur Elektrodynamik

Diese Probeklausur hat einen Umfang von insgesamt 100 Punkten. Sie liefert Beispiele für verschiedene Aufgabentypen, welche in der Klausur vorkommen können. Auf die Klausur selbst wird es auch insgesamt 100 Punkte geben, ihr Umfang wird vergleichbar zu dieser Probeklausur sein. Die Bearbeitungszeit für die Klausur ist 3 volle Zeitstunden.

Die Probeklausur kann bis **Mittwoch, den 04.02.2015** wie gewohnt zu Beginn der Vorlesung abgegeben werden. **Pro $\frac{3}{5}$ Punkte auf dieser Probeklausur kann man sich 1 Zusatzpunkt zu seinen bisherigen Übungszettelpunkten verdienen - also maximal 60 Zusatzpunkte.**

Aufgabe 1 (32 Punkte)

(a) Skizziere die Feldlinien eines elektrischen Punktdipols.

(b) Wie lautet der Exponent in der Proportionalität $\sim \frac{1}{r^n}$ für das Fernfeld des Potentials eines elektrischen Monopols, Dipols sowie eines elektrischen Quadrupols?

(c) Gib ein physikalisches Beispiel für ein Problem, welches durch eine partielle Differentialgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen beschrieben wird. Erkläre den Unterschied zwischen Dirichlet Randbedingungen und von Neumann Randbedingungen.

(d) Gib das Biot-Savart Gesetz an.

(e) Wie ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes definiert?

(f) Wie lautet die Coulomb-Eichung? Wie kann man ein gegebenes Paar aus elektrostatischem Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ transformieren, sodass sie die Coulomb-Eichung erfüllen, aber die durch diese Potentiale beschriebene Physik unverändert bleibt?

(g) Notiere die Maxwell-Gleichungen in Materie in der quasistationären Näherung.

(h) Notiere die Wellengleichung im Vakuum für den Vektor des elektrischen Feldes sowohl im Orts-Zeit-Raum als auch im Wellenzahl-Kreisfrequenz-Raum.

(i) Notiere das $\vec{E}$-Feld und das $\vec{B}$-Feld einer linear polarisierten elektromagnetischen Welle im Vakuum, wobei $\vec{E}(\vec{r} = \vec{0}, t = 0) = E_0 \hat{e}_x$. Die Welle habe Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω und breite sich in negative y-Richtung aus. Skizziere das elektrische und magnetische Feld in einer sinnvoll gewählten Ebene zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Betrachte folgende Ladungsverteilung im Vakuum ($a > 0$ und $R_2 > R_1 > 0$),

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{a}{r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Skizziere diese Ladungsverteilung in der xy-Ebene.

(b) Berechne die Gesamtladung.

(c) Bestimme das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung.

(d) Berechne die Energiedichte sowie die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes dieser Ladungsverteilung.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Betrachte einen unendlich langen Draht im Vakuum entlang der z-Achse. Er trägt eine konstante Linienladungsdichte λ sowie einen stationären, homogenen Strom I trägt, welcher in positive z-Richtung fließt.

(a) Bestimme das elektrische Feld sowie das Magnetfeld, welches durch diesen Draht hervorgerufen wird.

(b) Berechne das elektrostatische Potential sowie das Vektorpotential des Drahtes.
Hinweis: Für die Rotation in Zylinderkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{e}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{e}_z\,.$$

(c) Wie groß muss die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ladung q sein, sodass es sich in einer geraden Linie im Abstand d parallel zu diesem Draht bewegt?

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Betrachte folgende elektromagnetische Felder im Vakuum $(Q, M > 0)$,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{e}_z, & r \leq R \\ \frac{R^3}{3r^3}\mu_0 M\left[2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right], & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Bestimme die Ladungsverteilung dieser Anordnung.

(b) Zeige, dass sich Strom nur an denjenigen Orten befindet, an denen sich Ladung in Teilaufgabe (a) befand.
Hinweis: Für die Rotation in Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\varphi) - \frac{\partial B_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi)\right]\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi\,.$$

(c) Bestimme die Stromdichte dieser Anordnung.
Hinweis: Befindet sich auf einer Fläche ein Oberflächenstrom $\vec{K}$, so gilt

$$\delta\vec{B}^{\parallel} = \mu_0\left(\vec{K} \times \hat{n}\right),$$

wobei $\delta\vec{B}^{\parallel}$ die Unstetigkeit der zur Fläche parallelen Komponenten des magnetischen Feldes ist (außen minus innen) und $\hat{n}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor der Fläche.

(d) Skizziere die Ladungs- bzw. Stromverteilung.

(e) Bestimme den Gesamtdrehimpuls des elektromagnetischen Feldes in dieser Anordnung.
Hinweis: Es gilt

$$\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = \frac{4}{3}\,.$$