

**Numerical Methods in
Electromagnetic Field Theory I (NFT I)
Numerische Methoden in der
Elektromagnetischen Feldtheorie I (NFT I) /**

1st Lecture / 1. Vorlesung

Dr.-Ing. René Marklein

marklein@uni-kassel.de

<http://www.tet.e-technik.uni-kassel.de>

<http://www.uni-kassel.de/fb16/tet/marklein/index.html>

**Universität Kassel
Fachbereich Elektrotechnik / Informatik
(FB 16)
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Büro: Raum 2113 / 2115
D-34121 Kassel**

**University of Kassel
Dept. Electrical Engineering / Computer
Science (FB 16)
Electromagnetic Field Theory
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Office: Room 2113 / 2115
D-34121 Kassel**

Contents - Numerical Methods I – Direct Numerical Methods / Inhalt - Numerische Methoden I – Direkte Numerische Methoden

- + Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode**
- + Finite Difference Time Domain (FDTD) Method /
Methode der Finiten Differenzen im Zeitbereich**
- + Finite Element (FE) Method / Finite Elemente (FE) Methode**
- + Finite Volume (FV) Method / Finite Volumen (FV) Methode**
- + Finite Integration Technique (FIT) / Finite Integrationstechnik (FIT)**
- + Method of Moments (MOM) / Momenten-Methode (MOM)**

Contents - Numerical Methods II / Inhalt - Numerische Methoden II

- + Scalar and Electromagnetic Huygens' Principle /
Skalares und elektromagnetisches Huygenssches Prinzip**
- + Scalar Integral Equations of the 1. and 2. Kind /
Skalare Integralgleichungen der 1. und 2. Art**
- + Electromagnetic Integral Equations (EFIE, MFIE, CFIE) /
Elektromagnetische Integralgleichungen (EFIE, MFIE, CFIE)**
- + Method of Moments (MOM) / Momenten-Methode (MOM)**
- + Conjugate Gradient (CG) Method / Konjugierte Gradientenmethode**

Introduction / Einleitung

✚ Why Numerical Methods? / Warum numerische Methoden?

- ✚ “Simple” Canonical Problems /
“Einfache” Kanonische Probleme
 - ✚ “Simple” Materials and Geometries /
“Einfache“ Materialien und Geometrien
- } Analytic Solutions / Analytische Lösung
- ✚ “Complex” Real-Life Problems /
“Komplexe” realitätsnahe Probleme
 - ✚ Complex Materials and Geometries
Komplexe Materialien und Geometrien
- } Numerical Solutions / Numerische Lösung

✚ Applications in Electromagnetics / Anwendungen in der Elektromagnetik

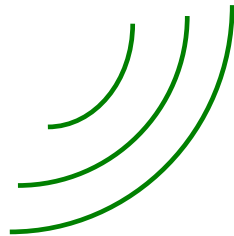
- ✚ Design of Antennas and Circuits / Entwurf von Antennen und Bauteilen
- ✚ Simulation of Electromagnetic Scattering and Diffraction Problems /
Simulation von elektromagnetischen Streu- und Beugungsproblemen
- ✚ Simulation of Biological Effects (SAR: Specific Absorption Rate)
Simulation von biologischen Effekten (SAR: spezifische Absorptionsrate)
- ✚ Physical Understanding and Education / Physikalisches Verständnis und Ausbildung
- ✚ etc.

✚ Computer Implementation / Computer-Implementierung ...

Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall

Antenna / Antenne

Incident wavefield /
Einfallendes Wellenfeld $\underline{\mathbf{E}}^{\text{in}}, \underline{\mathbf{H}}^{\text{in}}$



Total Wavefield /
Gesamtes Wellenfeld $\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}$

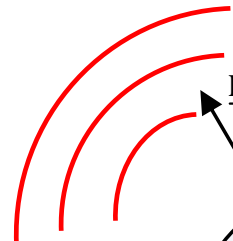
$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}^{\text{in}} + \underline{\mathbf{E}}^{\text{sc}}$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}}^{\text{in}} + \underline{\mathbf{H}}^{\text{sc}}$$

$$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{K}}_e = ?$$

Unknown induced electric surface current density /
Unbekannten induzierten elektrischer Flächenstrom

Scattered wavefield /
Gestreutes Wellenfeld $\underline{\mathbf{E}}^{\text{sc}}, \underline{\mathbf{H}}^{\text{sc}}$

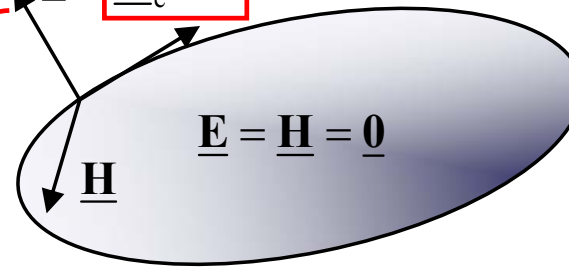


Boundary conditions /
Randbedingungen

$$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{K}}_e$$

$$\underline{\mathbf{K}}_e = ?$$

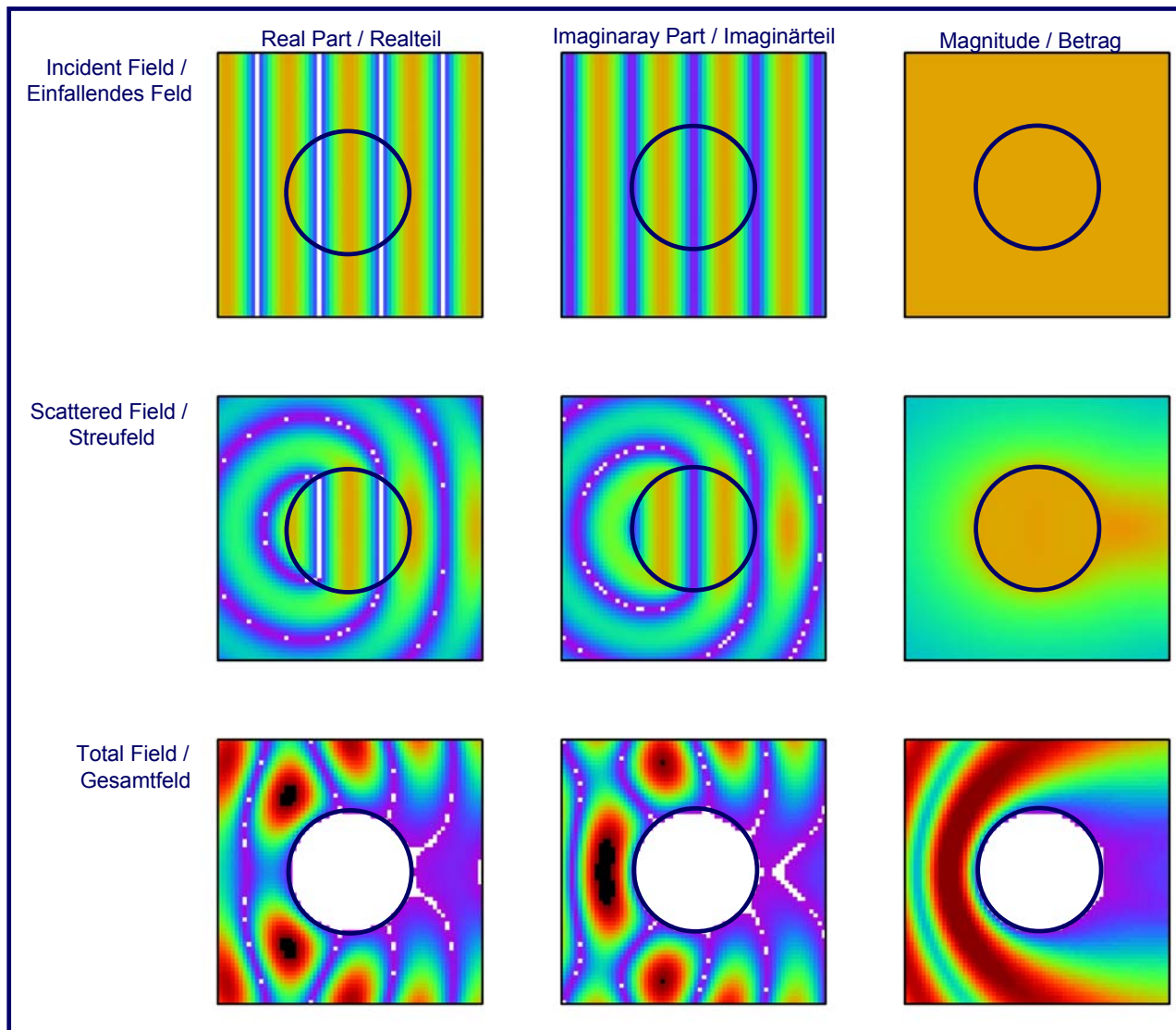


Scatterer / Streuer

$$\sigma_e \rightarrow \infty$$

PEC: perfectly electrically
conducting / IEL:
ideal elektrisch leitend

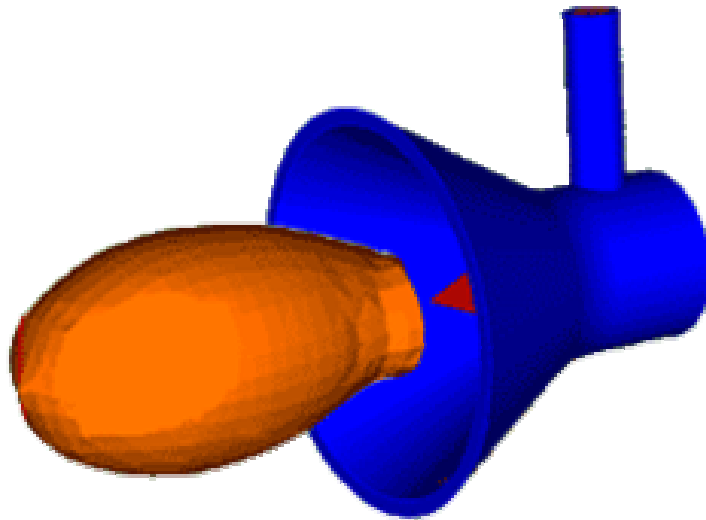
Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall



Numerical Modeling of a Horn Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Hornantenne mit FIT

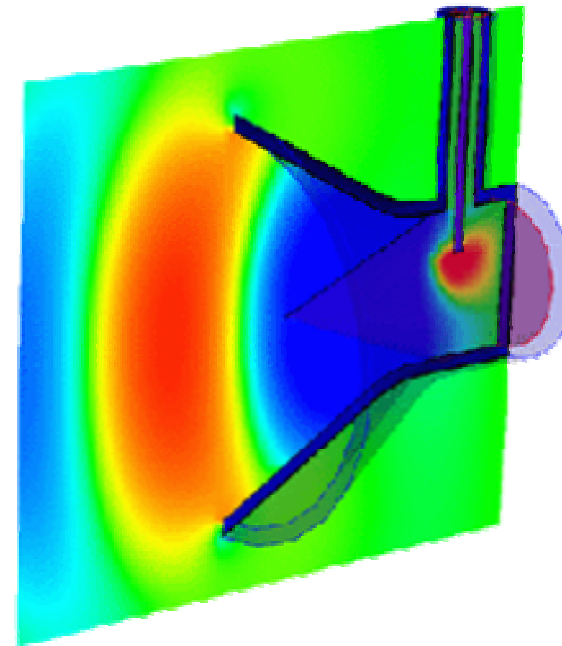
A horn antenna with a dielectric cone, driven by a coaxial cable. Both the far-field pattern and the near-field pattern can be calculated at different frequencies inside the broadband simulation range. /
Eine Hornantenne mit dielektrischem Kegel (Konus), die über ein Koaxialkabel gespeist wird. Beides, die Fernfeld- und Nahfeld-Richtcharakteristik, kann für jede Frequenz des Anregungsspektrums berechnet werden.

3D Structure with Far-Field Pattern /
3D-Struktur mit Fernfeld-Richtcharakteristik



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Contour Plot of Electric Field Strength Vector (E_y Component) /
Konturdarstellung des elektrischen Feldstärkevektors (E_y Component)

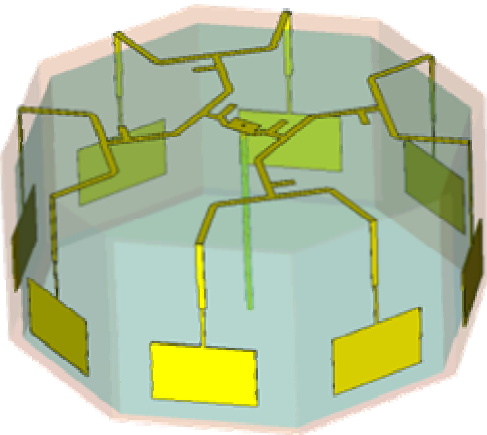


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical Modeling of an Octagon Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Oktagon-Antenne mit FIT

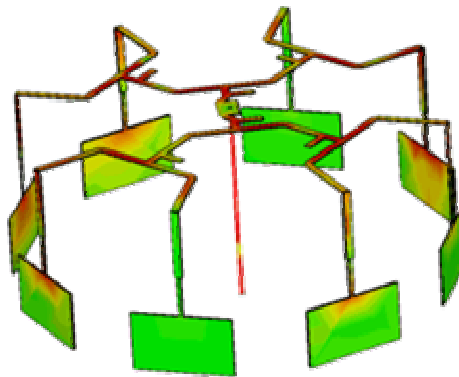
The pictures below show an octagon antenna array consisting of eight patch antennas, which are fed by a microstrip circuit connected to a coaxial line. / Die Bilder zeigen eine Oktagon-Antenne bestehend aus acht Patch-Antennen, die über eine Mikrostreifenschaltung und Koaxialleitung gespeist werden.

Patch Array and Microstrip Circuit are Supported by a Dielectric Substrate with a Permittivity of 3.5. / Patch-Array und Mikrostreifen-Schaltung auf einem dielektrischen Substrat mit einer Permittivität von 3.5.



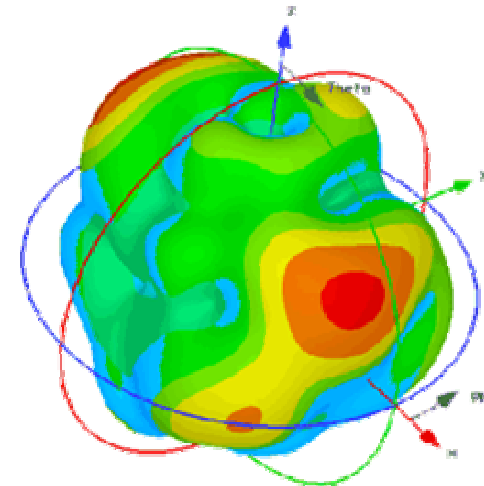
(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Electric Current Distribution at 10.5 GHz / Verteilung der elektrischen Stromdichte bei 10,5 GHz



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Far-Field at 14 GHz / Fernfeld bei 14 GHz

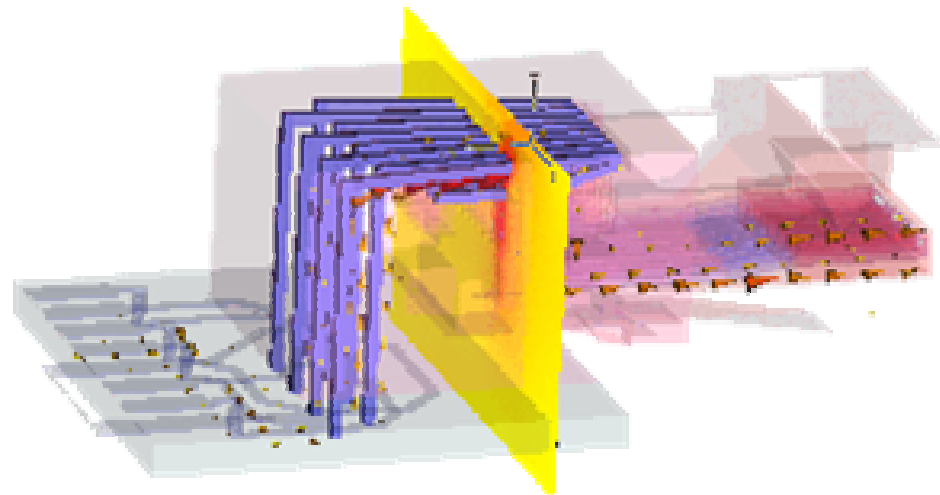


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical Modeling of an RJ45 Connector with FIT / Numerische Modellierung eines RJ45-Steckers mit FIT

Connector designers are facing progressively higher frequency ranges, and so considerations such as cross talk, run time and signal integrity are becoming increasingly relevant. Complicated CAD models are commonly used and customers often require a connector's description by means of a SPICE replacement circuit. / Die Designer von Steckern erreichen immer höhere Frequenzbereiche, damit gewinnen Effekte wie Übersprechen, Laufzeit und Signalerhaltung immer mehr an Bedeutung. Komplizierte CAD-Modelle werden gewöhnlich verwendet und Kunden benötigen oftmals eine Beschreibung in Form einer SPICE-Ersatzschaltung.

RJ45 Connector / RJ45-Stecker

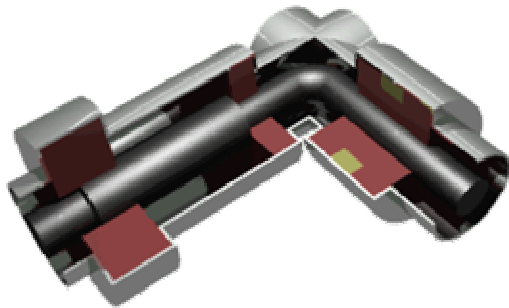


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical Modeling of a Coaxial Connector with FIT / Numerische Modellierung einer Koaxialverbindung mit FIT

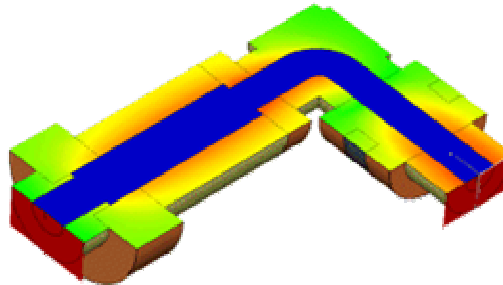
The connector consists of a male and a female end with four different materials: metal, teflon, rubber and air. All geometric dimensions have been parameterized, so that a fully automatic optimization can be done. / Die Verbindung besteht aus einem Stecker und einer Buchse, die aus vier unterschiedlichen Materialien bestehen: Metall, Teflon, Gummi und Luft. Alle geometrischen Dimensionen wurden parametrisiert, sodass eine voll automatische Optimierung durchgeführt werden kann.

Geometry of the Coaxial Connector
/ Geometrie des Koaxialsteckers



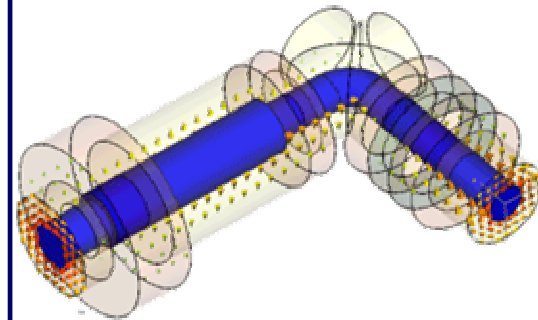
(CST Microwave Studio, www.cst.de)

2-D Contour Plot of one Field
Component / 2D-Konturdarstellung
einer Feldkomponente



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

3-D Field Distribution as a Vector
Plot. Calculation Time: Four
Seconds. / 3D-Feldverteilung als
Vektorgrafik. Berechnungszeit: vier
Sekunden

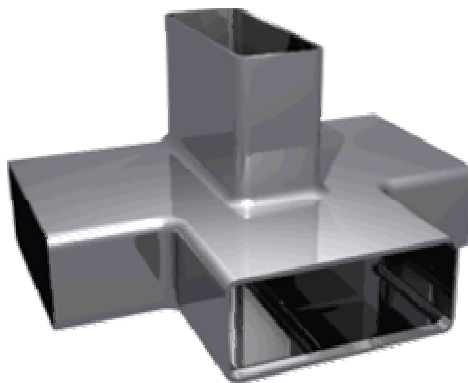


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical FIT Modeling of a Magic-T / Numerische FIT-Modellierung eines „Magischen T“

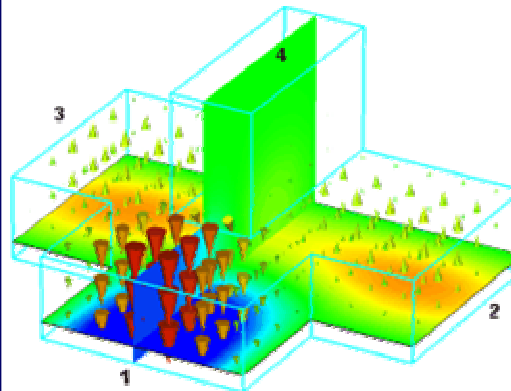
The main idea behind the "magic T" is to combine a TE and a TM waveguide splitter. In this particular case the port 1 and the port 4 are de-coupled, so one can expect S_{14} and S_{41} to have very low values. Viewing the electric fields gives a better understanding how the "magic T" works. / Dieses Beispiel zeigt ein wohlbekanntes und vieleingesetztes Bauteil der Hochfrequenztechnik. Die wesentliche Idee, die hinter dem "Magischen T" steckt, ist die Kombination eines TE- und TM-Wellenteilers. In diesem speziellen Fall ist das Tor 1 und Tor 4 entkoppelt, sodass die S-Parameter S_{14} und S_{41} sehr kleine Werte besitzen dürfen. Die Darstellung des elektrischen Feldes ermöglicht ein besseres Verständnis für die Funktion des "Magischen T".

Geometry of the Magic-T /
Geometrie des „Magischen T“



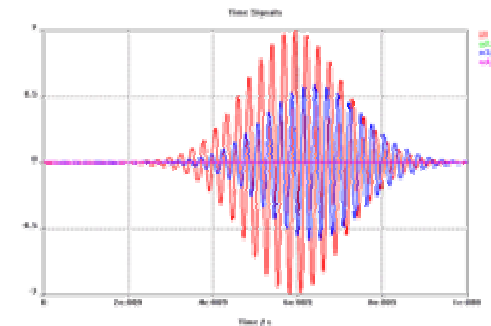
(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Overlay 3-D Vector Plot and 2-D
Contour Plot Representation of the
Electric Field Strength / Überlagerte
3D-Vektor- und 2D-Kontur-
Darstellung der elektrischen
Feldstärke



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Excitation pulse (red) at port 1 and
transmission into port 2 (green,
covered by blue line), port 3 (blue)
and port 4 (purple). The Gaussian
pulse covers the range $f=3.4-4$ GHz.
/ Anregungsimpuls (rot) am Tor 1
und Transmission am Tor 2 (grün,
überdeckt durch die blaue Linie),
Tor 3 (blau) und Tor 4 (lila). Der
Gauß-Impuls besitzt einen
Frequenzbereich von $f=3.4-4$ GHz.

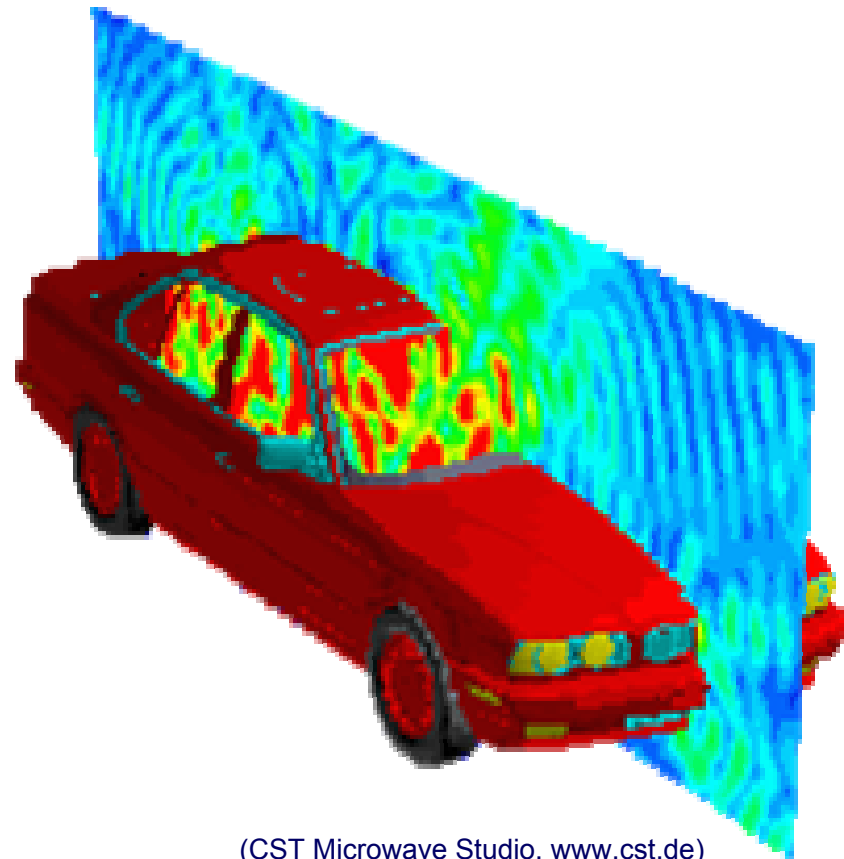


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical FIT Modeling - Electromagnetic Compatibility (EMC) / Numerische FIT-Modellierung – Elektromagnetische Verträglichkeit

Today's design engineer has to not only ensure a device works properly, but also take any possible side effects into consideration and fulfill numerous international norms, e.g. a device allowed electromagnetic radiation. Cross talk effects can disturb the functionality of the system. / Heutzutage müssen Ingenieure nicht nur die Funktionalität eines Gerätes gewährleisten, sondern Sie müssen auch alle möglichen Nebeneffekte beachten und unzählige internationale Normen erfüllen, wie z. B. die Grenzwerte für die elektromagnetische Abstrahlung eines Gerätes. Weiterhin kann das Überschreiten die Funktionalität eines Gerätes stören.

Near-Field Plot of the Electric Field Strength Radiated by
a Mobile Phone Inside a Car /
Nahfeld-Darstellung der elektrischen Feldstärke
abgestrahlt von einem Mobiltelefon in einem Auto

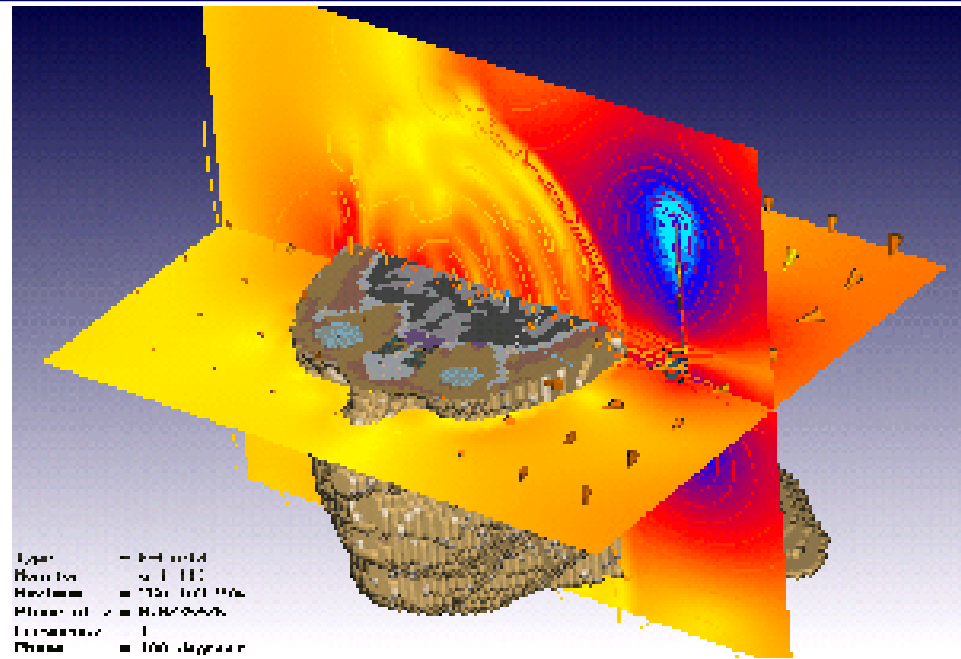


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical FIT Modeling - Mobile Communications / Numerische FIT-Modellierung – Mobilkommunikation

The dramatically fast developing field of mobile communication cannot be driven without powerful simulation tools, which are able to calculate the core quantity of wireless transmission: the electromagnetic fields. The SAR (SAR: specific absorption rate [W/kg]) calculation in a human head or the near-field and the far-field of an antenna in a car are large and demanding problems, which leave almost no alternative to use a powerful time domain solver. / Die dramatisch schnelle Entwicklung der Mobilkommunikation ist ohne leistungsfähige Simulationswerkzeuge nicht denkbar, die die Berechnung des Kerns der drahtlosen Übertragung ermöglichen: die elektromagnetischen Felder. Die Berechnung der spezifischen Absorptionsrate (SAR: spezifische Absorptionsrate [W/kg], www.elektrosmoginfo.de) in einem menschlichen Kopf oder des Nah- und Fernfeldes einer Antenne in einem Auto sind komplexe und anspruchsvolle Probleme, die keine Alternative zu leistungsfähigen Zeitbereichslösern Spielraum überlassen.

Human head model irradiated by the electromagnetic field of a mobile phone /
Menschliches Kopfmodell bei
Bestrahlung durch das
elektromagnetische Feld eines
Mobiltelefon



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical Modeling of a Horn Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Hornantenne mit FIT

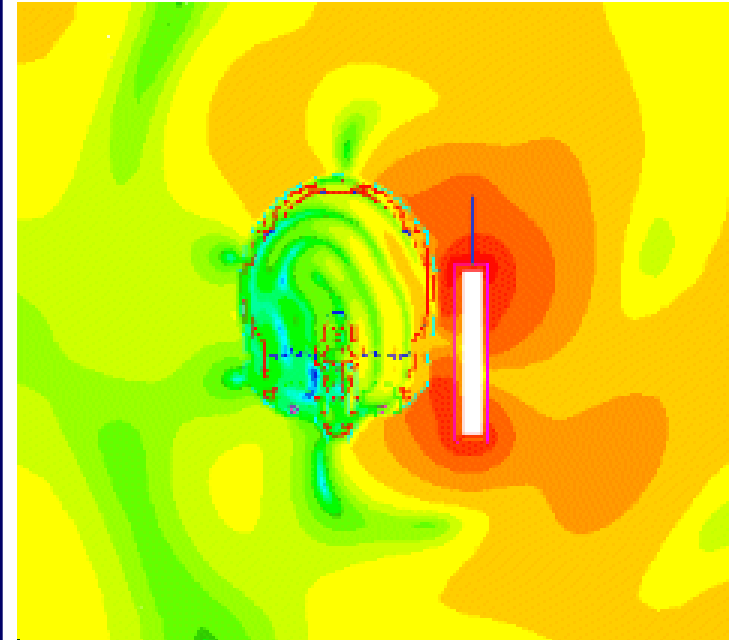
The left picture at the bottom shows a detailed model of the human head: brain tissue, bone, and skin. On the right, the density of the heat sources when using a mobile telephone is displayed in a vertical slice near the ear. / Das linke Bild unten zeigt ein detailliertes Modell eines menschlichen Kopfes: Hirngewebe, Knochen und Haut. Auf der rechten Seite ist die Dichte der Wärmequellen in einem vertikalen Schnitt gezeigt, die entstehen, wenn man ein Mobiltelefon nah am Ohr verwendet.

Human 3-D Head Model /
Menschliches 3D Kopfmodell



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Contour Plot of the Electromagnetic Field /
Konturdarstellung des elektromagnetischen Feldes



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Numerical FIT Modeling – Car Model / Numerische FIT-Modellierung – Automodell

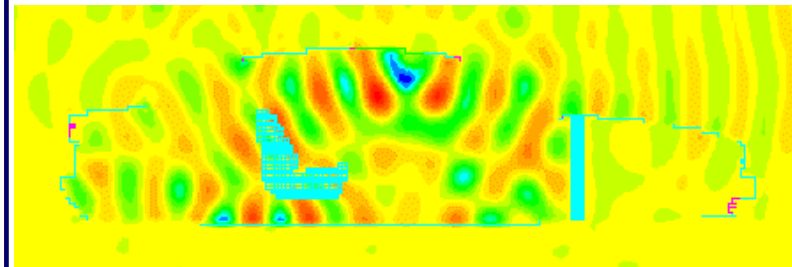
The geometrical data of the vehicle is imported directly from a CAD file. Other objects, such as the driver and the mobile phone, are included in the model by a preprocessor before the simulation. / Das geometrische Modell eines Automodells wird direkt von einer CAD-Datei importiert. Andere Objekte, wie der Fahrer und das Mobiltelefon, werden mit Hilfe eines Eingabemoduls vor der Simulation hinzugefügt.

3-D Geometrical Data of a Car Model /
3D geometrische Daten eines Automodells



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Contour Plot of the Electric Field Strength in a Cross
Section of the Car Model / Konturdarstellung der
elektrischen Feldstärke in einem Querschnitt durch
das Automodell



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Introduction / Einleitung (3)

- ✚ **Computer Implementation / Computer-Implementierung**
 - ✚ **Programming Languages / Programmiersprachen**
 - ✚ C, C++
 - ✚ Fortran 90, HPF (High Performance Fortran)
 - ✚ etc.
 - ✚ **Libraries / Bibliotheken**
 - ✚ MPI (Message Passing Interface)
 - ✚ PVM (Parallel Virtual Machine)
 - ✚ etc.
 - ✚ **Computer Architectures / Computer-Architekturen**
 - ✚ Laptop and Desktop Computer
 - ✚ Vector Computer / Vektorrechner
 - ✚ Parallel Computer / Parallelrechner
 - ✚ Shared Memory
 - ✚ Distributed Memory Architecture (Beowulf Cluster)
 - ✚ Virtual Memory
- **Simulation Software / Simulationsprogramme ...**

Introduction / Einleitung (4)

+ Simulation Software / Simulationsprogramme

- + CST Microwave Studio, CST Design Studio, MAFIA 4, CST Inc. (www.cst.de)
- + HFSS, FE-Method, ANSOFT (www.ansoft.com)
- + XFDTD, FDTD Method, REMCOM Inc. (www.remcom.com)
- + etc.

+ Other Tools / Andere Werkzeuge

- + Matlab (www.mathworks.com, www.mathworks.de)
- + Mathematica (www.wolfram.com)
- + Mathcad (www.maplesoft.com)
- + etc.

Partial Differential Equation (PDE) / Partielle Differentialgleichung (PDG)

Two-dimensional second-order partial differential equation (PDE) / Zweidimensionale Partielle Differentialgleichung (PDG) zweiter Ordnung

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) + B \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + E \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) + F \Phi(x, t) + G = 0$$

- ✚ $B^2 - 4AC < 0$ **Elliptic / Elliptisch**
- ✚ $B^2 - 4AC = 0$ **Parabolic / Parabolisch**
- ✚ $B^2 - 4AC > 0$ **Hyperbolic / Hyperbolisch**

Partial Differential Equation (PDE) - Examples / Partielle Differentialgleichung (PDG) - Beispiele

Partial Differential Equation (PDE) / Partielle Differentialgleichung (PDG)

✚ Elliptic / Elliptisch

- Poisson Equation / Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = -s(x)$$

✚ Parabolic / Parabolisch

- Diffusion Equation / Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,t) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,t) = -s(x,t)$$

✚ Hyperbolic / Hyperbolisch

- Wave equation / Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x,t) = -s(x,t)$$

Operators / Operatoren

- ✚ 1. Derivative spatial and/or temporal /
1. Ableitung räumlich und/oder zeitlich

$$\frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}$$

- ✚ 2. Derivative spatial and/or temporal /
2. Ableitung räumlich und/oder zeitlich

$$\frac{d^2}{dx^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{d^2}{dt^2}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform

Maxwell's Equations are: /
Die ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \rho_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \rho_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Continuity equations /
Kontinuitätsgleichungen

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Constitutive equations for vacuum /
Konstituierende Gleichungen (Materialgleichungen) für
Vakuum

$$\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform (2)

Transition conditions for a source-free interface /
Übergangsbedingungen für eine quellenfreie Trennfläche

$$\underline{\mathbf{n}} \times [\underline{\mathbf{E}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{E}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t)] = \underline{\mathbf{0}}$$

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot [\underline{\mathbf{B}}^{(2)}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{B}}^{(1)}(\underline{\mathbf{R}}, t)] = 0$$

Boundary conditions /
Randbedingungen

PEC material /
IEL-Material

$$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \underline{\mathbf{0}} \rightarrow E_{\text{tan}} = 0$$

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = 0 \rightarrow B_n = 0$$

Propagation of the energy flux density (Poynting Vector) /
Ausbreitung der Energiefussdichte (Poynting-Vektor)

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{em}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform (3)

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\underbrace{\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t)} + \underbrace{\underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)}$$

Spatial derivative of
first order /
Räumliche Ableitungen
erster Ordnung

Temporal derivative of
first order /
Zeitliche Ableitungen
erster Ordnung

Source terms /
Quellterme

One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

The first two Maxwell's equations are: /
Die ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen lauten:

Constitutive equations for vacuum /
Konstituierende Gleichungen
(Materialgleichungen) für Vakuum

$$\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

We assume that / Wir nehmen an

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = E_x(z, t) \underline{\mathbf{e}}_x$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = H_y(z, t) \underline{\mathbf{e}}_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 H_y(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t) - J_{my}(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 E_x(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - J_{ex}(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t) - \frac{1}{\mu_0} J_{my}(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_{ex}(z, t)$$

One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t) - \frac{1}{\mu_0} J_{my}(z, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_{ex}(z, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ of (1) / von (1)} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z, t) \quad (3)$$

Insert the right-hand side of (2)
in (4) / Setze die rechte Seite
von (2) in (4) ein

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_{ex}(z, t) \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z, t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} J_{ex}(z, t) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z, t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z, t) - \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{=1/c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} J_{ex}(z, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z, t) \quad (6)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (7)$$

Propagation velocity of an electromagnetic wave (light) in Vacuum /
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle (Licht) in Vakuum

One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{ex}}(z,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{my}}(z,t)$$

**Inhomogeneity /
Inhomogenität**

**(Inhomogeneous) 1-D wave equation for $H_y(z,t)$ /
Inhomogene 1-D Wellengleichung für $H_y(z,t)$**

**Inhomogeneous and homogeneous 1-D wave equation for $H_y(z,t)$ and $E_x(z,t)$ /
Inhomogene und homogene 1-D Wellengleichung für $H_y(z,t)$ und $E_x(z,t)$**

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{ex}}(z,t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{my}}(z,t) & \text{Inhomogeneous 1-D Wave Equation /} \\ & \text{Inhomogene 1-D Wellengleichung} \\ 0 & \text{Homogeneous 1-D Wave Equation /} \\ & \text{Homogene 1-D Wellengleichung} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{my}}(z,t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{ex}}(z,t) & \text{Inhomogeneous 1-D Wave Equation /} \\ & \text{Inhomogene 1-D Wellengleichung} \\ 0 & \text{Homogeneous 1-D Wave Equation /} \\ & \text{Homogene 1-D Wellengleichung} \end{cases}$$

One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

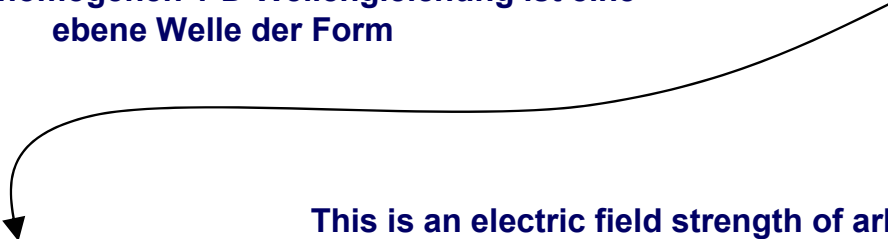
**(Homogeneous) 1-D Wave Equation for $E_x(z,t)$ /
Homogene 1-D Wellengleichung für $E_x(z,t)$**

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = 0$$

The 1-D Wave Equation is a Partial Differential Equation of Second Order /
Die 1-D Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

**Solution of the homogeneous 1-D wave equation is a
plane wave of the form /
Lösung der homogenen 1-D Wellengleichung ist eine
ebene Welle der Form**

$$E_x(z,t) = E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right)$$


$$E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right)$$

**This is an electric field strength of arbitrary
time dependence, which is time retarded by the
factor $\pm z/c_0$. /
Dies ist eine elektrische Feldstärke beliebiger
Zeitabhängigkeit, die um den Faktor $\pm z/c_0$ zeitverzögert
wird.**

One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

(Homogeneous) 1-D wave equation for $E_x(z,t)$ /
Homogene 1-D Wellengleichung für $E_x(z,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = 0$$

Solution /
Lösung

$$E_x(z,t) = E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right)$$

Proof / Beweis

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{c_0} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) \right] = \frac{1}{c_0^2} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) \right] = E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \frac{1}{c_0^2} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) - \frac{1}{c_0^2} E_0 \left(t \mp \frac{z}{c_0} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode 1-D FD Operators / 1D-FD-Operatoren

Common definitions of the first-order derivative of a 1-D function $f(x)$ with respect to x /
Gebräuchliche Definitionen der ersten Ableitung von einer 1D Funktion $f(x)$ nach x

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - dx)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x - dx)}{2dx}$$

**These are all Correct Definitions in the Limit $dx \rightarrow 0$ /
Diese sind alle korrekte Definitionen im Grenzübergang $dx \rightarrow 0$**

**But we want dx to remain FINITE: $dx \rightarrow \Delta x$ /
Aber wir wollen, dass dx ENDLICH bleibt: $dx \rightarrow \Delta x$**

Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode

1-D FD Operators / 1D-FD-Operatoren

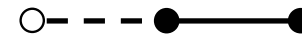
**Backward FD Operator /
Rückwärts-FD-Operator**

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$



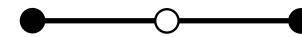
**Forward FD Operator /
Vorwärts-FD-Operator**

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

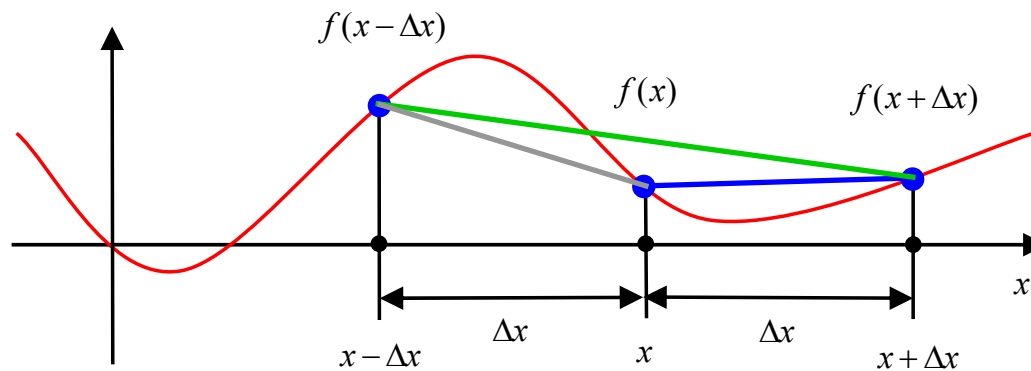


**Central FD Operator /
Zentraler FD-Operator**

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$



**Computational Molecule /
Berechnungsmolekül**



Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode 1-D FD Operators of Higher Order / 1D-FD-Operatoren höherer Ordnung

Backward FD operator /
Rückwärts-FD-Operator

$$\frac{d}{dx} f^-(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Forward FD operator /
Vorwärts-FD-Operator

$$\frac{d}{dx} f^+(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Using (1) and (2) it follows for the
derivative of second order /
Mit (1) und (2) folgt für die
Ableitung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(x) &\approx \frac{\frac{d}{dx} f^+(x) - \frac{d}{dx} f^-(x)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

The big question is now: how good are the FD approximations? /
Die große Frage ist nun: Wie gut sind die FD-Approximationen?

$$\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode 1-D FD Operators – Taylor Series / 1D-FD-Operatoren – Taylor-Reihe

Taylor series are expansions of a function $f(x)$ in a finite distance Δx : $f(x+\Delta x)$ /
Taylor-Reihen sind Entwicklungen einer Funktion $f(x)$ in einer endlichen Distanz Δx : $f(x+\Delta x)$

$$f(x \pm \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\pm \Delta x)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

**HOT: higher order terms /
Terme höherer Ordnung**

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + HOT$$

$$= f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + O[(\Delta x)^5]$$

**Landau symbol "O", big "oh" /
Landau-Symbol „O“, großes „oh“**

**What results, if we use the Taylor series
expansion for the following term /
Was resultiert, wenn wir die Taylor-Reihenentwicklung
auf den folgenden Term anwenden**

$$f(x + \Delta x)$$

The Taylor series expansion reads / Die Taylor-Reihenentwicklung lautet

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + O[(\Delta x)^5]$$

Landau Symbols “Big oh” and “Small oh” / Landau-Symbole „großes oh“ und „kleines oh“

“Big oh” / „großes oh“	“Small oh” / „kleines oh“
$F(\alpha) = O[G(\alpha)]$ as/als $\alpha \rightarrow 0$	$F(\alpha) = o[G(\alpha)]$ as/als $\alpha \rightarrow 0$
$\left \frac{F(\alpha)}{G(\alpha)} \right \leq C$ C : constant and sufficiently small konstant und α ausreichend klein	$\left \frac{F(\alpha)}{G(\alpha)} \right \rightarrow 0$ für / for $\alpha \rightarrow 0$
$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \pm \underbrace{\frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{d^5 f(x)}{dx^5}}_{=O[(\Delta x)^5]} + \frac{(\Delta x)^6}{6!} \frac{d^6 f(x)}{dx^6}$ $\underbrace{\frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{d^5 f(x)}{dx^5}}_{=F(\Delta x)} = O[\underbrace{(\Delta x)^5}_{=G(\Delta x)}]$ $F(\Delta x) = \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{d^5 f(x)}{dx^5}$ $G(\Delta x) = (\Delta x)^5$ $\left \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)} \right = \left \frac{\frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{d^5 f(x)}{dx^5}}{(\Delta x)^5} \right = \left \frac{1}{5!} \frac{d^5 f(x)}{dx^5} \right \leq C$	

Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode 1-D FD Operators – Taylor Series / 1D-FD-Operatoren – Taylor-Reihe

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + O[(\Delta x)^5] \quad (1)$$

$$f(x) = f(x) \quad (2)$$

**Compute (1) minus (2) and subsequently divide by Δx /
Berechne (1) minus (2) und dividiere nachfolgend durch Δx**

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4}}_{=O(\Delta x)} + O[(\Delta x)^4]$$

$$O(\Delta x) = - \frac{\Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4}}_{=O[(\Delta x)^2]} + O[(\Delta x)^4]$$

$$= - \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

**Approximation error /
Approximationsfehler**

**Landau symbol "O", big "oh" /
Landau-Symbol „O“, großes „oh“**

Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode 1-D FD Operators / 1D-FD-Operatoren

**Backward FD Operator /
Rückwärts-FD-Operator**

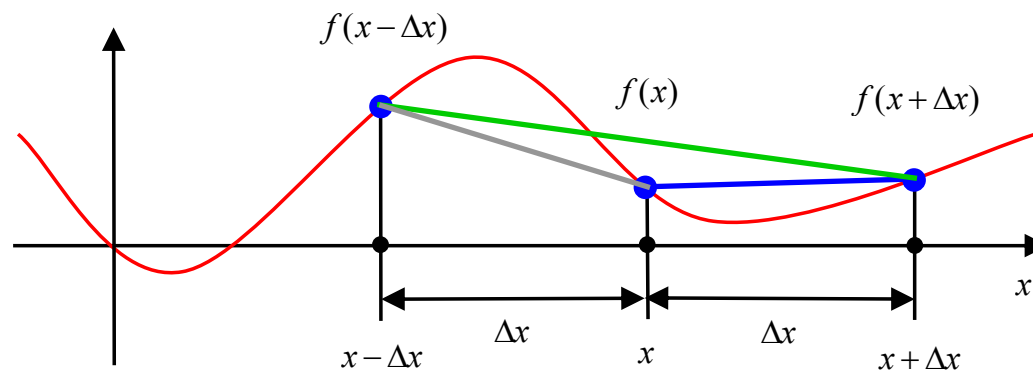
$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

**Forward FD Operator /
Vorwärts-FD-Operator**

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Central FD Operator /
Zentraler FD-Operator**

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$



FD Method - 1-D FD Operator of Second Order / FD-Methode - 1D-FD-Operator zweiter Ordnung

**Derivative of the second order /
Ableitung der zweiten Ordnung** $\frac{d^2}{dx^2} f(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$ (1)

Taylor series expansions / Taylor-Reihenentwicklungen

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5] \quad (2)$$

$$f(x) = f(x) \quad (3)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5] \quad (4)$$

**Multiply (2) with α , (3) with β , and (4) with γ /
Multipliziere (2) mit α , (3) mit β und (4) mit γ**

$$\alpha f(x + \Delta x) = \alpha f(x) + \alpha \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \alpha \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \alpha \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \alpha \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5] \quad (5)$$

$$\beta f(x) = \beta f(x) \quad (6)$$

$$\gamma f(x - \Delta x) = \gamma f(x) - \gamma \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \gamma \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \gamma \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \gamma \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5] \quad (7)$$

FD Method - 1-D FD Operator of Second Order / FD-Methode - 1D-FD-Operator zweiter Ordnung

$$\alpha f(x + \Delta x) + \beta f(x) + \gamma f(x - \Delta x)$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)f(x) + (\alpha - \gamma)\Delta x \frac{df(x)}{dx} + (\alpha + \gamma) \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ + (\alpha - \gamma) \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + (\alpha + \gamma) \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5]$$

$$\alpha - \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \beta = -2\alpha$$

**With the parameters /
Mit den Parametern**

$$\alpha = \gamma = 1$$

$$\beta = -2$$

$$f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) = 2 \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2 \frac{(\Delta x)^4}{\underbrace{4!}_{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24}} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^5]$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{d^4 f(x)}{dx^4}}_{\mathcal{O}[(\Delta x)^2]} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3]$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2]$$

FD Method - 1-D FD Operators of Second Order / FD-Methode - 1D-FD-Operatoren zweiter Ordnung

**Function of one variable /
Funktion einer Variablen**

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2]$$

**Function of two variables /
Funktion von zwei Variablen**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2]$$

FD Method – 1-D Wave Equation / FD-Methode – 1D Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} J_{my}(z,t)}_{=0} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{ex}(z,t) \\ &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{ex}(z,t) \end{aligned}$$

**Central FD Operators /
Zentrale FD-Operatoren**

**Backward FD Operator /
Rückwärts-FD-Operator**

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) = \frac{E_x(z + \Delta z, t) - 2E_x(z, t) + E_x(z - \Delta z, t)}{(\Delta z)^2} + \mathcal{O}[(\Delta z)^2] \quad \frac{\partial}{\partial t} J_{ex}(z,t) = \frac{J_{ex}(z,t) - J_{ex}(z, t - \Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \frac{E_x(z, t + \Delta t) - 2E_x(z, t) + E_x(z, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]$$

$$\begin{aligned} \frac{E_x(z + \Delta z, t) - 2E_x(z, t) + E_x(z - \Delta z, t)}{(\Delta z)^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{E_x(z, t + \Delta t) - 2E_x(z, t) + E_x(z, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} &= \mu_0 \frac{J_{ex}(z,t) - J_{ex}(z, t - \Delta t)}{\Delta t} \\ &+ \mathcal{O}[(\Delta z)^2] + \mathcal{O}[(\Delta t)^2] \end{aligned}$$

FD Method – 1D Wave Equation / FD-Methode – 1D Wellengleichung

**Explicit FD algorithm in the time domain of 2nd order in space and time /
Expliziter FD-Algorithmus im Zeitbereich 2ter Ordnung in Raum und Zeit**

$$E_x(z, t + \Delta t) = 2E_x(z, t) - E_x(z, t - \Delta t) + c_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} [E_x(z + \Delta z, t) - 2E_x(z, t) + E_x(z - \Delta z, t)] \\ + c_0^2 \mu_0 \Delta t [J_{\text{ex}}(z, t) - J_{\text{ex}}(z, t - \Delta t)] + \mathcal{O}[(\Delta z)^2] + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]$$

**Marching-on-in-time algorithm /
„Fortschreiten-in-der-Zeit“-Algorithmus**

$$z \rightarrow n_z \Delta z, \quad n_z = 1, \dots, N_z$$

$$t \rightarrow n_t \Delta t, \quad n_t = 1, \dots, N_t$$

$$E_x(z, t) \rightarrow E_x^{(n_z, n_t)}$$

$$J_{\text{ex}}(z, t) \rightarrow J_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)}$$

$$E_x^{(n_z, n_t+1)} = 2E_x^{(n_z, n_t)} - E_x^{(n_z, n_t-1)} + c_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} [E_x^{(n_z+1, n_t)} - 2E_x^{(n_z, n_t)} + E_x^{(n_z-1, n_t)}] + c_0^2 \mu_0 \Delta t [J_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} - J_{\text{ex}}^{(n_z, n_t-1)}]$$

$$\Delta z = ?$$

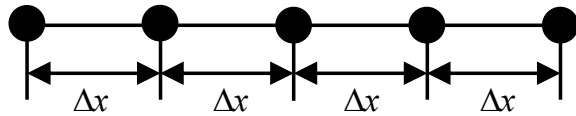
$$\Delta t = ?$$

FD Method – Properties / FD-Methode - Eigenschaften

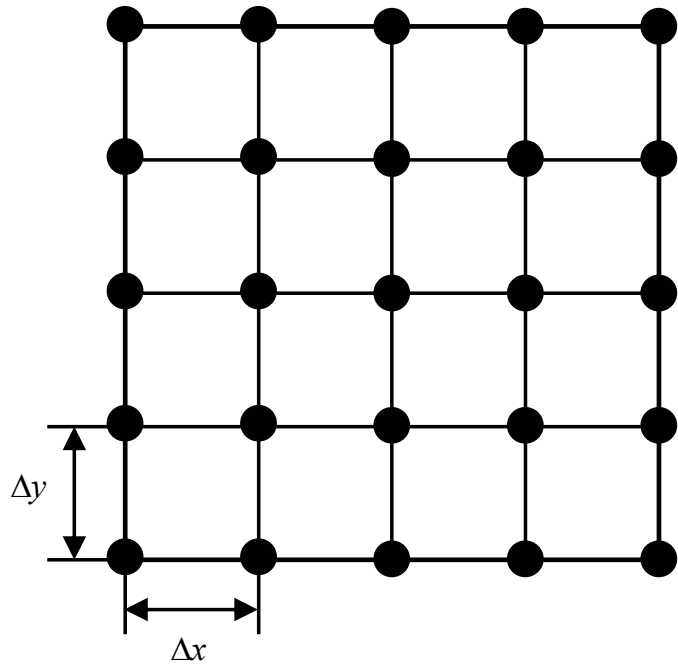
- ✚ **Spatial and Temporal Discretization /
Räumliche und zeitliche Diskretisierung** $\Delta z = ?$
 $\Delta t = ?$
- ✚ **Consistency /
Konsistenz**
- ✚ **Dissipation /
Dissipation**
- ✚ **Stability Condition /
Stabilitätsbedingung** $\Delta t = f(\Delta z)$
- ✚ **Convergence /
Konvergenz**

FD Method – 1-D, 2-D, 3-D Grid System / FD-Methode – 1D-, 2D- und 3D-Gittersystem

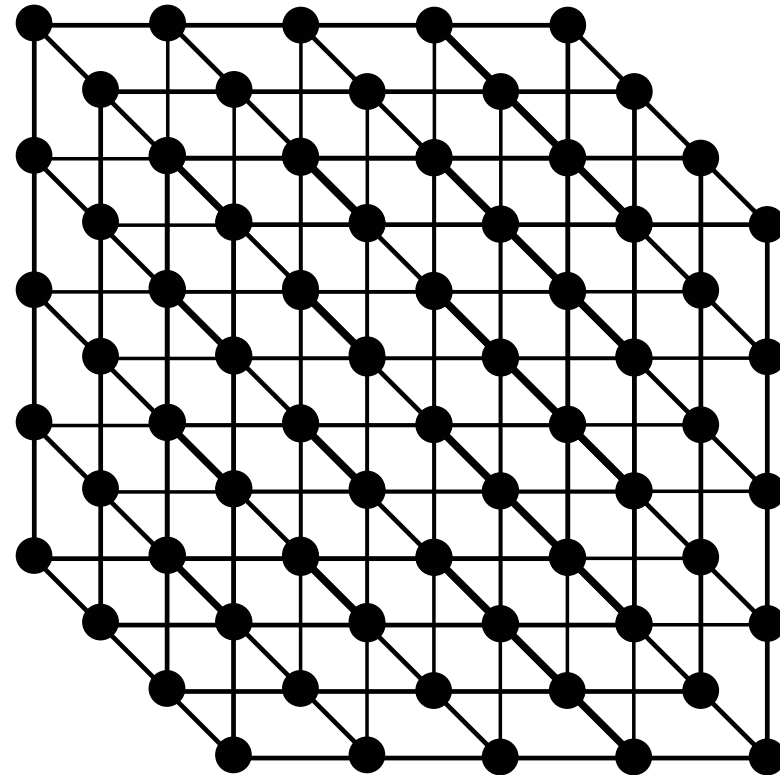
**1-D Node-Based Grid /
1D knotenbasiertes Gitter**



**2-D Node-Based Grid /
2D knotenbasiertes Gitter**



**3-D Node-Based Grid /
3D knotenbasiertes Gitter**



● **Nodes with Assigned Field Quantities /
Knoten mit zugeordneten Feldgrößen:**

Φ [V], \underline{E} [V/m], \underline{H} [A/m], \underline{A} [Vs/m]

FD Method – Grid Size / FD-Methode - Gittergröße

Sampling Theorem in Space / Abtastkriterium im Raum

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{\min}}{2}$$

Δx : **Spatial grid size /
Räumliche Gittergröße**

λ_{\min} : **Minimal wavelength /
Minimale Wellenlänge**

$$\lambda_{\min} = \frac{c_{\min}}{f_{\max}}$$

c_{\min} : **Minimal phase velocity /
Minimale Phasengeschwindigkeit**

f_{\max} : **Maximal frequency /
Maximale Frequenz**

**Sampling Resolution /
Abtastauflösung**

$$G = \frac{\lambda_{\min}}{\Delta x} \quad G = 10, \dots, 30$$

**Rule of thumb /
Daumenregel**

$$\Delta x = \frac{\lambda_{\min}}{G} = \frac{\lambda_{\min}}{10}, \dots, \frac{\lambda_{\min}}{30}$$

FD Method – Stability Condition / FD-Methode - Stabilitätsbedingung

Stability Condition for an FD algorithm of 2nd order in space and time– CFL-Condition /
 Stabilitätsbedingung für einen FD-Algorithmus zweiter Ordnung in Raum und Zeit– CFL-Bedingung

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\Delta x}{c}$$

$D = 1, 2, 3$: Spatial dimension of the problem /

Räumliche Dimension des Problems

c : Maximal Energy Propagation Velocity /

Maximale Energieausbreitungsgeschwindigkeit

CFL: Courant, Friedrichs, Lewy / CFL: Courant, Friedrichs, Lewy /

Courant, R., K. Friedrichs und H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, Vol. 100, S. 32-74, 1928.

Translation / Übersetzung:

Courant, R., K. Friedrichs, and H. Lewy: On the partial differential equations of mathematical physics. *IBM Journal*, pp. 215-324, March 1967.

1-D / 1D:	$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{\Delta x}{c}$	$\hat{\Delta t} \leq 1$
2-D / 2D:	$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{c}$	$\hat{\Delta t} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$
3-D / 3D:	$\Delta t \leq \Delta t_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{c}$	$\hat{\Delta t} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$

$$\hat{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{ref}}} \quad : \quad \begin{array}{l} \text{Courant number /} \\ \text{Courant - Zahl} \end{array}$$

$$\Delta t_{\text{ref}} = \frac{\Delta x}{c}$$

FD Method – Normalization / FD-Methode – Normierung

Δx_{ref} = Reference cell width in m / Referenz-Zellenweite in m

c_{ref} = Reference propagation velocity in m/s / Referenz-Ausbreitungsgeschwindigkeit in m/s

ϵ_{ref} = Reference permittivity in As/Vm / Referenz-Permittivität in As/Vm

E_{ref} = Reference electric field strength in V/m / Elektrische Referenz-Feldstärke in V/m

$$\Delta t = \Delta t_{\text{ref}} \hat{\Delta t} \quad \Delta t_{\text{ref}} = \frac{\Delta x_{\text{ref}}}{c_{\text{ref}}}$$

$$\Delta z = \Delta x_{\text{ref}} \hat{\Delta z}$$

$$c = c_{\text{ref}} \hat{c}$$

$$\epsilon = \epsilon_{\text{ref}} \hat{\epsilon}$$

$$\mu = \mu_{\text{ref}} \hat{\mu}$$

$$\mu_{\text{ref}} = c_{\text{ref}}^2 \epsilon_{\text{ref}}$$

$$E_x = E_{\text{ref}} \hat{E}_x$$

$$J_{\text{ex}} = J_{\text{e ref}} \hat{J}_{\text{ex}} \quad J_{\text{e ref}} = \frac{\epsilon_{\text{ref}}}{\Delta t_{\text{ref}}} E_{\text{ref}}$$

FD Method – Normalization / FD-Methode – Normierung

$$E_x^{(n_z, n_t+1)} = 2E_x^{(n_z, n_t)} - E_x^{(n_z, n_t-1)} + c_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} \left[E_x^{(n_z+1, n_t)} - 2E_x^{(n_z, n_t)} + E_x^{(n_z-1, n_t)} \right] + c_0^2 \mu_0 \Delta t J_{e \text{ ref}} \left[\hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} - \hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t-1)} \right]$$

With / Mit

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta x_{\text{ref}} \\ c_{\text{ref}} &= c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \\ \epsilon_{\text{ref}} &= \epsilon_0 \\ E_{\text{ref}} &= 1 \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta z)^2} &= c_{\text{ref}}^2 \frac{(\Delta t)^2 (\Delta t_{\text{ref}})^2}{(\Delta x_{\text{ref}})^2} \\ &= c_{\text{ref}}^2 \frac{(\hat{\Delta t})^2 \left(\frac{\Delta x_{\text{ref}}}{c_{\text{ref}}} \right)^2}{(\Delta x_{\text{ref}})^2} \\ &= (\hat{\Delta t})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0^2 \mu_0 \Delta t J_{e \text{ ref}} &= c_{\text{ref}}^2 \mu_{\text{ref}} \hat{\Delta t} \Delta t_{\text{ref}} \frac{\epsilon_{\text{ref}}}{\Delta t_{\text{ref}}} E_{\text{ref}} \\ &= \hat{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\hat{E}_x^{(n_z, n_t+1)} = 2\hat{E}_x^{(n_z, n_t)} - \hat{E}_x^{(n_z, n_t-1)} + (\hat{\Delta t})^2 \left[\hat{E}_x^{(n_z+1, n_t)} - 2\hat{E}_x^{(n_z, n_t)} + \hat{E}_x^{(n_z-1, n_t)} \right] + \hat{\Delta t} \left[\hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} - \hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t-1)} \right]$$

FD Solution of the 1-D Wave Equation / FD-Lösung der 1D Wellengleichung

1-D wave equation / 1D Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{ex}(z,t) \quad \text{for / für} \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq Z \\ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Initial condition / Anfangsbedingung

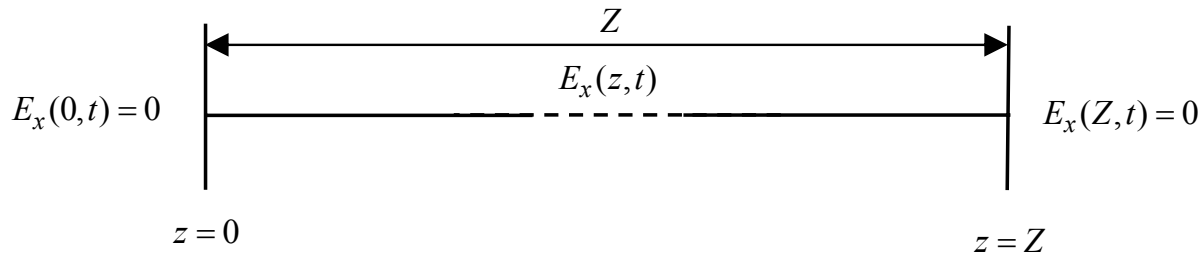
$$\begin{cases} E_x(z,t) = J_{ex}(z,t) = 0 & t \leq 0 \\ J_{ex}(z,t) = K_{e0}(z_0) \delta(z_0) f(t) & t > 0 \end{cases}$$

Causality / Kausalität

Boundary condition for a perfectly electrically conducting (PEC) material /
Randbedingung für ein ideal elektrisch leitendes Material

$$\begin{cases} E_x(0,t) = 0 \\ E_x(Z,t) = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

Hyperbolic initial-
boundary-value problem
/
Hyperbolisches
Anfangs-Randwert-
Problem



FD Solution of the 1-D Wave Equation / FD-Lösung der 1D Wellengleichung

Normalized 1-D FD wave equation / Normierte 1D FD Wellengleichung

$$\hat{E}_x^{(n_z, n_t+1)} = 2\hat{E}_x^{(n_z, n_t)} - \hat{E}_x^{(n_z, n_t-1)} + (\hat{\Delta t})^2 \left[\hat{E}_x^{(n_z+1, n_t)} - 2\hat{E}_x^{(n_z, n_t)} + \hat{E}_x^{(n_z-1, n_t)} \right] \quad \text{for / für } \begin{cases} 1 \leq n_z \leq N_z \\ 1 \leq n_t \leq N_t \end{cases}$$

$$+ \hat{\Delta t} \left[\hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} - \hat{J}_{\text{ex}}^{(n_z, n_t-1)} \right]$$

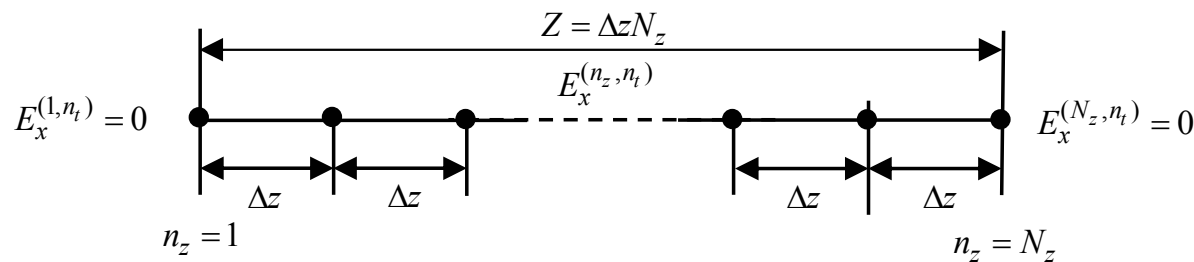
Initial condition / Anfangsbedingung

$$\begin{cases} E_x^{(n_z, n_t)} = J_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} = 0 & n_t \leq 1 \\ J_{\text{ex}}^{(n_z, n_t)} = K_{\text{ex}}^{(n_{z0})} \delta^{(n_{z0})} f^{(n_t)} & n_t > 1 \end{cases}$$

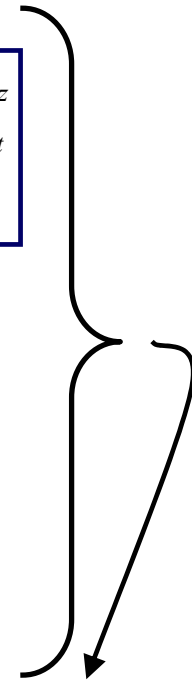
Causality / Kausalität

Boundary condition / Randbedingung

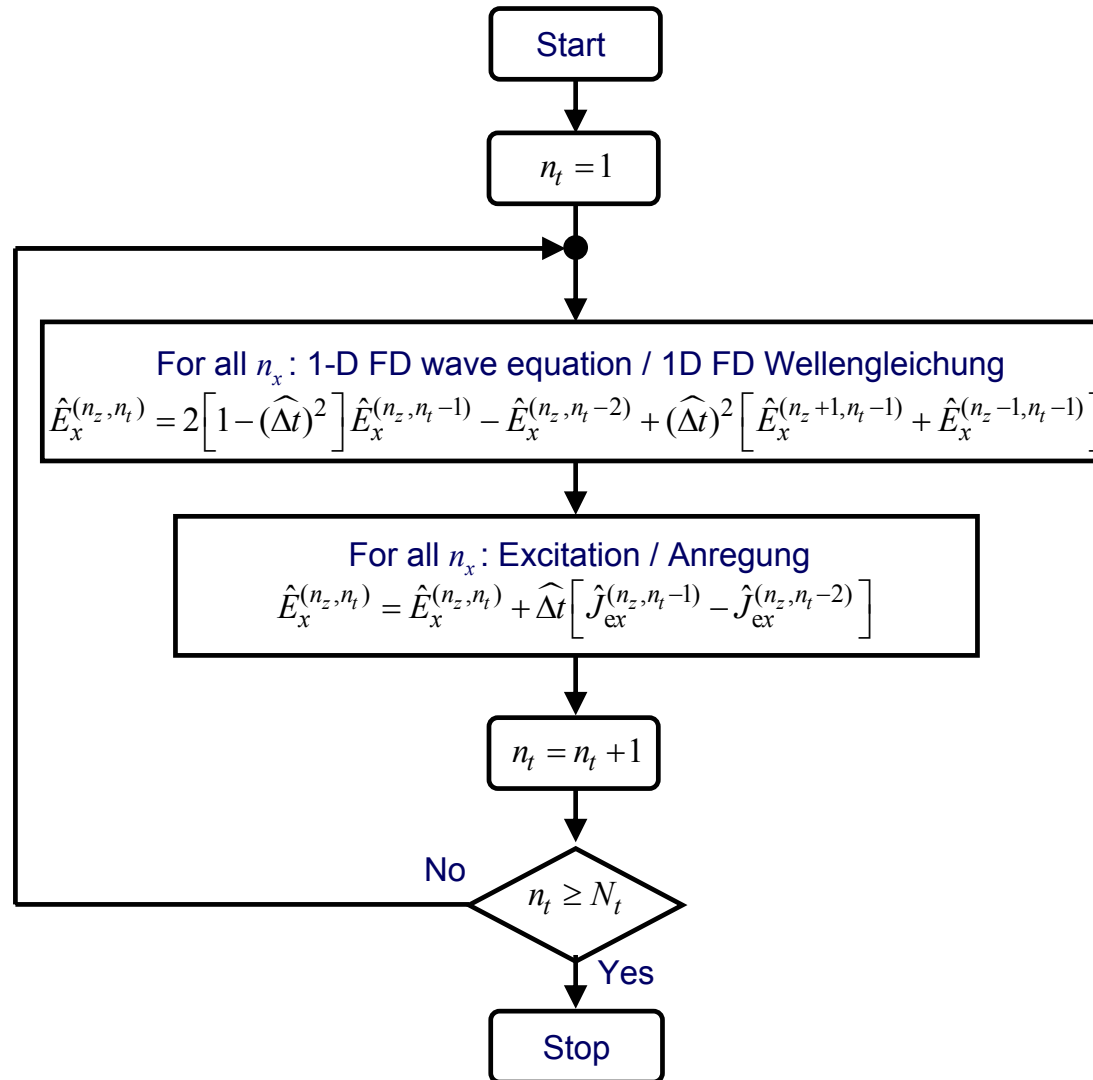
$$\begin{cases} E_x^{(1, n_t)} = 0 \\ E_x^{(N_z, n_t)} = 0 \end{cases} \quad 1 \leq n_t \leq N_t$$



**Discrete hyperbolic
initial-boundary-value
problem /
Diskretes
hyperbolisches
Anfangs-Randwert-
Problem**



FD Method – 1D FD Wave Equation – Flow Chart / FD-Methode – 1D FD-Wellengleichung - Flussdiagramm



FD Method – 1D Wave Equation – Poynting Vector – Energy Density Flow / FD-Methode – 1D Wellengleichung – Poynting-Vektor – Energiedichtefluss

$$\underline{S}_{\text{em}}(\mathbf{R}, t) = \underline{E}(\mathbf{R}, t) \times \underline{H}(\mathbf{R}, t)$$

$$S_{\text{em}z}(z, t) = E_x(z, t) H_y(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t)$$

$$H_y(z, t) = \underbrace{-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t_0)}_{=H_y(z, t_0)} - \frac{1}{\mu_0} \int_{t'=t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t') dt'$$

$$= H_y(z, t_0) - \frac{1}{\mu_0} \int_{t'=t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t') dt'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) = H_y(z, t_0) - \frac{1}{\mu_0} \int_{t'=t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t') dt'$$

$$= H_y(z, t_0) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x\left(z, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \underbrace{\int_{t'=t_0}^{t_0+\Delta t} dt'}_{=\Delta t}$$

$$\approx H_y(z, t_0) - \frac{\Delta t}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x\left(z, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\Delta z} \left[E_x\left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) - E_x\left(z - \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) \right]$$

**Applying the mid-point rule /
Wende die Mittelpunktsregel an**

FD Method – 1D Wave Equation – Poynting Vector – Energy Density Flow / FD-Methode – 1D Wellengleichung – Poynting-Vektor – Energiedichtefluss

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) \approx H_y(z, t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[E_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - E_x \left(z - \Delta z, t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$\Delta z = \Delta x_{\text{ref}}$ $c_{\text{ref}} = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ $\epsilon_{\text{ref}} = \epsilon_0$ $E_{\text{ref}} = 1 \text{ V/m}$	$\Delta t = \Delta t_{\text{ref}} \hat{\Delta t} \quad \Delta t_{\text{ref}} = \frac{\Delta z}{c_0}$ $c = c_0 \hat{c}$ $\mu = \mu_{\text{ref}} \hat{\mu} \quad \mu_{\text{ref}} = \mu_0$ $E_x = E_{\text{ref}} \hat{E}_x$ $H_y = H_{\text{ref}} \hat{H}_y \quad H_{\text{ref}} = \frac{E_{\text{ref}}}{c_{\text{ref}} \mu_{\text{ref}}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}} \mu_{\text{ref}}}}{\mu_{\text{ref}}} E_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}} E_{\text{ref}} = \frac{E_{\text{ref}}}{Z_{\text{ref}}}$ $S_{\text{em } z} = S_{\text{em ref}} \hat{S}_{\text{em } z} \quad S_{\text{em ref}} = E_{\text{ref}} H_{\text{ref}} = \frac{E_{\text{ref}}^2}{Z_{\text{ref}}}$
---	---

$$\sqrt{\frac{\epsilon_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}} E_{\text{ref}} H_y(z, t) \approx \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}} E_{\text{ref}} H_y(z, t_0) - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_{\text{ref}}} \frac{\hat{\Delta t}}{\Delta z} \frac{\Delta z}{c_{\text{ref}}} E_{\text{ref}} \left[\hat{E}_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - \hat{E}_x \left(z - \Delta z, t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$H_y(z, t) \approx H_y(z, t_0) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{\text{ref}}}{\epsilon_{\text{ref}}}} \frac{1}{E_{\text{ref}}} \frac{1}{\mu_{\text{ref}}} \frac{\hat{\Delta t}}{\Delta z} \frac{\Delta z}{c_{\text{ref}}} E_{\text{ref}} \left[\hat{E}_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - \hat{E}_x \left(z - \Delta z, t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$H_y(z, t) \approx H_y(z, t_0) - \frac{\hat{\Delta t}}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}} \mu_{\text{ref}}}} \frac{1}{c_{\text{ref}}} \left[\hat{E}_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - \hat{E}_x \left(z - \Delta z, t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

FD Method – 1D Wave Equation – Poynting Vector – Energy Density Flow / FD-Methode – 1D Wellengleichung – Poynting-Vektor – Energiedichtefluss

$$\hat{H}_y(z, t) \approx \hat{H}_y(z, t_0) - \frac{\hat{\Delta}t}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\text{ref}} \mu_{\text{ref}}}} \frac{1}{c_{\text{ref}}} \left[\hat{E}_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - \hat{E}_x \left(z - \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$\hat{H}_y(z, t) \approx \hat{H}_y(z, t_0) - \frac{\hat{\Delta}t}{2} \left[\hat{E}_x \left(z + \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) - \hat{E}_x \left(z - \Delta z, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$\hat{H}_y^{(n_z, n_t)} = \hat{H}_y^{(n_z, n_t-1)} - \frac{\hat{\Delta}t}{2} \left[\hat{E}_x^{(n_z+1, n_t)} - \hat{E}_x^{(n_z-1, n_t)} \right]$$

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{em}}(\mathbf{R}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{R}, t) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{R}, t)$$

$$S_{\text{em}z}(z, t) = E_x(z, t) H_y(z, t)$$

$$\hat{S}_{\text{em}y}^{(n_z, n_t)} = \hat{H}_y^{(n_z, n_t)} \hat{E}_x^{(n_z, n_t)}$$

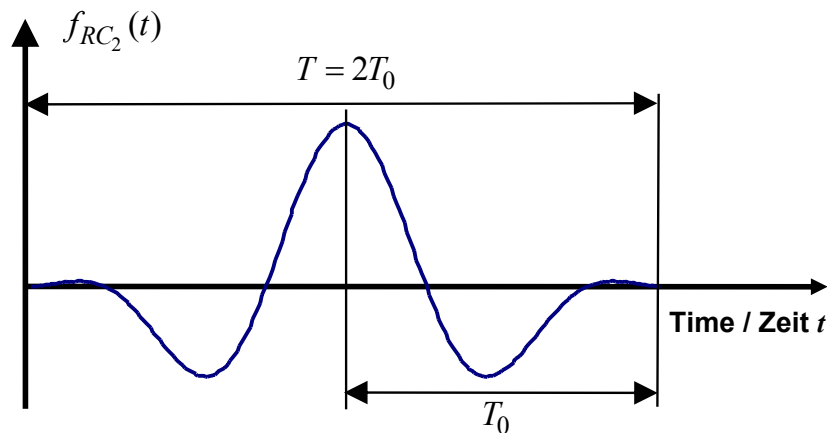
FD Method – 1D Wave Equation – Example / FD-Methode – 1D Wellengleichung – Beispiel

**Raised cosine pulse with n cycles /
Aufsteigender Kosinus-Impuls mit n Zyklen**

$$f_{RC_n}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi f_0}{n} t\right) \right] \cos(2\pi f_0 t) & 0 < t < \frac{n}{f_0} = nT_0 = T \\ 0 & \text{else / sonst} \end{cases}$$

**Raised cosine pulse with 2 cycles /
Aufsteigender Kosinus-Impuls mit 2 Zyklen**

$$f_{RC_2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos(\pi f_0 t) \right] \cos(2\pi f_0 t) & 0 < t < \frac{2}{f_0} = 2T_0 = T \\ 0 & \text{else / sonst} \end{cases}$$



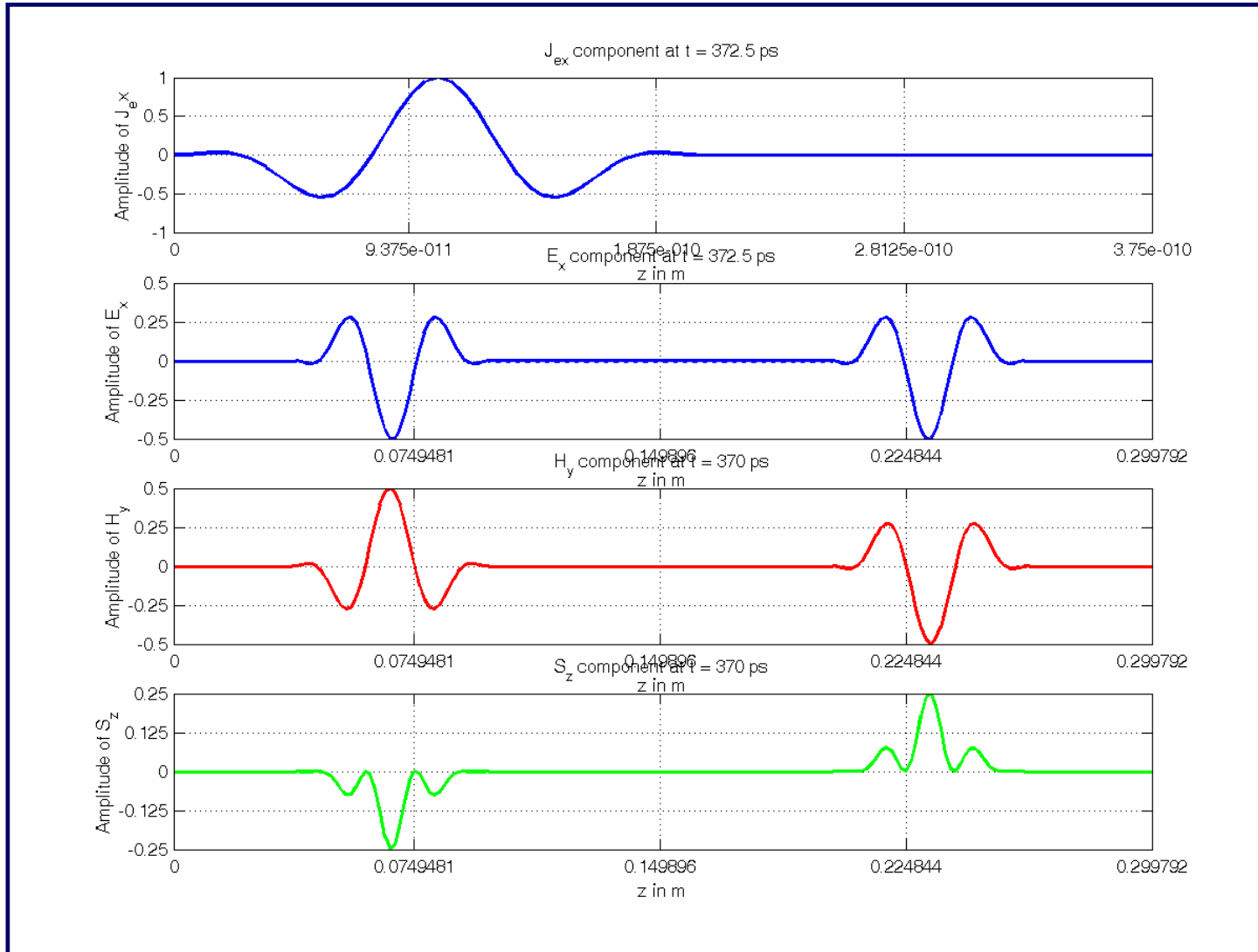
Frequency / Frequenz

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

**Circular Frequency /
Kreisfrequenz**

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

FD Method – 1D Wave Equation – Example / FD-Methode – 1D Wellengleichung – Beispiel



**End of Lecture 1 /
Ende der 1. Vorlesung**