Übungen zur Vorlesung Elektromagnetische Feldtheorie I
(EFT I)
SS 2003

Universität Kassel
Fachbereich Elektrotechnik
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

Übung 4

Aufgabe 14

In ein homogenes elektrostatisches Feld $\underline{\mathbf{E}}^{hom} = E_0 \underline{\mathbf{e}}_z$ wird eine dielektrische Kugel mit der Dielektrizitätszahl ε_{in} und dem Radius R_K gebracht. Die dielektrische Kugel ist von einem homogenen Medium der Dielektrizitätszahl ε_{out} umgeben.
Für das sich einstellende Potential gilt ausserhalb der Kugel:

$$\Phi_{out}(\underline{\mathbf{R}}) = -E_0 R \cos\vartheta \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in} + 2\varepsilon_{out}} \frac{R_K^3}{R^3} \right\} \qquad R > R_K$$

und innerhalb der Kugel:

$$\Phi_{in}(\underline{\mathbf{R}}) = -E_0 \frac{3\varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in} + 2\varepsilon_{out}} R \cos\vartheta \qquad 0 < R \leq R_K$$

a) Berechnen Sie die elektrischen Feldstärken $\underline{\mathbf{E}}_{out}$ und $\underline{\mathbf{E}}_{in}$ ausserhalb und innerhalb der Kugel.

b) Weisen Sie die Divergenzfreiheit von $\underline{\mathbf{E}}_{out}$ und $\underline{\mathbf{E}}_{in}$ nach.

c) Bestimmen Sie das geschlossene Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{K}} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{dS}}$$

wobei $\mathcal{K}$ die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R = \frac{1}{2} R_K$ darstellt.

d) Bestimmen Sie das geschlossene Oberflächenintegral

$$\oiint_{\mathcal{K}} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{dS}}$$

wobei $\mathcal{K}$ die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $R = 2R_K$ darstellt.

Hinweis: Benutzen Sie Kugelkoordinaten und die Substitution:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in} + 2\varepsilon_{out}} R_K^3, \qquad \text{and} \qquad \beta = \frac{3\varepsilon_{out}}{\varepsilon_{in} + 2\varepsilon_{out}}$$

Aufgabe 15

Gegeben ist ein Kreiszylinder Z mit der Höhe $2Z_0$ und dem Radius R_0, wobei die Zylinderachse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe Abbildung). Es gilt dann für den Kreiszylinder:

$$Z = \{r, \varphi, z | 0 \leq r \leq R_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -Z_0 \leq z \leq Z_0\}.$$

Im Kreiszylinder Z befinde sich eine zeitharmonische Stromdichteverteilung von

$$\underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varrho_0 \, \frac{1}{3} \, \frac{r^2}{R_0} \, \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{z}{Z_0}\right) \, \omega \, \cos(\omega t) \, \underline{\mathbf{e}}_r,$$

mit $-Z_0 \leq z \leq Z_0$ und $0 \leq r \leq R_0$.
ϱ_0 ist eine konstante Raumladungsdichte mit der Einheit $[\varrho_{\mathrm{e}0}] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}$.
Für die Anregung gilt die Forderung der Kausalität:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}, t) &= \underline{\mathbf{0}}, \qquad t \leq 0, \\ \varrho_{\mathrm{e}}(\underline{\mathbf{R}}, t) &= 0, \qquad t \leq 0. \end{aligned}$$

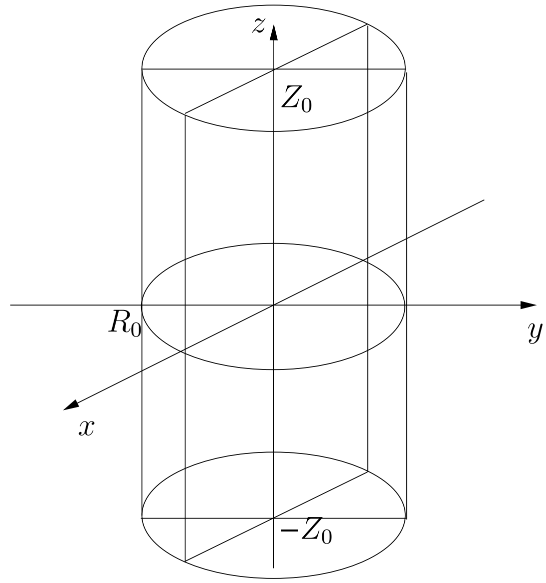

Figure 1: Kreiszylinder mit der Höhe $2Z_0$ und dem Radius R_0.

a) Bestimmen Sie den elektrischen Strom $i_e(t)$ durch die geschlossene Oberfläche des Zylinders Z.

b) Skizzieren Sie die Abhängigkeit des Stromes $i_e(t)$ von der Kreisfrequenz ω, für $\omega \geq 0$ und $t = 1s$.

c) Berechnen Sie die Raumladungsdichteverteilung $\varrho_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$ im Kreiszylinder Z für $t \geq 0$ über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \varrho_e(\underline{\mathbf{R}}, t) = 0.$$

d) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\iiint\limits_Z \frac{\partial}{\partial t} \varrho_e(\underline{\mathbf{R}}, t) dV.$$

explizit über das im Zylinder eingeschlossene Volumen.
Welche physikalische Größe haben Sie soeben bestimmt ?