Institut für Mechanik

Universität Kassel

H. Irretier

Schwingungstechnik

Aufgabensammlung

8. Auflage 2009

Herausgeber

Der Geschäftsführende Direktor
Institut für Mechanik
Universität Kassel

Organisation und Verwaltung

Dr.-Ing. Lothar Schreiber
Institut für Mechanik
Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34109 Kassel

Vorwort

In der vorliegenden Aufgabensammlung sind Übungsaufgaben zur Vorlesung *Schwingungstechnik* einschließlich ihrer Lösungen zusammengefasst. Sie orientieren sich nach Aufbau und Inhalt an dem Buch IRRETIER, H.: Schwingungstechnik,Institut für Mechanik, Universität Kassel, und sind entsprechend den dortigen Kapiteln geordnet.

Die Aufgaben gehen zurück auf Übungen und Klausuren zur Lehrveranstaltung Schwingungstechnik innerhalb des gestuften Studienganges Maschinenbau der Universität Kassel. An ihrer Erstellung haben die früheren Mitarbeiter des Instituts für Mechanik Herr Dr.-Ing. M. Hohlrieder, Herr Dr.-Ing. F. Reuter und Herr Dr.-Ing. T. Kreuzinger-Janik maßgeblichen Anteil. Weiter ergänzt wurde die Aufgabensammlung von Herrn Dr.-Ing. S. Lindemann, der gemeinsam mit Frau Dipl.-Ing. A. Böttcher auch die Bilder und Lösungen vollständig überarbeitete. An der Fertigstellung der jetzt vorliegenden Fassung haben Herr MSc F. E. Boru und Dipl.-Ing. D. Strohschein wesentlichen Anteil durch die Anpassung einiger Aufgaben an den aktuellen Inhalt der Vorlesung und ergänzende Korrekturen in der Fragestellungen und Lösungen

Kassel, im März 2009 *H. Irretier*

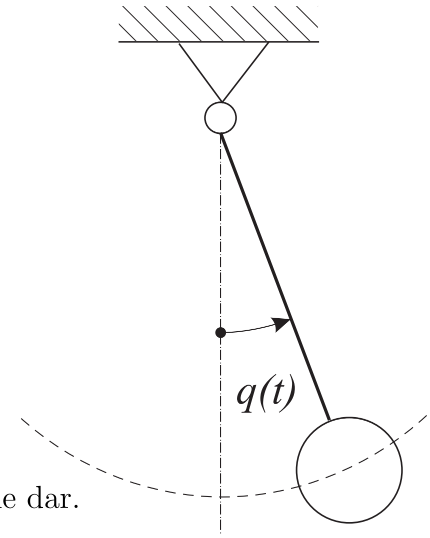
Inhaltsverzeichnis

1 Kinematik von Schwingungen

1.1 Harmonische Schwingungen

Aufgabe 1.1 - 1

Kleine Bewegungen eines Pendels nach nebenstehender Skizze können als harmonische Schwingungen mit der Amplitude $\hat{q}$, der Periodendauer T und dem Phasenwinkel β vollständig beschrieben werden. Diese Bewegung soll durch die Gleichung $q(t) = \hat{q}_c \cos \omega t + \hat{q}_s \sin \omega t$ dargestellt werden.



a) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω und die Amplituden $\hat{q}_c$ und $\hat{q}_s$.

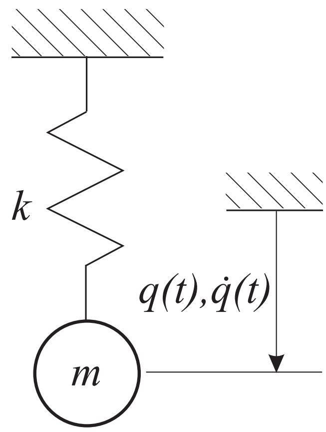
b) Wie groß ist die Frequenz der Schwingung?

c) Stellen Sie die Schwingung in der Phasenebene dar.

Geg.: $\hat{q} = 5°$; $T = 2\,\mathrm{s}$; $\beta = 30°$

Aufgabe 1.1 - 2

Die Bewegung einer Kugel mit der Masse m, die nach nebenstehender Skizze an einer Feder mit der Federsteifigkeit k befestigt ist, kann als harmonische Schwingung beschrieben werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die Auslenkung q_0, die Geschwindigkeit $\dot{q}_0$ sowie der Phasenwinkel β bekannt.



a) Berechnen Sie die Amplitude $\hat{q}$.

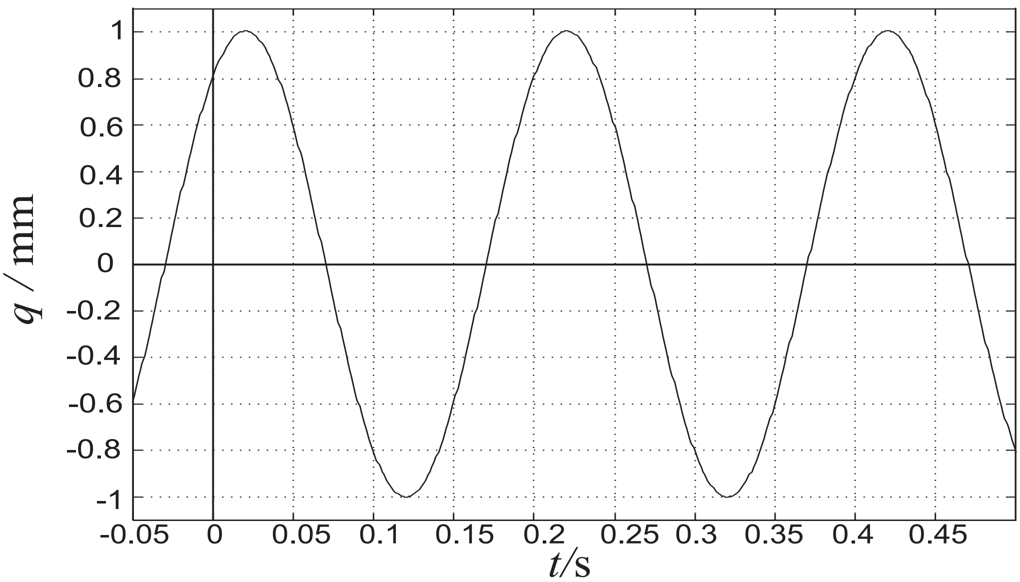
b) Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung?

c) Stellen Sie die Schwingung als Funktion der Zeit dar.

Geg.: $q_0 = 1,732\,\mathrm{mm}$; $\dot{q}_0 = 6,28 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $\beta = 30°$

Aufgabe 1.1 - 3

In dem Diagramm ist die Bewegung eines ungedämpften Ein-Freiheitsgrad-Systems dargestellt. Dabei handelt es sich um eine harmonische Schwingung, die durch $q(t) = \hat{q}_c \cos \omega t + \hat{q}_s \sin \omega t$ beschrieben werden kann.



a) Ermitteln Sie die Amplituden $\hat{q}_c$ und $\hat{q}_s$ sowie die Kreisfrequenz ω aus dem Diagramm.

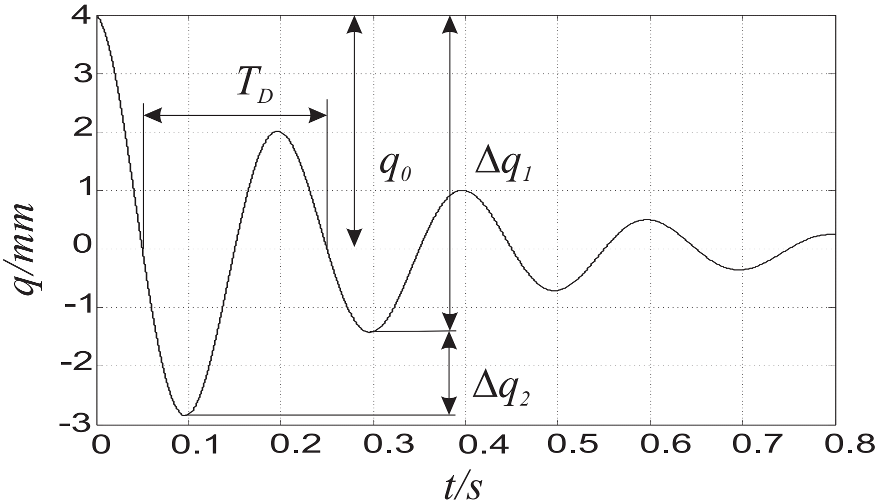
Geg.: $q(t)$

1.2 Gedämpfte Schwingungen

1.2.1 Exponentiell gedämpfte Schwingungen

Aufgabe 1.2.1 - 1

Eine exponentiell gedämpfte Schwingung hat das dargestellte Zeitverhalten:



a) Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement und den Dämpfungsgrad.

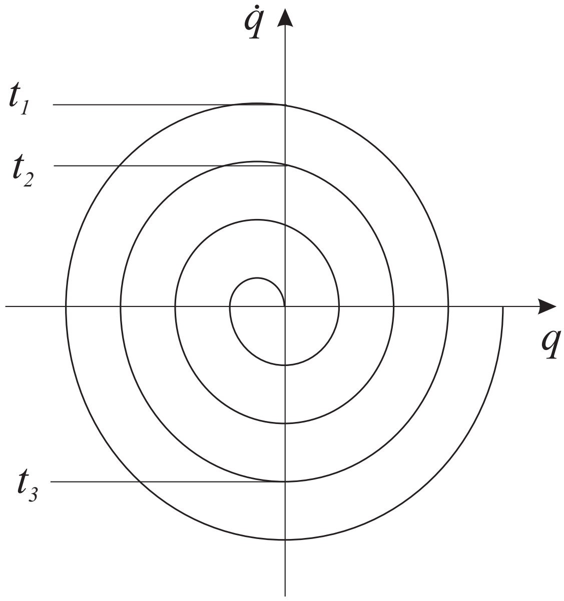
b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der zugehörigen ungedämpften Schwingung?

c) Wie groß ist das Verhältnis zwischen den Kreisrequenzen ω_D und ω der gedämpften bzw. ungedämpften Schwingung?

Geg.: $T_D = 0,2\,\mathrm{s}$; $q_0 = 4\,\mathrm{mm}$; $\Delta q_1 = 5,4\,\mathrm{mm}$; $\Delta q_2 = 1,4\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 1.2.1 - 2

Die nebenstehende Phasenkurve einer exponentiell gedämpften Schwingung wurde während eines Ausschwingversuches aufgezeichnet. Durch Kalibrierung sind die Geschwindigkeiten zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 bekannt.



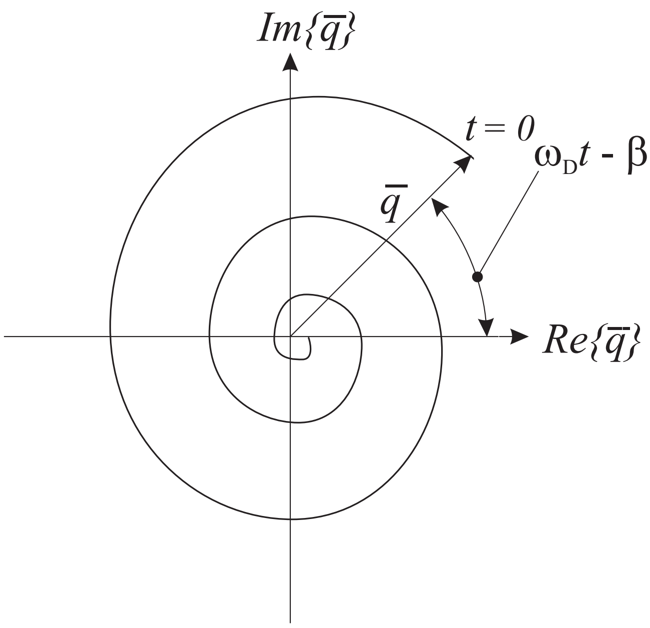
a) Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement und den Dämpfungsgrad des Systems.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_3.

Geg.: $\dot{q}(t_1) = 10 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $\dot{q}(t_2) = 7 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 1.2.1 - 3

Nachfolgende Skizze zeigt eine exponentiell gedämpfte Schwingung in komplexer Zeigerdarstellung. Gegeben sind die komplexen Anfangsbedingungen $\bar{q}(t=0)$ und $\dot{\bar{q}}(t=0)$.



a) Geben Sie das Weg-Zeit-Gesetz in komplexer Schreibweise an.

b) Bestimmen Sie den Faktor A und den Phasenwinkel β [vgl. Gl.$(1.2-4)$][1]

c) Unter Verwendung des Ergebnisses aus b) bestimme man die Kreisfrequenz des gedämpften Systems sowie den Dämpfungsgrad.

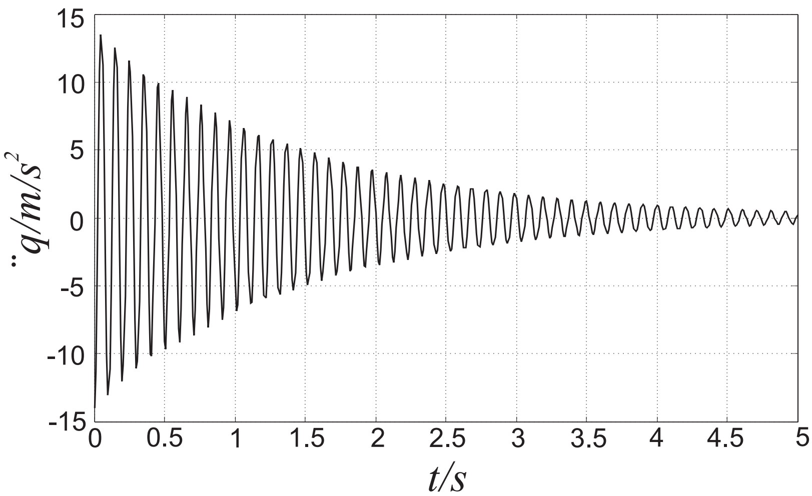
Geg.: $\bar{q}(t=0) = 10\,\mathrm{mm} + j5\,\mathrm{mm}$

$\dot{\bar{q}}(t=0) = -15 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + j5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

[1]Hinweise auf Gleichungsnummern beziehen sich auf das Buch IRRETIER, H.: Grundlagen der Schwingungstechnik 1. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2000

Aufgabe 1.2.1 - 4

An einem Schwingungsystem wurde ein Ausschwingversuch durchgeführt. Dabei wurde die Masse um den Weg q_0 ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Mit einem Beschleunigungsaufnehmer wurde anschließend die Schwingbeschleunigung aufgenommen.



a) Um welche Art von Schwingung handelt es sich?

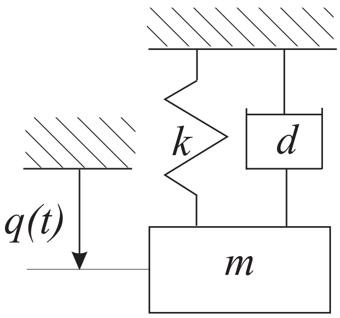
b) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck für die Schwingung an und berechnen Sie alle darin enthaltenen Parameter.

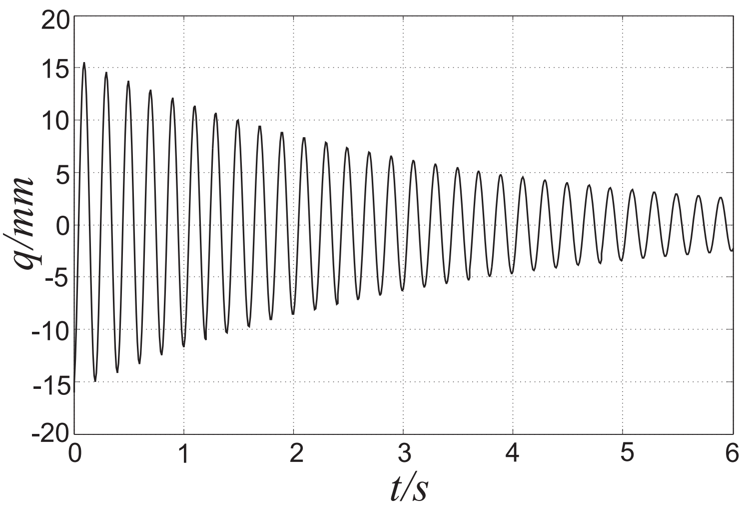
c) Wie groß war die Anfangsauslenkung q_0 zur Zeit $t = 0$?

Geg.: $\ddot{q}(t)$ lt. Diagramm

Aufgabe 1.2.1 - 5

An dem gezeichneten Feder-Masse-Dämpfer-System wurde ein Schwingungsdiagramm aufgenommen.





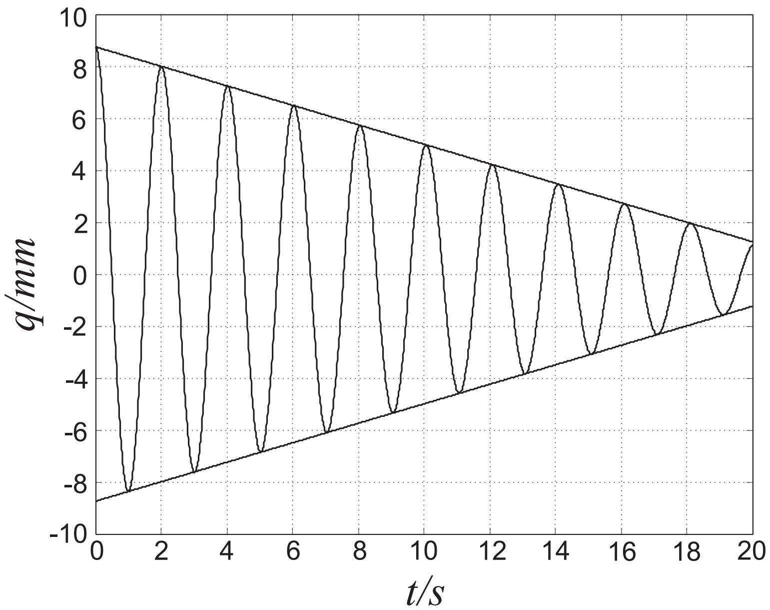
Ermitteln Sie den Dämpfungsgrad der exponentiell gedämpften Schwingung.

Geg.: $q(t)$ lt. Diagramm

1.2.2 Linear gedämpfte Schwingungen

Aufgabe 1.2.2 - 1

Bei einer linear gedämpften Schwingung (wie in nachfolgender Skizze dargestellt) werden zum Zeitpunkt t_1 und t_3 die Amplituden $\hat{q}_1$ und $\hat{q}_3$ gemessen. Die zwischen diesen beiden Punkten liegenden Amplitudenwerte sind nicht bekannt.



a) Berechnen Sie die dem Dämpfungsgrad entsprechende Kenngröße $\tilde{D}$ und die Kreisfrequenz ω [vgl. Gl(1.2 – 18)].

b) Stellen Sie die Gleichung der Hüllkurve g_D auf.

c) Zu welchem Zeitpunkt t_E ist die Schwingung abgeklungen?

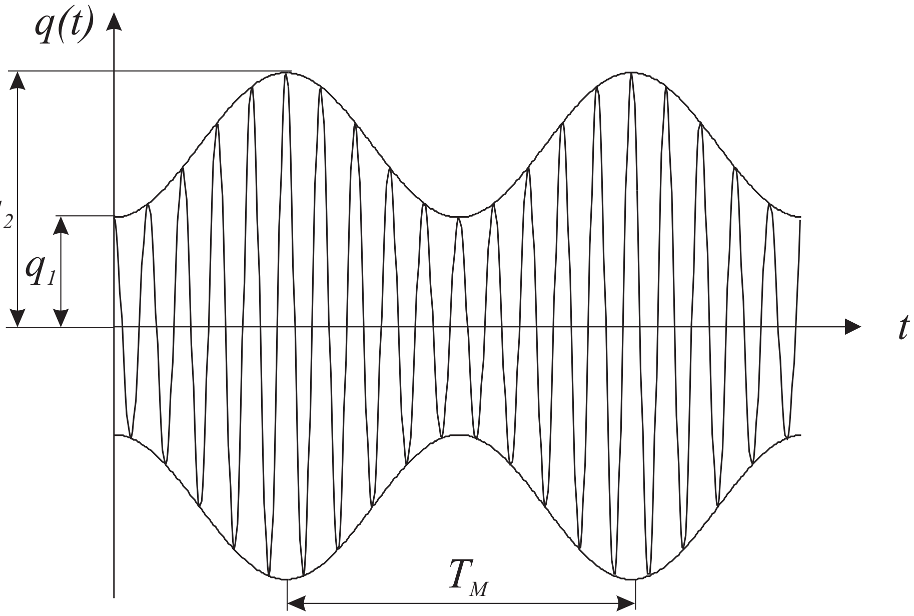
Geg.: $t_1 = 2\,\mathrm{s}$; $t_3 = 6\,\mathrm{s}$; $\hat{q}_1 = 8\,\mathrm{mm}$; $\hat{q}_3 = 6,5\,\mathrm{mm}$

1.3 Modulierte Schwingungen

1.3.1 Amplitudenmodulation

Aufgabe 1.3.1 - 1

Eine amplitudenmodulierte Schwingung mit der Trägerfrequenz $\omega_T = 10\ \omega_M$ (ω_M = Modulationsfrequenz) hat das in folgender Skizze dargestellte Zeitverhalten:



a) Bestimmen Sie den Modulationsgrad m der Schwingung.

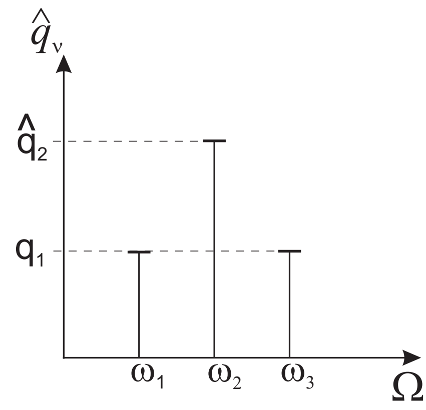
b) Wie groß ist die Trägerfrequenz ω_T und die Modulationsfrequenz ω_M ?

c) Stellen Sie das Frequenzspektrum der Schwingung graphisch dar.

Geg.: $T_M = 2\,\mathrm{s}$; $q_1 = 1\,\mathrm{mm}$; $q_2 = 5\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 1.3.1 - 2

Eine Schwingung hat das nebenstehend dargestellte Frequenzspektrum.



a) Um welche Art von Schwingung handelt es sich?

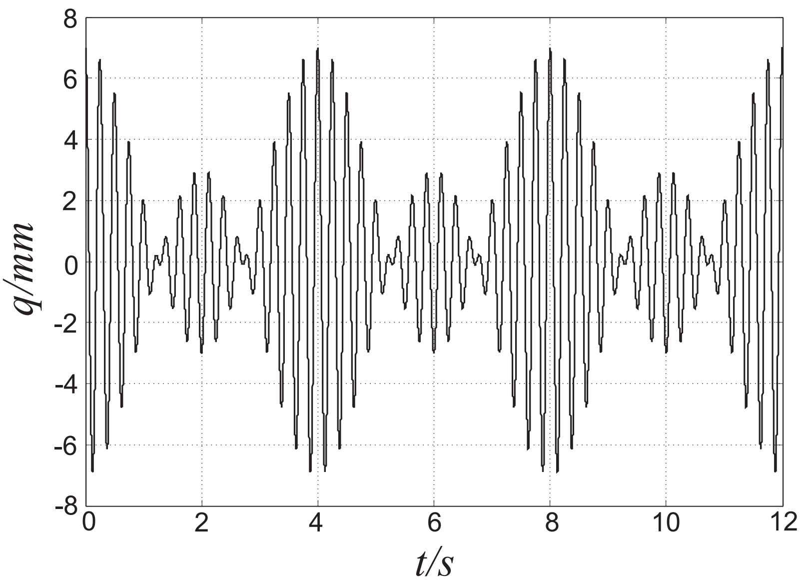
b) Geben Sie den mathematischen Ausdruck für die Schwingung an und berechnen Sie alle erforderlichen Größen (Phasenverschiebungen sollen dabei unberücksichtigt bleiben)!

Geg.: $\omega_1 = 450\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\omega_2 = 500\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\omega_3 = 550\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

$\hat{q}_1 = 10\,\mathrm{mm}$; $\hat{q}_2 = 20\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 1.3.1 - 3

Mit einem Wegaufnehmer ist die im folgenden Diagramm dargestellte Schwingung aufgenommen worden.



a) Um welche Art von Schwingung handelt es sich?

b) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck für die Schwingung an und berechnen Sie alle erforderlichen Größen!

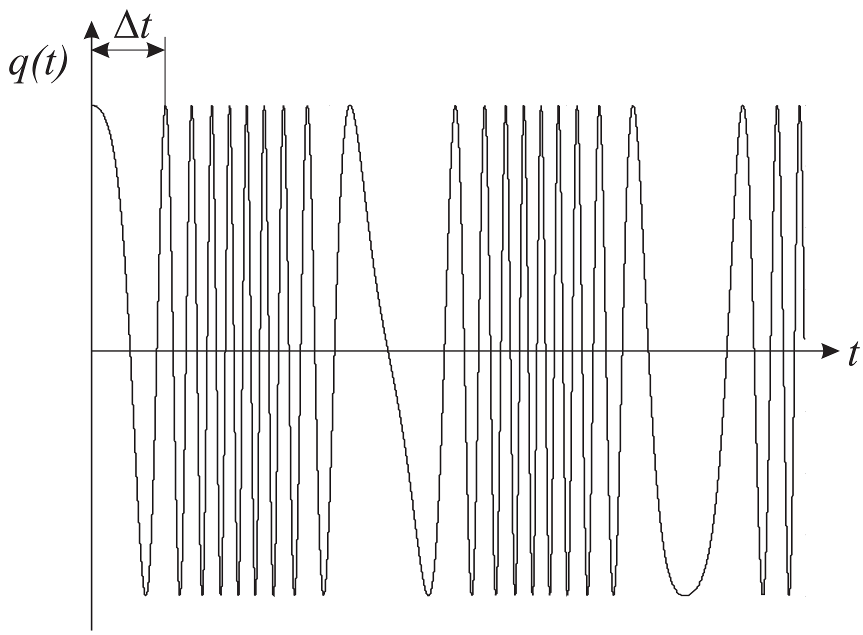
c) Stellen Sie das Frequenzspektrum der Schwingung graphisch mit Zahlenangabe der Amplituden dar!

Geg.: $q(t)$ lt. Diagramm

1.3.2 Phasenmodulation

Aufgabe 1.3.2 - 1

Gegeben ist eine frequenzmodulierte Schwingung gemäß untenstehender Skizze.



a) Welchen Wert kann der Modulationsgrad m maximal annehmen?

b) Bei welchem Modulationsgrad m nimmt die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des komplexen Zeigers periodisch den Wert Null an?

c) Man zeige graphisch, daß sich die Phase $f(t)$ um einen linear mit der Zeit anwachsenden Mittelwert herum harmonisch verändert. Welche Bedeutung haben dabei die Kreisfrequenzen ω_T und ω_M sowie der Faktor $m \cdot \frac{\omega_T}{\omega_M}$?

d) Berechnen Sie die Trägerfrequenz ω_T und den Modulationsgrad m.

Geg.: $\beta = 0° \ ; \ \Delta t = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{s} \ ; \ \omega = 1\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \ ; \ \omega(t=0) = \omega_0 = 1\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

1.3.3 Amplituden- und Frequenzmodulation; Schwebung

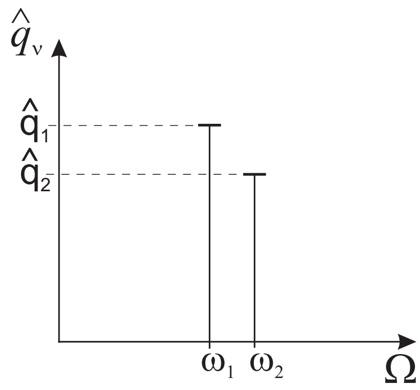
Aufgabe 1.3.3 - 1

Eine Schwingung hat das nebenstehende Frequenzspektrum mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 sowie den zugehörigen Amplituden $\hat{q}_1$ und $\hat{q}_2$.

a) Um welche Art von Schwingung handelt es sich?

b) Geben Sie einen mathematischen Ausdruck für den Verlauf der Hüllkurve $\hat{q}(t)$ und des Phasenwinkels $\beta(t)$ an und berechnen Sie alle dafür erforderlichen Größen!

c) Skizzieren Sie die Schwingung im Zeitbereich!



cm Geg.: $\omega_1 = 450\,\frac{1}{s}$; $\omega_2 = 550\,\frac{1}{s}$; $\hat{q}_1 = 12\,\text{mm}$; $\hat{q}_2 = 9\,\text{mm}$

Aufgabe 1.3.3 - 2

Nebenstehende Skizze zeigt eine amplituden- bzw. frequenzmodulierte Schwingung in komplexer Zeigerdarstellung.

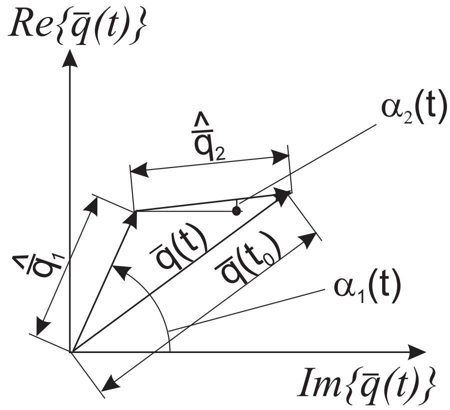
a) Berechnen Sie die Kreisfrequenzen ω_M und ω_T .

b) Wie groß sind die Amplituden $\hat{q}_1$ und $\hat{q}_2$?

c) Welche Schwingung ergäbe sich bei $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$?

Geg.: $t = t_0 = 0,1\,\text{s}$; $\alpha_1(t_0) = 40°$; $\alpha_2(t_0) = 5°$

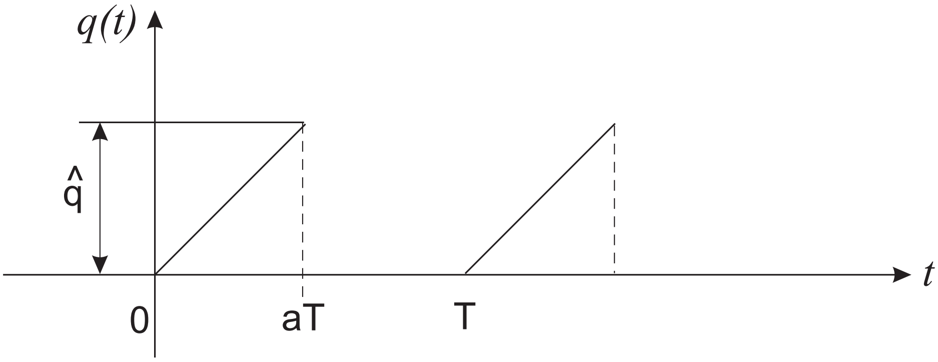
$q(t_0) = 10\,\text{mm}$; $\hat{q}_1 = 2\hat{q}_2$



1.4 Periodische Schwingungen

Aufgabe 1.4 - 1

Eine periodische Schwingung hat folgendes Zeitverhalten:



a) Berechnen Sie die komplexen FOURIER-Koeffizienten $\hat{\underline{q}}_\nu$ der Schwingung.

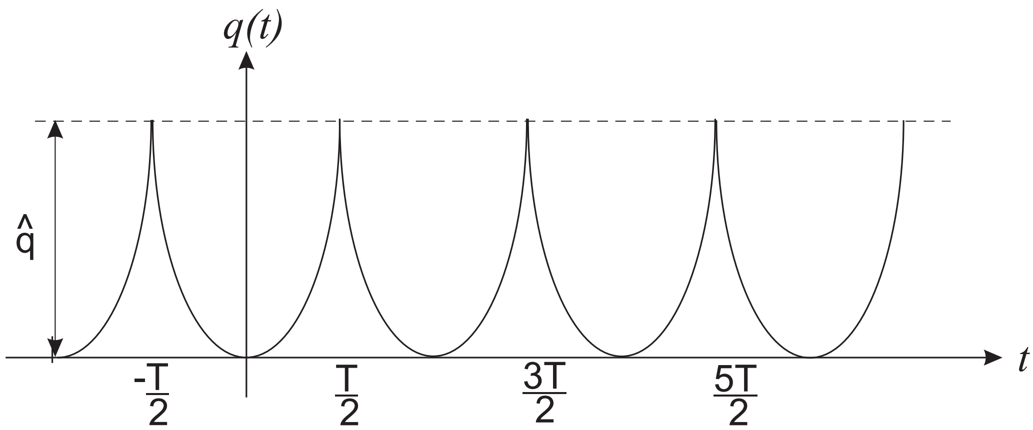
b) Berechnen Sie die FOURIER-Koeffizienten $\hat{q}_{c\nu}$ und $\hat{q}_{s\nu}$ für die Fälle $a = 1$ und $a = \frac{1}{2}$

c) Stellen Sie die FOURIER-Reihe für $a = 1$ und $\nu = 6, 12, 24$ Glieder graphisch dar.

Geg.: $\hat{q}$; a ; T

Aufgabe 1.4 - 2

Untenstehende Skizze zeigt das Zeitverhalten einer periodischen Schwingung, die sich in einer Periode a jeweils parabolisch mit der Zeit ändert.



a) Stellen Sie das Weg-Zeit-Gesetz auf.

b) Berechnen Sie die komplexen FOURIER-Koeffizienten $\hat{\bar{q}}_\nu$.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Koeffizienten $\hat{q}_{c\nu}$; und $\hat{q}_{s\nu}$ und stellen Sie die reell dargestellte FOURIER-Reihe auf.

Geg.: $\hat{q}$; T

1.5 Nichtperiodische Schwingungen

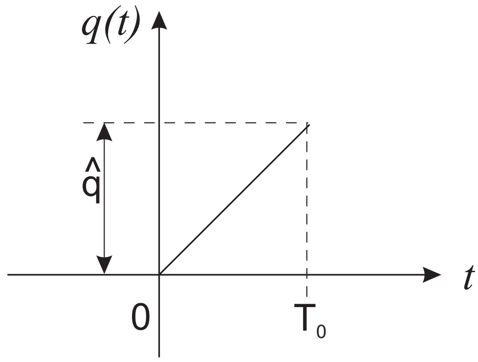
Aufgabe 1.5 - 1

Der nebenstehende Dreiecksimpuls soll durch sein FOURIER-Spektrum dargestellt werden.

a) Berechnen sie das FOURIER-Spektrum $\bar{Q}(\Omega)$

b) Welchen Wert hat das Spektrum für $\Omega \to 0$?

Geg.: $\hat{q}$; T_0



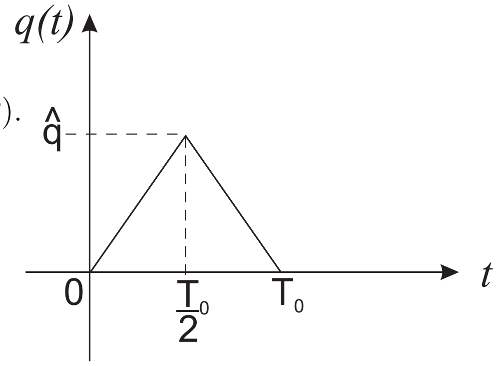
Aufgabe 1.5 - 2

Für nebenstehenden Impuls ist das FOURIER-Spektrum darzustellen.

a) Berechnen Sie das FOURIER- Spektrum $\bar{Q}(\Omega)$.

b) Welchen Wert hat das Spektrum für $\Omega \to 0$?

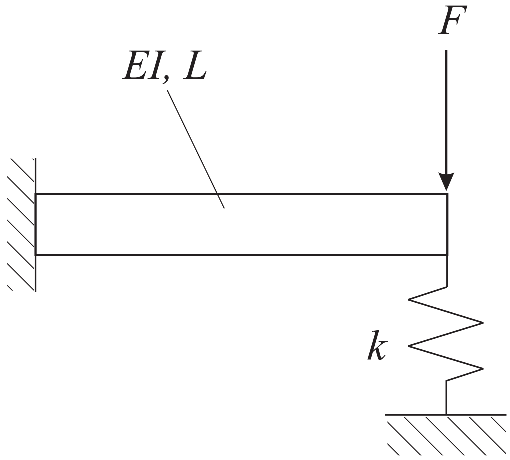
Geg.: $\hat{q}$; T_0



2 Modellbildungen in der Schwingungstechnik

2.1 Elemente mechanischer Schwingungssysteme

2.1.1 Elemente diskreter Systeme



Aufgabe 2.1.1 - 1

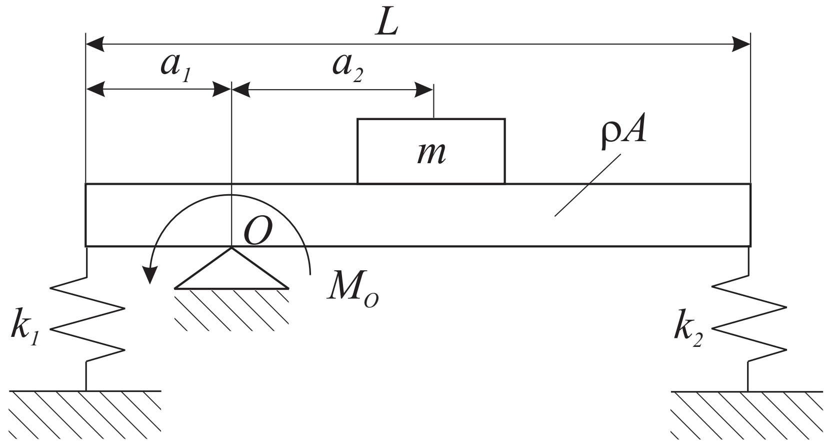
Gegeben ist nebenstehendes System bestehend aus einem einseitig starr eingespannten Balken und einer Schraubenfeder.

Berechnen Sie die Ersatzfederkonstante k_{ers} bei einer Belastung durch die Kraft F.

Geg.: EI ; l ; k

Aufgabe 2.1.1 - 2

Gegeben ist nachfolgendes Feder-Masse-System bestehend aus einem starren Balken (Länge L, Querschnitt A, Dichte ρ) einer Einzelmasse m und zwei Schraubenfedern mit den Federkonstanten k_1 und k_2.



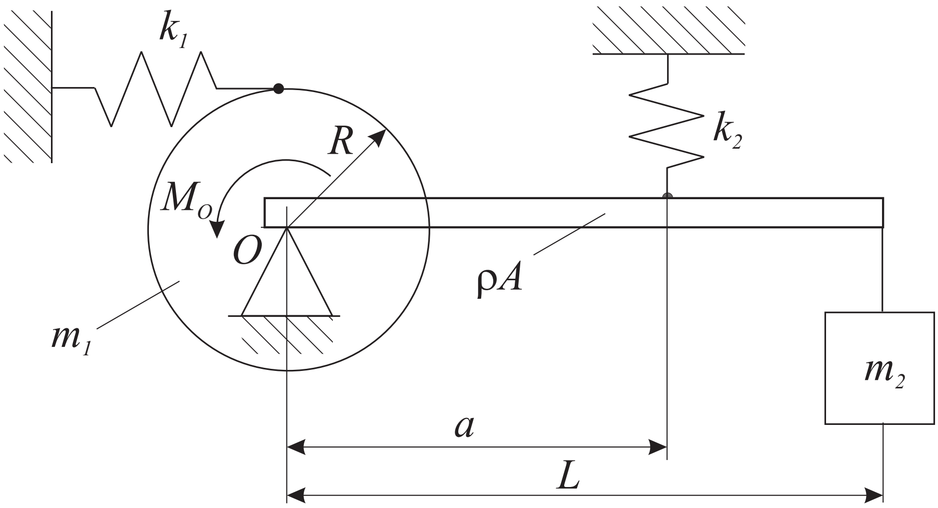
a) Berechnen Sie die Ersatzdrehfederkonstante k_φ des Systems bei einer Belastung durch das Moment M_O (in der statischen Ruhelage).

b) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J_O ?

Geg.: k_1 ; k_2 ; a_1 ; a_2 ; L ; m ; ρ ; A

Aufgabe 2.1.1 - 3

Gegeben ist nachfolgendes Feder-Masse-System. Es besteht aus einer drehbar gelagerten Scheibe mit der Masse m_1 und dem Radius R . Diese Scheibe wird von einer Schraubenfeder mit der Federsteifigkeit k_1, die am Außenrand befestigt ist, gehalten.



An der Scheibe ist ein starrer Balken mit der Länge L, dem Querschnitt A und der Dichte ρ befestigt, der zusätzlich durch eine weitere Feder im Abstand a mit der Federsteifigkeit k_2 gehalten wird. Am Ende dieses Balkens hängt eine Einzelmasse m_2 an einem dehnstarren, masselosen Seil.

a) Berechnen Sie die Drehfederkonstante k_φ des Systems bei einer Belastung durch das Moment M_O .

b) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes der Scheibe?

Geg.: $m_1 = m_2 = 1$ kg ; $k_1 = 2\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $k_2 = 1\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6}\frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$;

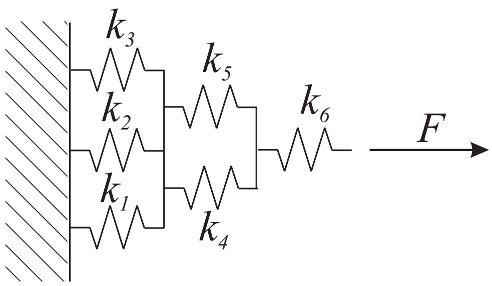
$A = 174$ mm^2 ; $R = 300$ mm ; $a = 600$ mm ; $L = 1000$ mm

Aufgabe 2.1.1 - 4

Gegeben ist nebenstehendes Federsystem. Berechnen Sie die Ersatzfederkonstante k_{ers} des Systems.

Geg.: k_i ; $k_1 = k_2 = k_3 = 20\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

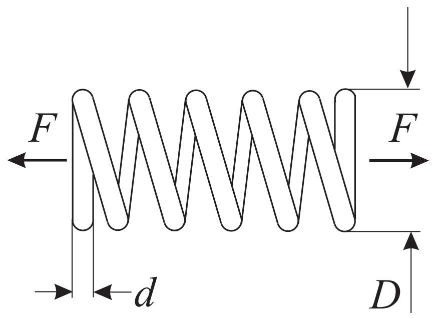
$k_4 = k_5 = 10\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$; $k_6 = 5\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$



2.1.2 Elemente kontinuierlicher Systeme

Aufgabe 2.1.2 - 1

Eine Schraubenfeder (Zahl der Windungen n, Windungsdurchmesser D, Drahtdurchmesser d, Schubmodul G) wird durch zwei Kräfte auf Zug beansprucht.

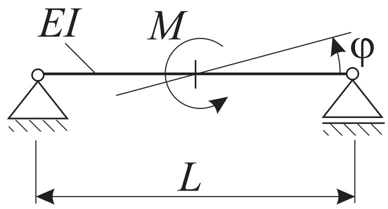


Ermitteln Sie die Federkonstante der Schraubenfeder.

Geg.: n ; D ; d ; G

Aufgabe 2.1.2 - 2

Ein beidseitig gestützter Balken (Länge L, Biegesteifigkeit EI) wird in der Mitte durch ein Moment belastet.



Ermitteln Sie die Drehfederkonstante des Systems.

Geg.: L ; EI

Aufgabe 2.1.2 - 3

Ein mit der maximalen Biegelinie $\hat{w}(t)$ harmonisch schwingender Balken (Biegesteifigkeit EI_y) hat eine strukturelle Dämpfung mit dem Verlustfaktor ζ.

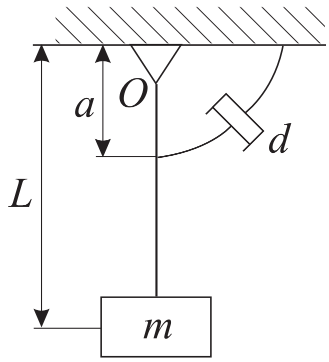
Wie lautet die Beziehung zwischen der maximalen Krümmung $\hat{w}''$ und dem um den Phasenwinkel φ verschobenen Biegemoment des Balkens $\hat{M}_y(x)$?

Geg.: $\hat{w}(x)$; EI ; g

2.2 Aufstellen von Bewegungsgleichungen

Aufgabe 2.2 - 1

Gegeben ist ein Pendel gemäß nebenstehender Skizze bestehend aus einer Masse m, die über einen starren masselosen Stab am Punkt O aufgehängt ist. Im Abstand a ist ein Dämpfer angebracht. Im dargestellten Zustand befindet sich das System in der statischen Ruhelage.



a) Zeichnen Sie das System im Momentanzustand und bestimmen Sie eine zur Beschreibung der Bewegung notwendige Koordinate.

b) Zeichnen Sie das Freikörperbild mit allen am Pendel angreifenden Kräften!

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Pendel auf!

Geg.: m ; L ; d ; a

3 Schwingungen linearer Systeme mit einem Freiheitsgrad

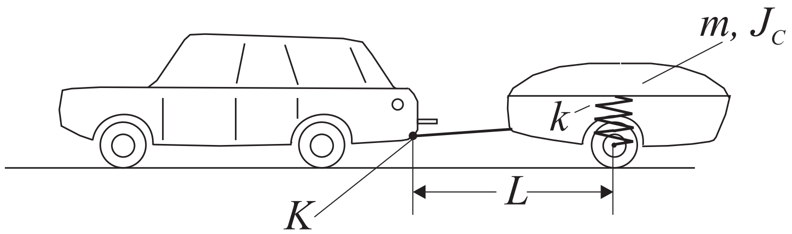
3.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

3.1.1 Mechanische Modelle und ihre Bewegungsgleichungen

3.1.2 Lösung der Bewegungsgleichungen

Aufgabe 3.1.2 - 1

Ein einachsiger Pkw-Anhänger (Deichsel-Achs-Länge L, Masse m, Trägheitsmoment J_C, Federkonstante der Achsaufhängung und Bereifung k) kann durch Straßenunebenheiten zu Hubschwingungen angeregt werden, für die die Anhängerkupplung K als ortsfester Punkt betrachtet werden kann.



Welche Eigenkreisfrequenz hat der Anhänger?

Geg.: $k = 10\,\frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $m = 75$ kg ; $J_C = 25\,\text{kg}\,\text{m}^2$; $L = 1$ m

Aufgabe 3.1.2 - 2

Für das in Aufgabe 2.1.1 - 2 dargestellte System sind zu berechnen:

a) die Eigenkreisfrequenz kleiner Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage.

b) die Frequenz und die Periodendauer der Schwingungen.

Geg.: $k_1 = 0,8\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $k_2 = 1\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $a_1 = 20$ mm ; $a_2 = 20$ mm ; $L = 60$ mm ; $\rho = 8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$A = 12,5\ \text{mm}^2$; $m = 24$ g

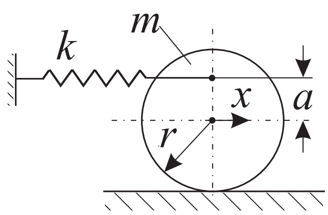
Aufgabe 3.1.2 - 3

An einem homogenen scheibenförmigen Rad (Masse m, Radius R), das auf einem horizontalen Untergrund rollt, ohne zu rutschen, ist im Abstand a vom Mittelpunkt eine Feder (Federkonstante k) befestigt.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen um die gezeichnete Gleichgewichtslage?

b) Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz des Systems?

c) Wie groß ist das Verhältnis der Periodendauern für die Grenzfälle $a = 0$ und $a = r$?



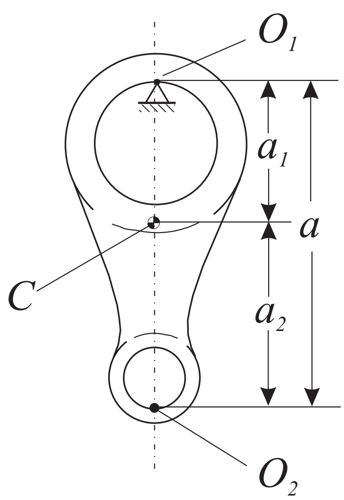
Geg.: $m = 10$ kg ; $k = 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $r = 1$ m ; $a = 0,6$ m

Aufgabe 3.1.2 - 4

Die Lage des Massemittelpunktes eines Pleuels und das Massenträgheitsmoment J_C um die zur Bildebene senkrechte Schwereachse sollen aus Schwingungsversuchen bestimmt werden. Zu diesem Zweck hängt man das Pleuel nacheinander an den beiden Punkten O_1 bzw. O_2 drehbar auf und misst für kleine Schwingungsausschläge die Schwingungszeiten T_1 und T_2.

a) Wo liegt der Massenmittelpunkt?

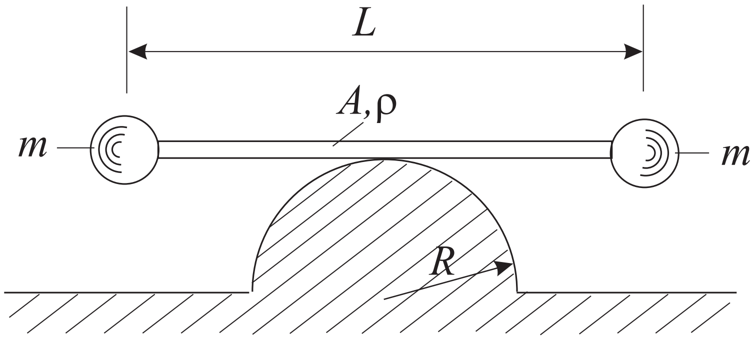
b) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J_C?



Geg.: $m = 1$ kg ; $a = 124,25$ mm ; $T_1 = 1,3$ s ; $T_2 = 0,9$ s

Aufgabe 3.1.2 - 5

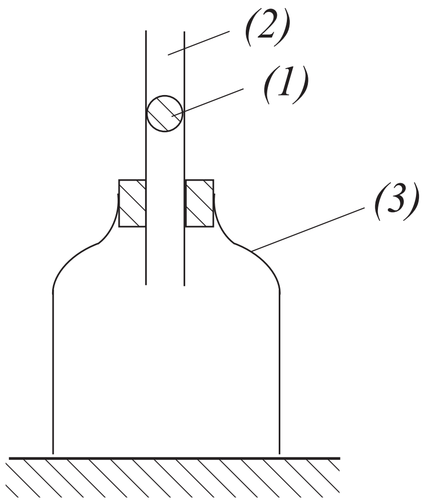
Für die gezeichnete Wippe, bestehend aus einem Stab (Dichte ρ , Querschnitt A, Länge L) mit beidseitig angesetzten Massen m, ist für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage die Eigenkreisfrequenz zu berechnen.



Geg.: R ; $L = 4R$; A ; ρ ; m

Aufgabe 3.1.2 - 6

Die Passung zwischen einer Stahlkugel (1) mit der Masse m und einem Glasröhrchen (2) mit dem Querschnitt A ist so ausgelegt, dass keine Luft entweichen kann. Die Reibungskräfte zwischen Kugel und Glaswand können vernachlässigt werden. Das Glasröhrchen steckt so in einer Flasche (3), dass die unter der Kugel befindliche Luft mit dem Volumen V_0 und dem Druck p_0 die Kugel in der gezeichneten Position hält.

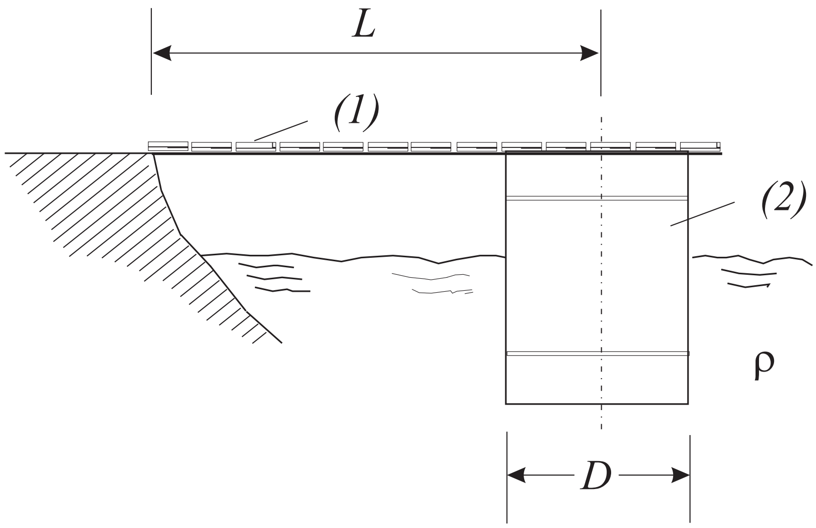


Berechnen Sie Periodendauer der auf dem Luftpolster schwingenden Kugel unter der Voraussetzung eines adiabaten Systems (Adiabatenexponent κ).

Geg.: V_0 ; p_0 ; A ; m ; κ

Aufgabe 3.1.2 - 7

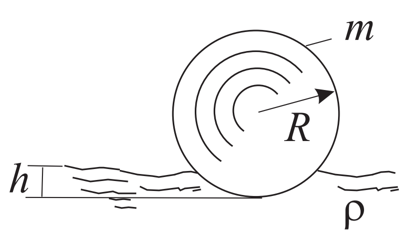
Der gezeichnete masselose Bootssteg (1) der Länge L hat als Schwimmkörper eine Tonne (2) mit der Masse m und dem Durchmesser D. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz bei kleinen Schwingungen des Systems.



Gegeben: L ; D ; m ; ρ

Aufgabe 3.1.2 - 8

Für eine im Wasser schwimmende Kugel (Masse m, Radius R) sind unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen



a) die Bewegungsgleichung aufzustellen und

b) die Eigenkreisfrequenz zu ermitteln.

Geg.: $R = 100$ mm ; $m = 1$ kg ; $\rho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $g = 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{s^2}$

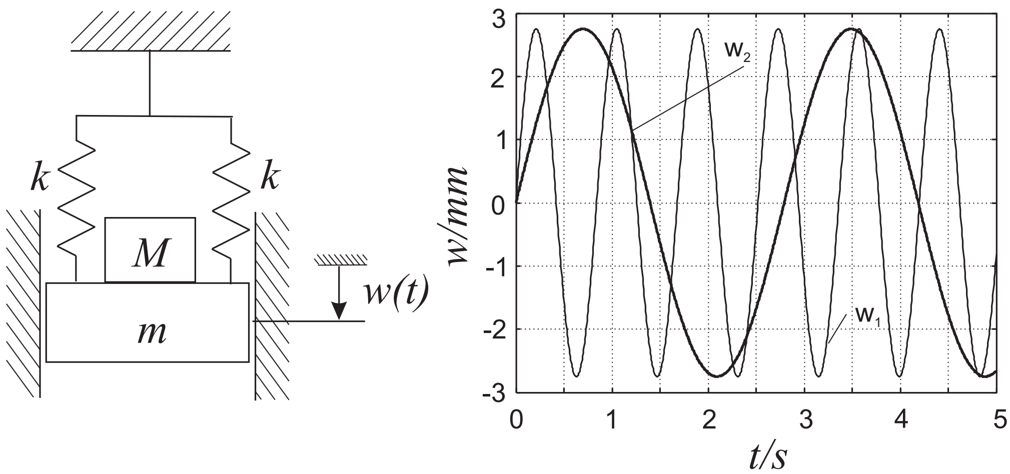
Aufgabe 3.1.2 - 9

Der dargestellte Versuchsstand dient zur experimentellen Ermittlung der Masse M eines Maschinenteils, das auf einen Teller (Masse m) gelegt wird. Der Teller ist über zwei Federn (Federzahl jeweils k) aufgehängt und kann translatorische Schwingungen $w(t)$ ausführen. Zur Bestimmung der Tellermasse m wurde zunächst ein Ausschwingversuch $w_1(t)$ ohne Maschinenteil durchgeführt. Anschließend wurde das Maschinenteil auf dem

Teller befestigt und erneut ein Ausschwingversuch $w_2(t)$ durchgeführt. Dämpfung ist vernachlässigbar.

a) Bestimmen Sie aus dem ersten Ausschwingversuch $w_1(t)$ die Eigenkreisfrequenz des Systems ohne Maschinenteil.

b) Bestimmen Sie mit der unter (a) ermittelten Eigenkreisfrequenz die Masse m des Tellers und aus dem zweiten Ausschwingversuch $w_2(t)$ die Masse M des Maschinenteils.

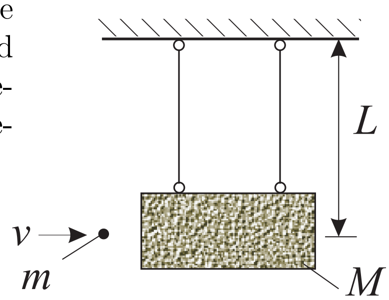


Geg.: $w_1(t)$; $w_2(t)$; $k = 300\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

3.1.3 Anfangsbedingungen

Aufgabe 3.1.3 - 1

Um die Geschwindigkeit v von Geschossen (Masse m) zu bestimmen, werden diese in eine pendelnd (Länge L) aufgehängte Sandkiste (Masse M) geschossen, die dadurch zur Seite ausschwingt. Berechnen Sie



a) die Eigenkreisfrequenz des Systems Sandkiste/Geschoss sowie

b) den Verlauf der Amplitude für kleine Schwingungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Geg.: v ; m ; M ; L

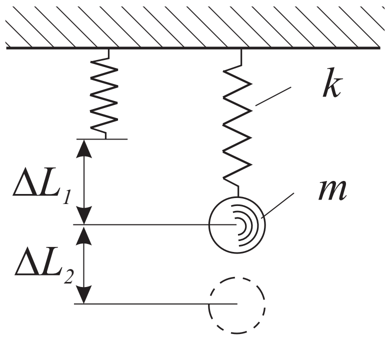
Aufgabe 3.1.3 - 2

An einer Feder hängt eine Masse m. In der statischen Ruhelage wird die Feder um $\varDelta L_1$ gedehnt. Die Masse wird aus der Ruhelage so angestoßen, dass sie um $\varDelta L_2$ nach unten ausgelenkt wird, bevor sie wieder zurückkehrt. Berechnen Sie

a) den Betrag der Geschwindigkeit, die der Masse m beim Anstoßen verliehen wird.

b) die Eigenkreisfrequenz

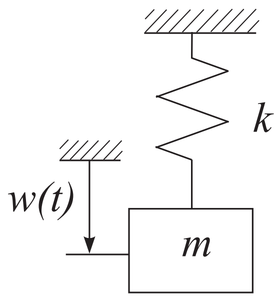
c) den zeitlichen Verlauf der Schwingung.



Geg.: $m = 0,2$ kg ; $\varDelta L_1 = 200$ mm ; $\varDelta L_2 = 80$ mm

Aufgabe 3.1.3 - 3

Der dargestellte Ein-Massen-Schwinger (Masse m, Federsteifigkeit k) kann eine harmonische Schwingung ausführen, die durch die Bewegungskoordinate $w(t)$ beschrieben werden soll. Die Anfangsauslenkung w_0 und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{w}_0$ der Masse m ist zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt.



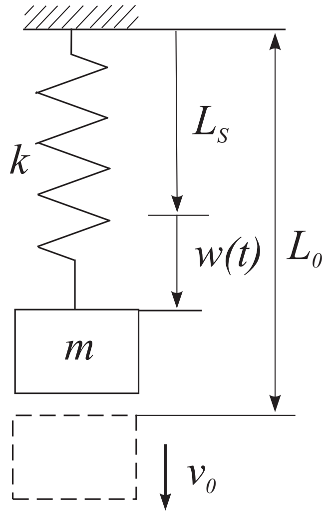
a) Berechnen Sie für die harmonische Schwingung $w(t)$ die Eigenkreisfrequenz ω_0, die Amplitude $\hat{w}$ und den Phasenwinkel β [vgl. Gl.(3.1-17)].

b) Stellen Sie die Funktion $w(t)$ als Addition einer Sinus- und einer Kosinusfunktion dar und berechnen Sie die Koeffizienten.

Geg.: $m = 100\,\mathrm{kg}$; $k = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $w_0 = 10\,\mathrm{mm}$; $\dot{w}_0 = 0,49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.1.3 - 4

Der dargestellte Ein-Massen-Schwinger (Masse m, Federsteifigkeit k) befindet sich in der skizzierten Lage in einem Momentanzustand einer freien Schwingung. Die Schwingung der Masse um die statische Ruhelage L_S wird durch die Bewegungskoordinate w beschrieben. Die Masse befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ausgangslage L_0 und besitzt die Anfangsgeschwindigkeit v_0.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems.

b) Geben Sie eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an. Passen Sie die allgemeine Lösung an die Anfangsbedingungen an und bestimmen Sie daraus die Amplitude und Phase der Schwingung.

c) Es wird ein viskoser Dämpfer (Dämpferzahl d) zu der Feder parallel geschaltet. Berechnen Sie die zugehörige Eigenkreisfrequenz.

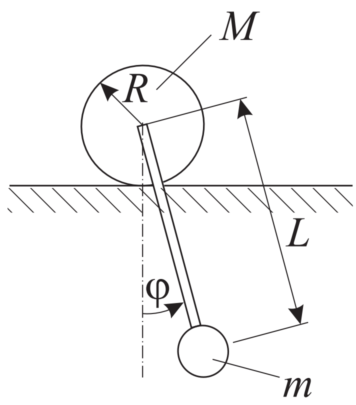
Geg.: $m = 10\,\mathrm{kg}$; $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $L_S = 125\,\mathrm{mm}$; $L_0 = 175\,\mathrm{mm}$

$v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $d = 20\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

3.1.4 Energiebetrachtungen

Aufgabe 3.1.4 - 1

In einem System nach nebenstehender Skizze ist eine Masse m am Ende eines starren gewichtslosen Stabes (Länge L) befestigt. Dieser Stab ist fest mit dem Mittelpunkt eines scheibenförmigen Rades (Radius R, Masse M) verbunden. Das Rad rollt auf dem Untergrund, ohne zu rutschen.



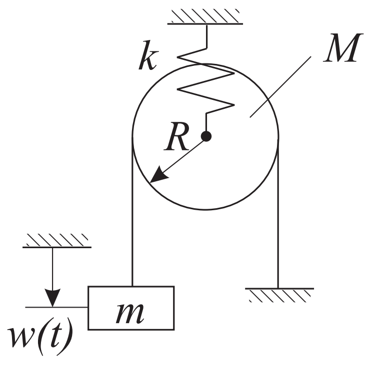
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen nach der Energie-Methode auf!

b) Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung?

Geg.: $L = 1,2$ m ; $R = 0,2$ m ; $m = 1$kg ; $M = 10$ kg

Aufgabe 3.1.4 - 2

Eine Rolle (Radius R, Masse M) ist gemäß nebenstehender Skizze über eine Feder (Federkonstante k) an einer Wand befestigt. Über die Rolle läuft ein dehnstarres Seil. Das eine Ende des Seils ist an der Wand befestigt, während am anderen Ende ein Gewicht mit der Masse m hängt.

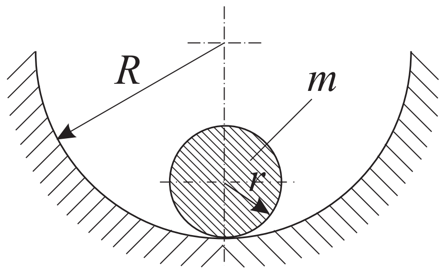


a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems nach der Energie-Methode auf!

b) Nach welcher Funktion bewegt sich die Masse m, wenn sie zum Zeitpunkt t_1 die Auslenkung w_1 und die Geschwindigkeit Null hat?

Geg.: $k = 15\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $R = 0,1$ m ; $m = 3$ kg ; $M = 8$ kg ; $w_1 = 5$ mm ; $t_1 = 0,049$ s

Aufgabe 3.1.4 - 3

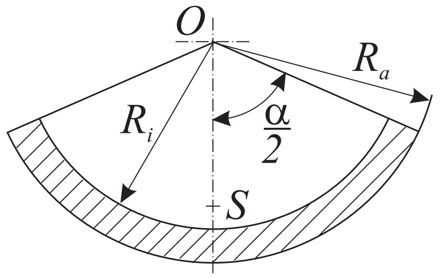


Ein Zylinder mit der Masse m rollt auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius R.

Ermitteln Sie durch Energiebetrachtungen die Eigenkreisfrequenz des Zylinders.

Geg.: R ; r ; g ; m

Aufgabe 3.1.4 - 4



Ein dickwandiges homogenes zylindrisches Kreissegment (Länge L, Innenradius R_i, Außenradius R_a, Öffnungswinkel α, Dichte ρ) in einem raumfesten Punkt O reibungsfrei drehbar gelagert.

Bestimmen Sie mit der Energie-Methode unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen die Eigenkreisfrequenz des Systems für

a) den allgemeine Werte von R_i und α

b) $R_i = 0$; $\alpha = 90°$

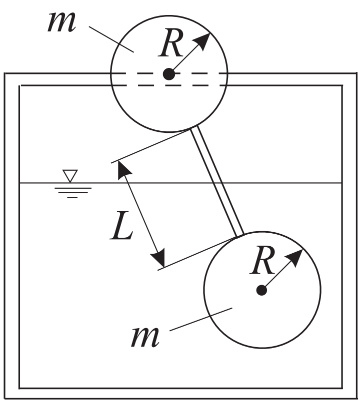
Geg.: R_i ; R_a ; α ; ρ ; g

3.2 Freie gedämpfte Schwingungen

3.2.1 Viskose Dämpfung

Aufgabe 3.2.1 - 1

Ein Pendel besteht aus zwei homogenen Zylindern (Masse jeweils m, Radius R), die durch eine masselose starre Stange (Länge L) verbunden sind. Der obere Zylinder ist in der Mitte reibungsfrei gelenkig gelagert, während sich der zweite in einem Ölbad befindet. Ein Versuch ergibt für kleine Schwingungen des Pendels eine Periodendauer T_D. Nach Ablassen des Öls stellt sich für die ungedämpfte Schwingung eine Periodendauer T_0 ein.



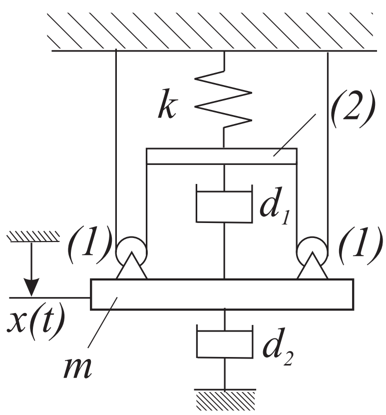
a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Pendels, wenn das Ölbad durch einen äquivalenten, viskosen Dämpfer beschrieben wird?

b) Wie groß ist die äquivalente Dämpferzahl?

Geg.: R ; $L = 2R$; m ; T_D ; $T_0 = 0,98\,T_D$

Aufgabe 3.2.1 - 2

Ein starrer Balken (Masse m) ist gemäß der nebenstehenden Skizze über zwei undehnbare Seile und eine Feder (Federzahl k) aufgehängt. Die Umlenkrollen (1) sowie der Träger (2) können als masselos angenommen werden. Das System ist durch zwei Dämpfer (Dämpferkonstanten d_1 und d_2) gedämpft.



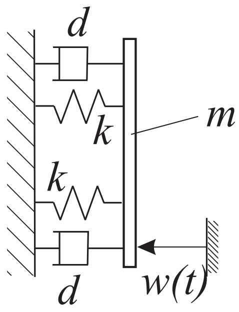
a) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems, wenn $d_1 = d$ und $d_2 = 0$ ist?

b) Es sei $d_1 = d_2 = d$. Ein Ausschwingversuch liefert das logarithmische Dekrement ϑ. Wie groß ist die Dämpferkonstante d?

Geg.: $k = 5$ N/mm ; $m = 2$ kg ; $\vartheta = 0,63$

Aufgabe 3.2.1 - 3

Eine Stoßstange (Masse m) ist mittels zweier Federn und zweier Dämpfer an einer Wand befestigt. Während eines Ausschwingversuches werden die Periodendauer T_D und zwei maximale Auslenkungen $\hat{w}_1$ und $\hat{w}_2$ zu den Zeitpunkten t_1 und $(t_1 + T_D)$ gemessen.



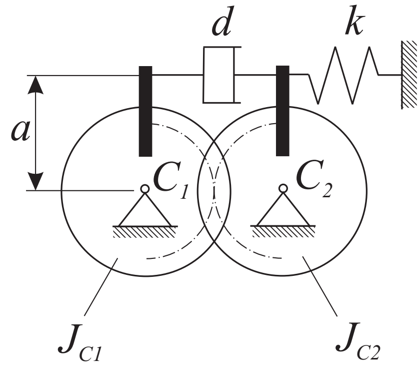
a) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems sowie die Federkonstante k und die Dämpferkonstante d.

b) Um welchen Betrag d muss die Dämpferkonstante mindestens erhöht werden, wenn das System nach einem Anfangsstoß nicht überschwingen soll?

Geg.: $t_1 = 5$ s ; $T_D = 0,1$ s ; $\hat{w}_1 = 2,21$ mm ; $\hat{w}_2 = 2$ mm ; $m = 5$ kg

Aufgabe 3.2.1 - 4

Zwei im Eingriff befindliche Zahnräder (Massenträgheitsmomente J_{C1} und J_{C2} tragen jeweils einen starren, masselosen Hebel. Ein viskoser Dämpfer (Dämpferzahl d) ist gelenkig zwischen den Enden der beiden Hebel befestigt (Abstand a vom jeweiligen Lager des Zahnrades). Eine Feder (Federkonstante k) verbindet das Ende des einen Hebels mit einem ortsfesten Punkt. Die Zahnräder werden jeweils um den Winkel φ_0 verdreht aus der Ruhelage losgelassen und führen anschließend kleine Schwingungen aus.



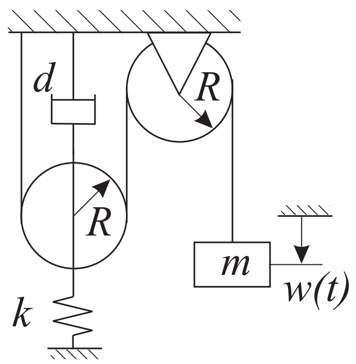
a) Wie groß ist der Dämpfungsgrad des Systems?

b) Welchen Winkelausschlag besitzt jedes Zahnrad nach der Zeit t_1?

Geg.: $J_{C1} = J_{C2} = 200$ Nms^2 ; $k = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; $d = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $a = 0,2$ m ; $t_1 = 0,5$ s ; $\varphi_0 = 1°$

Aufgabe 3.2.1 - 5

Eine Masse m ist gemäß nebenstehender Skizze über ein undehnbares Seil aufgehängt. Das Seil läuft über zwei masselose, reibungsfrei gelagerte Umlenkrollen (Radius R). Das Lager der einen Rolle ist über einen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d und über eine Feder mit der Federzahl k mit der Wand verbunden, während das Lager der zweiten Rolle starr befestigt ist.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf!

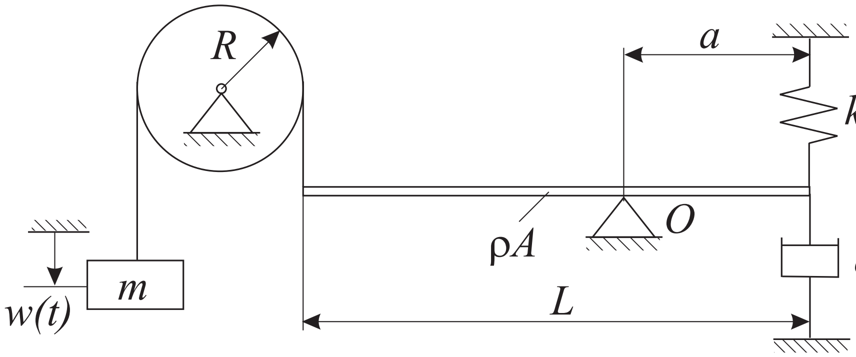
b) Wie groß sind die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und der Dämpfungsgrad?

c) Um wieviel Prozent vermindert sich die Eigenfrequenz, wenn die scheibenförmigen Rollen ebenfalls massebehaftet sind und ihre Massen jeweils m betragen?

Geg.: $m = 0,5$ kg ; $d = 2\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $k = 0,2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $R = 0,2$ m

Aufgabe 3.2.1 - 6

Gegeben ist das dargestellte Feder-Masse-Dämpfer-System. Es besteht aus einer Masse m, die über ein dehnstarres Seil, das ohne zu rutschen über eine masselose Rolle (Radius R) läuft, an einem starren Balken befestigt ist. Der Balken hat über die gesamte Länge den konstanten Querschnitt A und die Dichte ρ. Er ist am raumfesten Punkt O drehbar gelagert und am rechten Ende durch eine Feder mit der Federsteifigkeit k und einem Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d mit der Umgebung verbunden.



a) Wieviel Freiheitsgrade hat das System?

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate w auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad.

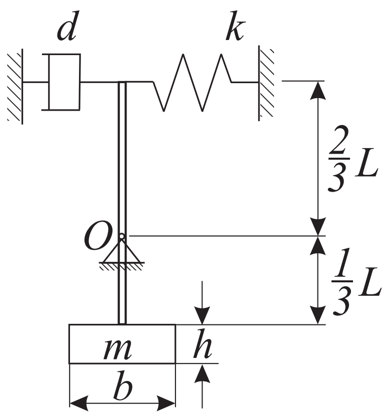
c) Wie lautet die Funktion $w(t)$, wenn die Masse m zur Zeit $t = 0$ um w_0 aus der statischen Gleichgewichtslage ausgelenkt und stoßfrei losgelassen wird?

d) Auf welchen Wert ändert sich die Eigenkreisfrequenz, wenn die Rolle ebenfalls massebehaftet ist und ihre Masse M beträgt?

Geg.: $m = 1$ kg ; $\rho = 7,85 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$; $A = 1820\,\text{mm}^2$; $L = 270$ mm ; $a = 67,5$ mm
$k = 0,648\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 129,6\,\frac{\text{Ns}}{\text{mm}}$; $w_0 = 5\,\text{mm}$; $R = 50\,\text{mm}$; $M = 1,76\,\text{kg}$

Aufgabe 3.2.1 - 7

Ein mathematisches Pendel gemäß nebenstehender Skizze besteht aus einer masselosen starren Stange, die im Punkt O drehbar gelagert ist, und der quaderförmigen Masse m mit der Breite b und der Höhe h. An der Pendelstange sind oberhalb des Drehpunktes eine Schraubenfeder mit der Federsteifigkeit k und ein Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d angebracht.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für kleine Schwingungen auf!

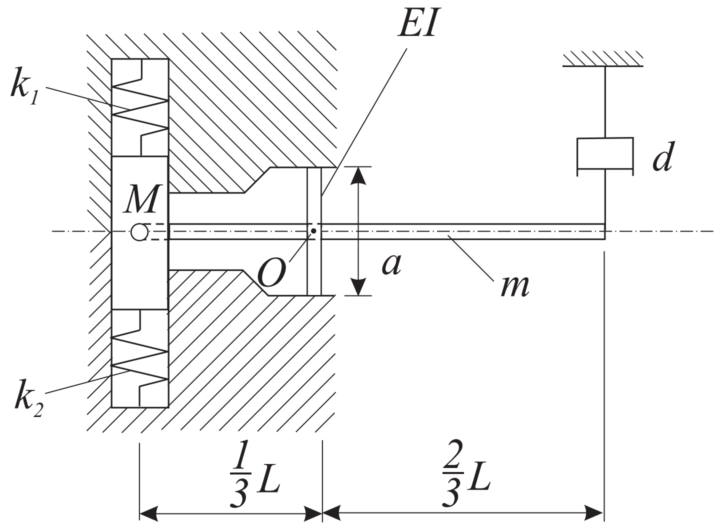
b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad des Systems!

c) Auf welchen Wert ändert sich die Eigenkreisfrequenz, wenn die Pendelstange ebenfalls massebehaftet ist und ihre Masse M beträgt?

Geg.: $m = 1$ kg ; $b = 160$ mm ; $h = 40$ mm ; $L = 300$ mm ; $k = 10\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$; $d = 1\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$;
$M = 5/3\ m$

Aufgabe 3.2.1 - 8

Zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines Maschinenteiles soll das gezeichnete mechanische Ersatzmodell verwendet werden. Es besteht aus einer starren Masse M, die in einer Führung reibungsfrei gleiten kann und von zwei Federn (Federkonstanten k_1 und k_2) gehalten wird. In der Mitte der Masse ist ein dünner, starrer Stab (Länge L, Masse m) gelenkig angeschlossen, der im Punkt O drehbar gelagert ist. Das Drehgelenk wird durch einen massenlossen Biegebalken (Länge a, Flächenträgheitsmoment I, Elastizitätsmodul E) realisiert. Am rechten Ende des Stabes ist ein Dämpfer (Dämpferkonstante d) angebracht.



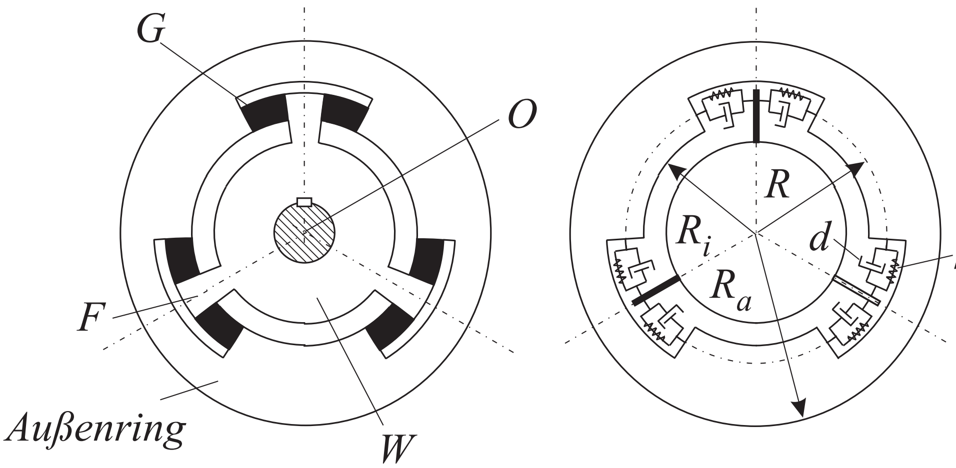
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für kleine Schwingungen auf!

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems sowie den Dämpfungsgrad.

Geg.: $M = 2\,m$; $a = L/2$; $k_1 = k_2 = k$; $EI = kL^3/16$; $m = 1$ kg ; $L = 300$ mm
$d = 306\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $k = 10\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$

Aufgabe 3.2.1 - 9

Das gezeichnete System ist die schematische Darstellung eines Torsionsschwingungstilgers bestehend aus der Welle W, die über drei "Finger" F, an denen jeweils zwei Gummielemente G anvulkanisiert sind, mit einem Außenring verbunden ist. Der Außenring ist als dickwandiger Hohlzylinder (Innenradius R_i, Außenradius R_a, Dicke t, Dichte ρ) zu betrachten. Die Gummielemente besitzen Feder- und Dämpfungseigenschaften (jeweils Federkonstante k und Dämpferkonstante d), deren gemeinsamer Angriffspunkt im Abstand R angenommen werden kann. Die Finger sind zunächst als starr anzusehen.



Für kleine Drehschwingungen des Außenringes um die Wellenachse O sind

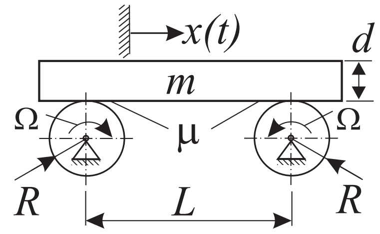
a) die Bewegungsgleichung aufzustellen und

b) die Eigenkreisfrequenz sowie der Dämpfungsgrad zu berechnen.

c) Auf welchen Wert veändert sich die Eigenkreisfrequenz, wenn für die Finger jeweils eine Feder mit der Federkonstanten k_F anzunehmen ist?

Geg.: $R = 50$ mm ; $R_i = 40$ mm ; $R_a = 60$ mm ; $t = 30$ mm ; $k = 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $d = 50\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $\rho = 7850\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$; $k_F = 20k$

Aufgabe 3.2.1 - 10

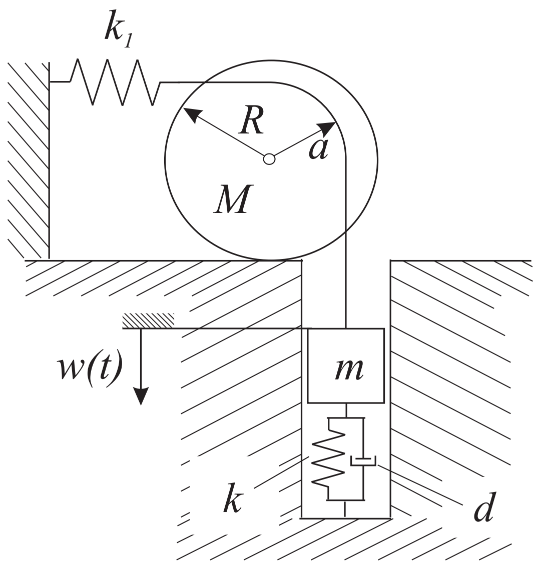


Auf zwei mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gegensinnig rotierenden Walzen (Abstand L, Radius R) liegt ein homogenes Brett der Masse m. Die Kraftübertragung zwischen Brett und Walzen geschieht durch trockene Reibung (Gleitreibungskoeffizient μ).

Zeigen Sie, dass das Brett harmonische Schwingungen ausführt und berechnen Sie die zugehörige Eigenkreisfrequenz.

Geg.: μ ; L ; R ; d

Aufgabe 3.2.1 - 11



In dem skizzierten Schwingungssystem kann eine Masse m in einer Führung reibungsfrei gleiten. Sie ist dabei über eine Feder und einen Dämpfer (Federkonstante k, Dämpferzahl d) an die Umgebung angebunden. Des Weiteren hängt sie an einem undehnbaren Seil, das ohne zu rutschen über eine Nut (Abstand zum Mittelpunkt a) in einer dünnen rollenden Scheibe (Masse M, Radius R) umgelenkt wird. Das Seil endet an einer Feder (Federkonstante k_1), die an der Wand befestigt ist.

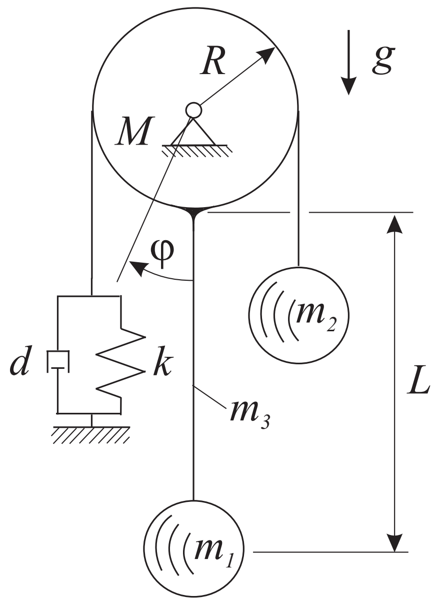
a) Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Scheibe und der Mase und stellen Sie für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichung der Masse auf.

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

Geg.: m ; $M = \frac{7}{8}m$; R ; $a = \frac{3}{4}R$; k ; $k_1 = \frac{9}{7}k$; d

Aufgabe 3.2.1 - 12

Gegeben ist eine Scheibe (Masse M, Radius R), die im Mittelpunkt drehbar gelagert ist. Am unteren Rand ist eine starre Pendelstange (Masse m_3, Länge L) angeschweißt, an deren Ende sich eine Punktmasse m_1 befindet. Über das Rad ist ein undehnbares Seil gelegt, das ohne zu rutschen am linken Ende durch eine Feder (Federsteifigkeit k) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) an die Umgebung angebunden ist und am rechten Ende eine weitere Punktmasse m_2 trägt.



a) Zeichnen Sie jeweils ein Freikörperbild von der Scheibe mit Pendel und der Masse m_2.

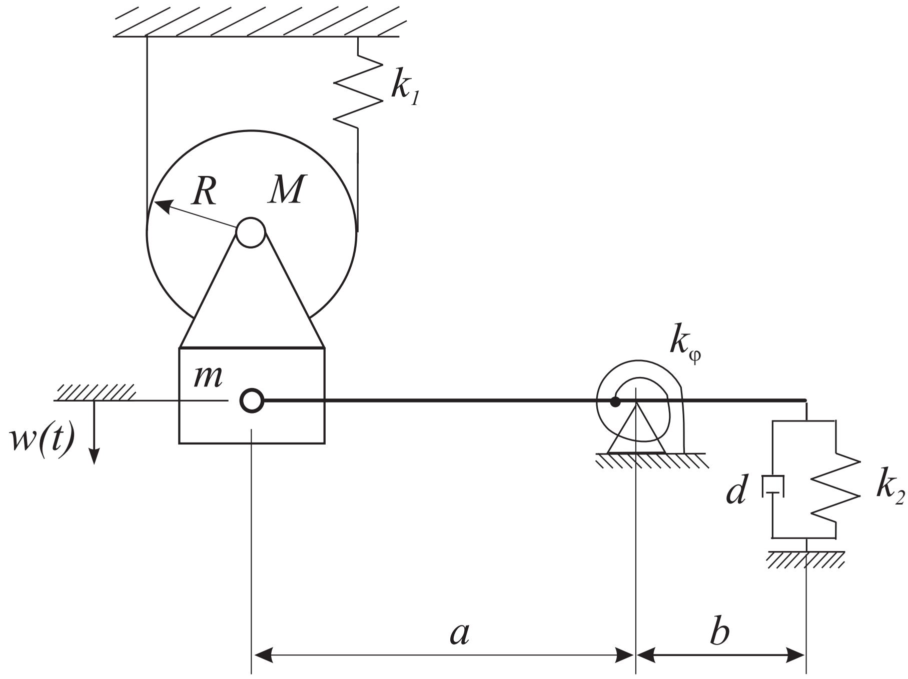
b) Stellen Sie für kleine Winkel die Bewegungsgleichung der Scheibe in φ auf.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

Geg.: g ; M ; $m_1 = \dfrac{1}{3}M$; $m_2 = \dfrac{1}{2}M$; $m_3 = \dfrac{3}{26}M$; d ; R ; $L = 2R$; $k = \dfrac{10}{13}\dfrac{Mg}{R}$

Aufgabe 3.2.1 - 13

Gegeben ist eine Scheibe (Masse M, Radius R), an deren Mittelpunkt gelenkig eine Masse m befestigt ist. Um die Scheibe ist ohne zu rutschen ein Seil geschlungen, das an seinem linken Ende fest eingespannt ist und an seinem rechten Ende in einer Feder (Federzahl k_1) endet. An der Masse m ist eine starre, masselose Stange (Länge $a + b$) gelenkig angebracht, deren rechtes Ende über eine Feder und einen Dämpfer (Federzahl k_2, Dämpferzahl d) angebunden ist. Im Abstand a von der Masse befindet sich ein Lager mit einer Drehfeder (Drehfederzahl k_φ).



a) Zeichnen Sie jeweils ein Freikörperbild von der Scheibe mit der Masse m und von der Stange.

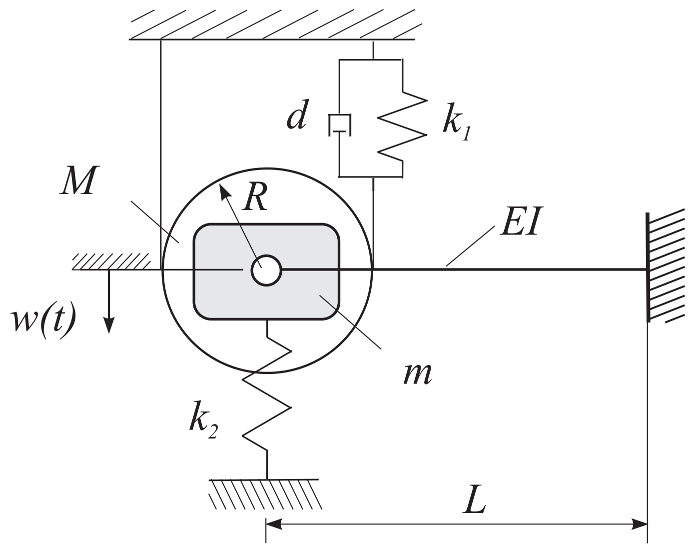
b) Stellen Sie für kleine Schwingungen $w(t)$ die Bewegungsgleichung der Masse m auf.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

Geg.: m ; k ; d ; R ; $b = \dfrac{1}{4}a$; $M = 2m$; $k_1 = 2k$; $k_2 = 8k$; $k_\varphi = b^2 k_2$

Aufgabe 3.2.1 - 14

Gegeben ist eine Scheibe (Masse M, Radius R), an deren Mittelpunkt gelenkig eine Masse m befestigt ist. Um die Scheibe ist ohne zu rutschen ein Seil geschlungen, das an seinem linken Ende fest ist und an seinem rechten Ende in einer Feder (Federzahl k_1) und einem Dämpfer (Dämpferzahl d) endet. An der Masse m ist eine biegeelastische und masselose Stange (Länge L) gelenkig angebracht, deren rechtes Ende fest eingespannt ist. Die Masse über eine Feder (Federzahl k_2) zusätzlich gelagert.



a) Zeichnen Sie jeweils ein Freikörperbild der Scheibe und der Masse.

b) Stellen Sie für kleine Schwingungen $w(t)$ die Bewegungsgleichung des Systems auf.

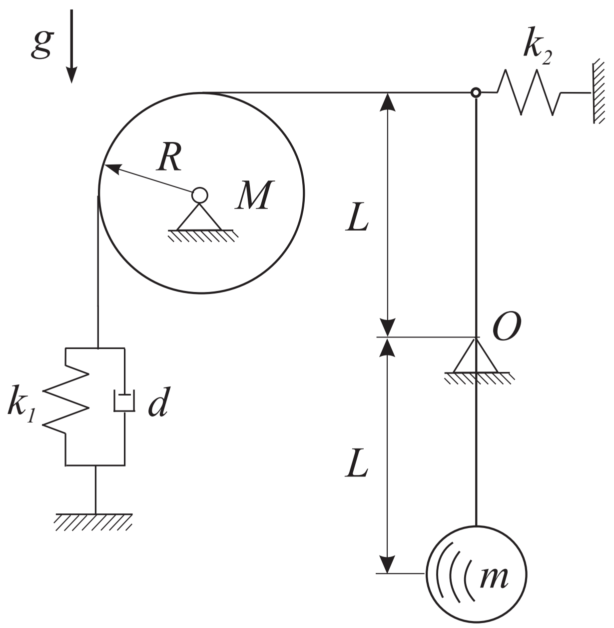
c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

d) Ist durch das Entfernen der Masse m mit einer Erhöhung oder einer Verringerung der Eigenkreisfrequenz zu rechnen? Begründen Sie Ihre Aussage!

Geg.: m ; k ; d ; R ; $k = \dfrac{3EI}{L^3}$; $M = 2m$; $k_1 = 2k$; $k_2 = 7k$

Aufgabe 3.2.1 - 15

Das dargestellte Schwingungssystem besteht aus einer masselosen starren Stange, die im Punkt O drehbar gelagert ist. An der Stange sind oberhalb des Lagers eine Feder (Federzahl k_2) sowie ein undehnbares Seil befestigt. Das Seil wird ohne zu rutschen um eine drehbar gelagerte Umlenkscheibe (Masse M, Radius R) umgelenkt und endet an einer Feder (Federzahl k_1) und einem Dämpfer (Dämpferzahl d_1). Unterhalb des Lagers befindet sich am Ende der Stange eine Masse m.



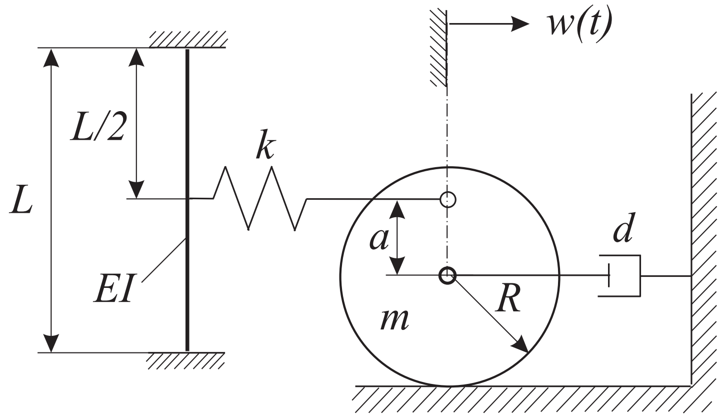
a) Zeichnen Sie ein Freikörperbild für die Scheibe und die Stange mit der Masse und stellen Sie für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichung des Systems auf.

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad .

Geg.: $k_1 = k$; $k_2 = 2k$; d ; k ; m ; $M = 4m$; R ; L

Aufgabe 3.2.1 - 16

An einem homogenen scheibenförmigen Rad (Masse m, Radius R), das auf einem horizontalen Untergrund rollt, ist im Abstand a vom Mittelpunkt eine Feder (Federzahl k) befestigt. Diese Feder ist mit einem masselosen Balken (Biegesteifigkeit EI), der beidseitig eingespannt ist, verbunden. Am Mittelpunkt des Rades ist zusätzlich ein Dämpfer (Dämpferzahl d) befestigt, der mit der Wand verbunden ist.



a) Zeichnen Sie ein Freikörperbild des Rades und stellen Sie für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichung in $w(t)$ des Rades auf.

b) Berechnen Sie den Dämpfungsgrad und die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems.

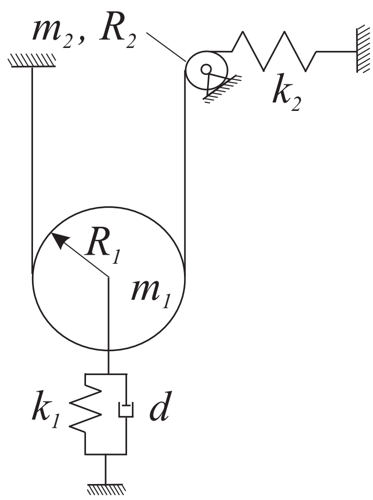
c) Wie groß ist das Verhältnis der Periodendauern für die Grenzfälle $a = 0$ und $a = R$?

Geg.: $EI = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{Nmm^2}$; $k = 30\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $L = 2a$; $d = 400\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $m = 50\,\mathrm{kg}$

$R = 0{,}6\,\mathrm{m}$; $a = 0{,}4\,\mathrm{m}$

Aufgabe 3.2.1 - 17

In dem dargestellten Schwingungssystem wird ein undehnbares Seil ohne zu rutschen um eine bewegliche Scheibe (Masse m_1, Radius R_1) gelegt und über eine drehbar gelagerte Umlenkscheibe (Masse m_2, Radius R_2) umgelenkt. Das Seil endet an einer Feder (Federzahl k_2). Die Scheibe ist in ihrem Mittelpunkt ebenfalls über eine Feder (Federzahl k_1) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) gelagert.



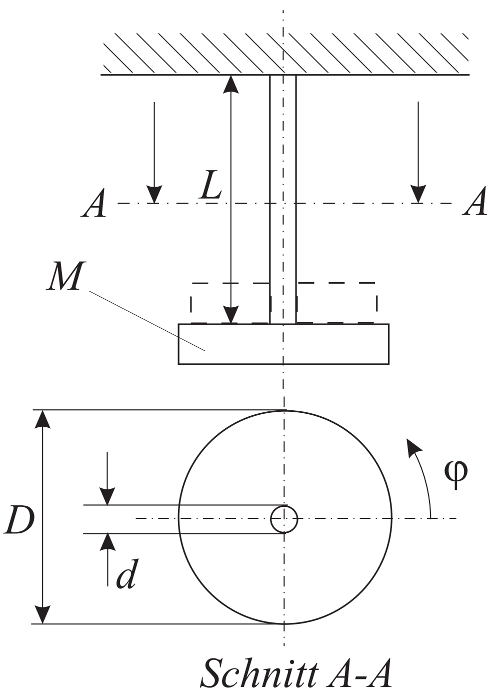
a) Zeichnen Sie ein Freikörperbild und stellen Sie für kleine Schwingungen die Bewegungsgleichung der Scheibe auf.

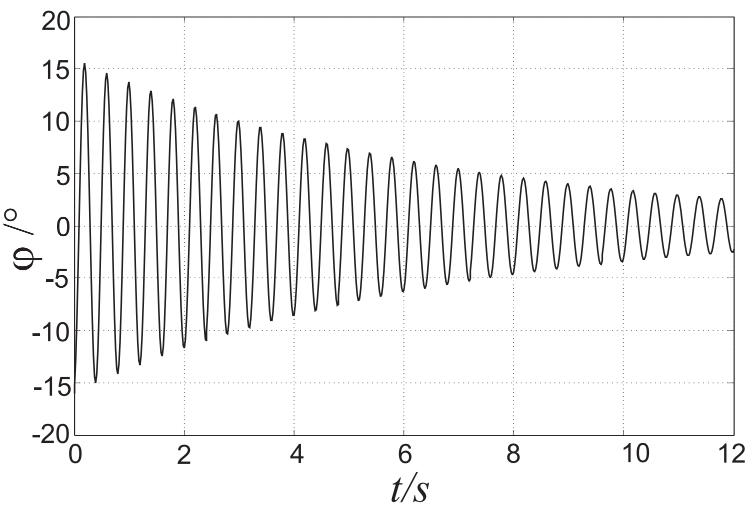
b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

Geg.: $k_1 = 2k$; $k_2 = \frac{1}{3}k$; d ; k ; m ; $m_1 = 2m$; $m_2 = \frac{1}{2}m$; R_1 ; R_2

Aufgabe 3.2.1 - 18

Zur experimentellen Ermittlung des Massenträgheitsmomentes eines Maschinenteiles wird der gezeichnete Drehschwinger, bestehend aus einem Draht (Schubmodul G, Durchmesser d) und einer zylindrischen Scheibe (Durchmesser D , Masse M), verwendet. Ein Ausschwingversuch, bei dem sich das Maschinenteil auf der Scheibe befindet, liefert das gezeichnete Diagramm einer exponentiell abklingenden Schwingung.





Ermitteln Sie

a) die Drehfederkonstante des Drahtes

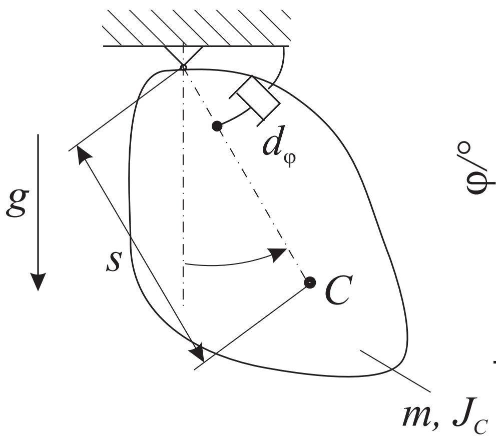
b) das logarithmische Dekrement sowie den Dämpfungsgrad

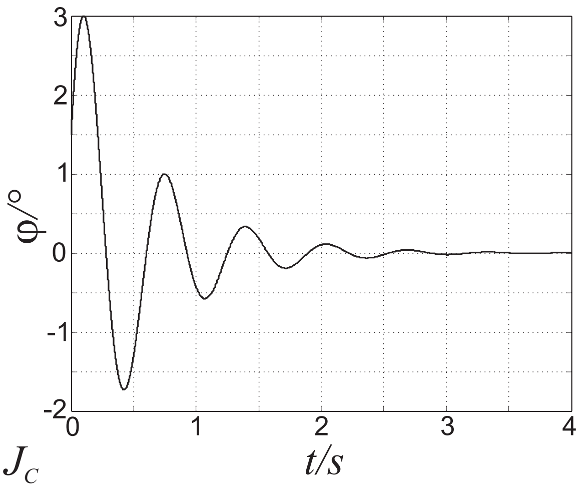
c) das Massenträgheitsmoment des Maschinenteils

Geg.: $L = 2600\,\text{mm}$; $d = 5\,\text{mm}$; $D = 100\,\text{mm}$; $M = 2\,\text{kg}$; $G = 8{,}1 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 3.2.1 - 19

Das dargestellte gedämpfte, physikalische Pendel (Masse m, Massenträgheitsmoment J_C, Drehdämpferzahl d_φ) besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Anfangswinkel φ_0 und eine Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$. Danach ($t > 0$) wird das Pendel sich selbst überlassen und der Winkel φ über der Zeit in dem dargestellten Diagramm aufgezeichnet. Daraus können die Winkelamplituden $\hat{\varphi}_1$ und $\hat{\varphi}_2$ zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 abgelesen werden.





a) Ermitteln Sie die Eigenkreisfrequenz des gedämpften und ungedämpften Pendel und den Dämpfungsgrad.

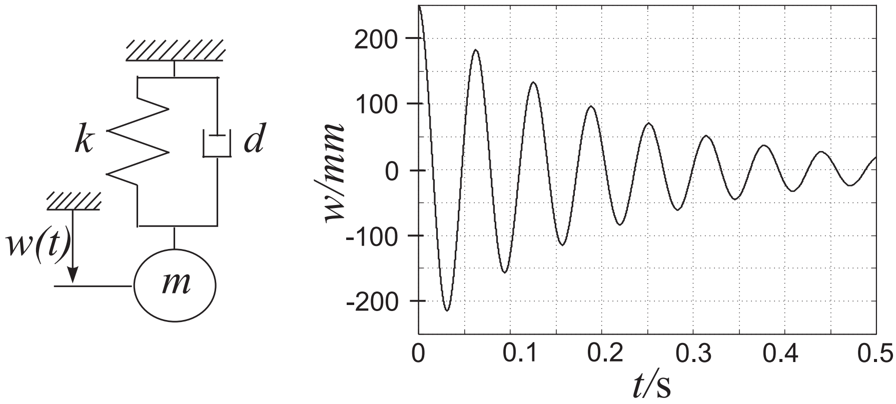
b) Berechnen Sie den Anfangswinkel φ_0 und die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ des Pendels. (Beachte: Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels an der Stelle eines max. Winkels ist gleich Null.)

Geg.: $m = 10\,\mathrm{kg}$; $J_C = 1000\,\mathrm{kg\,mm^2}$; $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$; $t_1 = 0.1\,\mathrm{s}$; $\hat{\varphi}_1 = 3°$; $\hat{\varphi}_2 = 1°$

$s = 100\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.2.1 - 20

Der dargestellte Messschrieb entstand durch einen Ausschwingversuch eines Ein-Freiheitsgrad-Systems (Masse m, Federkonstante k, Dämpferkonstante d).



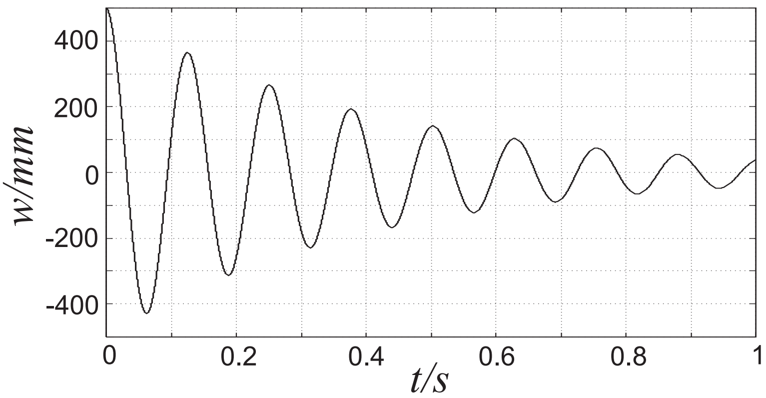
a) Geben Sie eine mathematische Funktion an, die die Ausschwingbewegung $w(t)$ beschreibt und alle vorkommenden Parameter. Verwenden sie dazu den dargestellten Messschrieb.

b) Ermitteln Sie die Masse des Systems für die gegebene Federsteifigkeit k. Um welchen Faktor verändern sich die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und der Dämpfungsgrad, wenn sich die Masse verdoppelt?

Geg.: $k = 20\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$

Aufgabe 3.2.1 - 21

Durch einen Ausschwingversuch eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems (Masse m) entstand der im Bild dargestellte Messschrieb.



a) Ermitteln Sie aus dem Diagramm das logarithmische Dekrement, den Dämpfungsgrad und die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems.

b) Wie groß ist das Verhältnis zwischen der Eigenfrequenz des gedämpften und des ungedämpften Systems?

c) Welche Federsteifigkeit hat das System, wenn bei gleicher Dämpfung die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_D beträgt?

Geg.: $w(t)$; $m = 100\,\mathrm{kg}$; $\omega_D = 100\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

3.3 Erzwungene Schwingungen

3.3.1 Beispiele mechanischer Ersatzmodelle

3.3.2 Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen

3.3.3 Sprung- und impulsförmige Anregung

Aufgabe 3.3.3 - 1

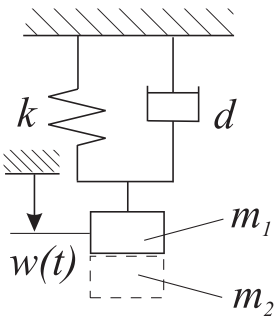
Das gezeichnete Feder-Dämpfer-Masse-System (Masse m_1, Dämpferzahl d, Federkonstante k) wird zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Anhängen einer Zusatzmasse m_2 aus seiner statischen Ruhelage ausgelenkt und zu Schwingungen angeregt. Ermitteln Sie

a) die Eigenkreisfrequenzen ω_0 und ω_D, den Dämpfungsgrad D, die Sprunghöhe r_0 und den Phasenwinkel β [vgl. Gl.(3.3–24)].

b) den Zeitpunkt der maximalen Auslenkung.

c) die maximale Auslenkung.

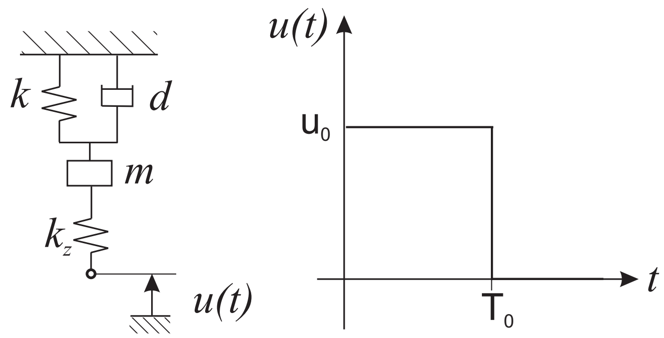
d) Zeichnen Sie den Verlauf $w(t)$.



Geg.: $k = 10\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 0,34\frac{\text{Ns}}{\text{mm}}$; $m_1 = 5\text{kg}$; $m_2 = 3$ kg

Aufgabe 3.3.3 - 2

Das dargestellte Feder-Masse-Dämpfer-System (Federkonstante k, Masse m, Dämpferzahl d) wird über eine Zusatzfeder (Federkonstante k_z) durch eine Rechteckfunktion (Höhe u_0, Dauer T_0) zu Schwingungen angeregt. Ermitteln Sie die Antwort des Systems und die maximale Auslenkung w_{max} an den jeweiligen Sprungstellen zu den Zeitpunken T_0 für



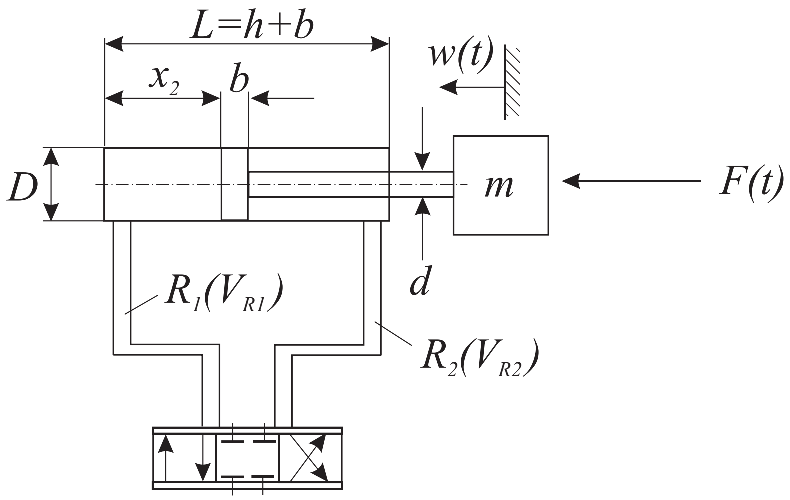
a) $T_0 = 0,10$ s

b) $T_0 = 0,05$ s

Geg.: $m = 40$ kg ; $u_0 = 60$ mm ; $k_z = 150\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $k = 70\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 2500\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Aufgabe 3.3.3 - 3

Auf das gezeichnete Teilsystem einer hydraulischen Anlage bestehend aus einem Differentialzylinder (Länge L, Durchmesser D), einer bewegten Masse m und den Rohrleitungen R_1 (Volumen V_{R1}) und R_2 (Volumen V_{R2}),wirkt bei der gezeichneten Kolbenstellung eine impulsförmige Kraft $F(t)$ ein. Das System ist vollständig mit Hydrauliköl gefüllt und durch das gezeichnete 4/3-Wegeventil abgeschlossen. Berechnen Sie



a) die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad des Systems,

b) den Zeitpunkt und die Größe der maximalen Auslenkung des Kolbens,

c) die Schwingungsantwort des Systems.

Geg.: $D = 120$ mm ; $d = 40$ mm ; $h = 800$ mm ; $x_2 = 250$ mm ; $V_{R1} = 6000\ \text{cm}^3$;

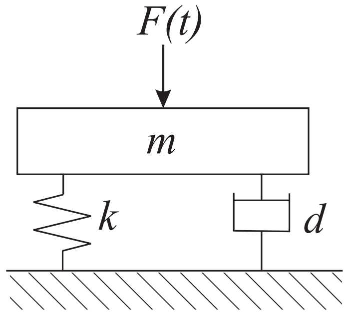
$V_{R2} = 5000\text{cm}^3$; $E_{öl} = 1,4 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$; $m = 300$ kg ; $d_1 = d_2 = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$;

$F_0 = 5$ kN

Hinweis: Das mechanische Ersatzsystem für das dargestellte System kann durch zwei Federn (Federzahlen k_1, k_2) und zwei Dämpfer (Dämpferzahlen d_1, d_2) dargestellt werden. Der E-Modul für die Berechnung der Federzahlen lässt sich aus der Kompressibilität ermitteln (siehe z.B. Dubbel, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 14 Aufl., 1981, S.508).

3.3.4 Harmonische Anregung

Aufgabe 3.3.4 - 1



Das gezeichnete System wird harmonisch durch eine Kraft $F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ erregt. Die Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems, der Dämpfungsgrad D und die Federkonstante k sind bekannt.

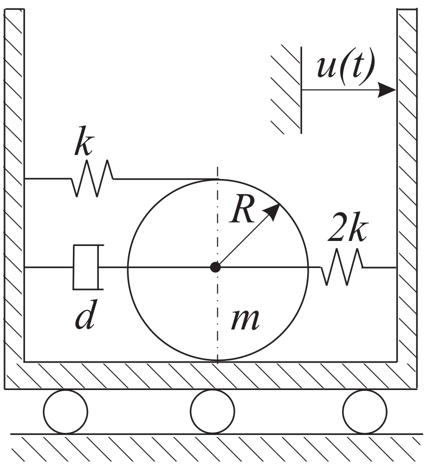
a) Für welche Erregerkreisfrequenz Ω hat die sich einstellende Amplitude ein Maximum? Wie groß sind dann die Amplitude und der Phasenwinkel?

b) Wie groß muß der Dämpfungsgrad D mindestens sein, damit für jedes Frequenzverhältnis $\frac{\Omega}{\omega_0}$ das Verhältnis zwischen Antwort und Erregeramplitude kleiner als Eins ist?

Geg.: $\hat{F} = 1$ N ; $D = 0,6$; $\omega_0 = 189\,\mathrm{s}^{-1}$; $k = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$

Aufgabe 3.3.4 - 2

Der nebenstehend skizzierte auf Rollen gelagerte Kasten, wird harmonisch mit der Funktion $u(t)$ zwangsbewegt. Die homogene Kreisscheibe (Masse m), Radius R), die mit dem Kasten über zwei Federn (Federkonstante k und $2k$) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) verbunden ist, rollt in dem Kasten, ohne zu rutschen. Für kleine Rollwinkel der Scheibe sollen bestimmt werden:



a) die Bewegungsgleichung

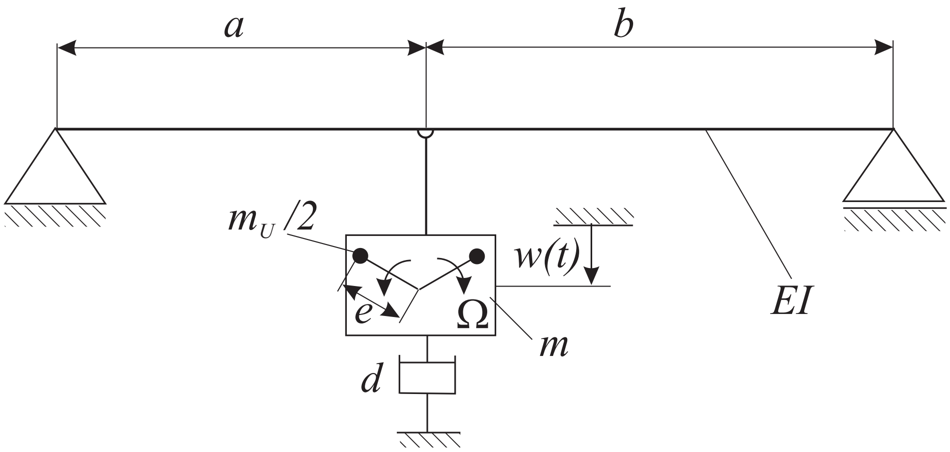
b) die Eigenkreisfrequenz des Systems

c) der Wert der Dämpfungskonstanten d, für den bei Resonanzerregung die relative Auslenkung der Scheibe gleich der Amplitude $\hat{u}$ der Fremderregung wird.

Geg.: $k = 3,2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $m = 2$ kg ; $u(t) = \hat{u}\,\cos\Omega t$

Aufgabe 3.3.4 - 3

Das unten abgebildete mechanische System (Gesamtmasse m) wird durch einen unwuchtigen Motor (Unwuchtmasse m_U, Exzentrizität e) zu vertikalen Schwingungen angeregt. Der Motor hängt an einer masselosen Blattfeder (Länge $a+b$) mit der Biegesteifigkeit EI. Die Schwingung wird durch einen Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d gedämpft.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz!

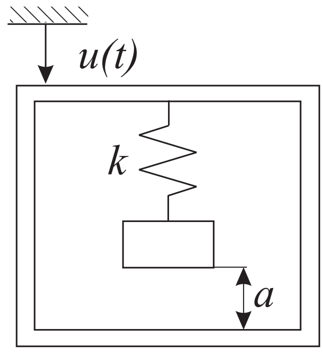
b) Bei welcher Drehzahl wird die Amplitude $\hat{w}$ des Motors am größten und welchen Wert nimmt sie an?

c) Welcher Drehzahlbereich wäre zu vermeiden, wenn man aus dem System den Dämpfer entfernt und die maximale Amplitude $\hat{w}_{max} \leq 2$ mm bleiben soll?

Geg.: $EI = 3 \cdot 10^5$ Nmm^2 ; $a = 25$ mm ; $b = 75$ mm ; $d = 32\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $m = 0,9$ kg
$m_U = 0,1$ kg ; $e = 5$ mm

Aufgabe 3.3.4 - 4

Das nebenstehend skizzierte seismische Messinstrument (Federkonstante k, Masse m) mit vernachlässigbar kleiner Dämpfung wird harmonisch nach der Funktion $u(t) = \hat{u}\cos\Omega t$ erregt. In der statischen Ruhelage hat die Masse m einen Abstand a vom Boden des Gehäuses.



a) Welcher Frequenzbereich ist zu vermeiden, damit die Masse m nicht den Gehäuseboden berührt?

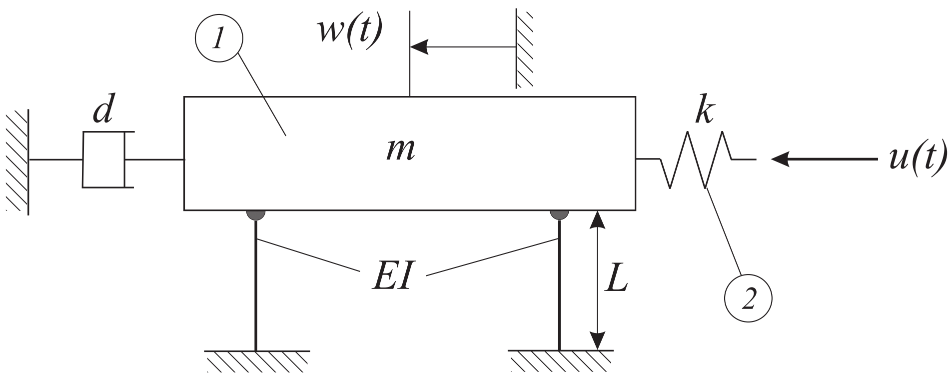
b) Welche Dämpferzahl d muss ein zwischen der Masse m und dem Gehäuse hinzugefügter Dämpfer haben, damit im gesamten Frequenzbereich $0 \leq \Omega \leq \infty$ die Masse m nicht den Gehäuseboden berührt?

Geg.: $k = 0,04\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $m = 0,5$ kg; $a = 18$ mm ; $\hat{u} = 2$ mm

Hinweis: Zu Frage b) kann angenommen werden, dass das Maximum der Verzerrungsfunktion beim Frequenzverhältnis $\eta = 1$ auftritt.

Aufgabe 3.3.4 - 5

Ein Rüttelsieb (1) gemäß nachstehender Skizze ruht auf zwei masselosen Blattfedern, mit denen es starr verbunden ist. Die Masse des Siebes mit Inhalt beträgt m. Das Sieb wird durch einen Motor mit der Drehzahl n über ein Pleuel und eine Zusatzfeder (2) angeregt. Zur Beschreibung der Dämpfung des Gesamtsystems wird ein Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d angenommen.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf, und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz!

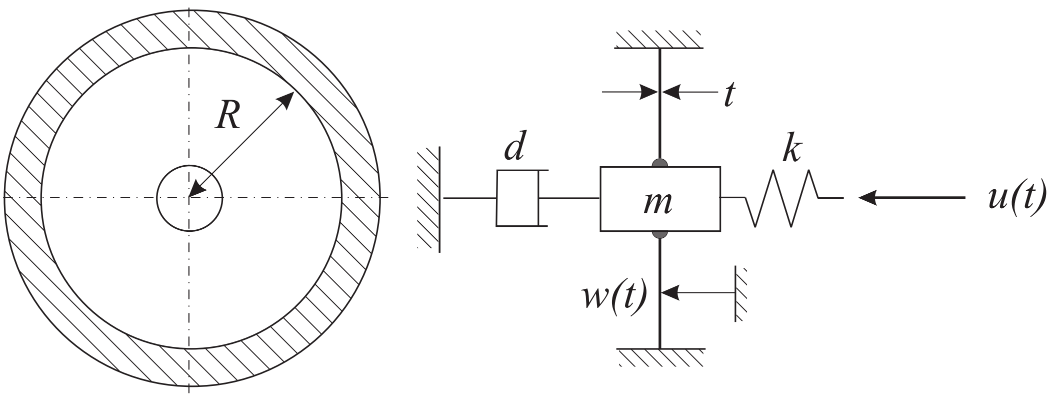
b) Bei welcher Drehzahl des Motors wird die Amplitude $\hat{w}$ der Schwingung am größten, und welchen Wert nimmt sie an?

c) Welchen Drehzahlbereich muss man wählen, damit unter Vernachlässigung der vorhandenen Dämpfung die Amplitude $\hat{w} \geq \hat{u}$ bleibt?

Geg.: $m = 30$ kg ; $k = 1 \, \frac{\text{kN}}{\text{m}}$; $EI = 18 \, \text{Nm}^2$; $L = 0,6$ m ; $d = 60 \, \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$
$\hat{u} = 10$ mm

Aufgabe 3.3.4 - 6

Zur Ermittlung des Schwingungsverhaltens einer Kraftmesszelle soll das gezeichnete Ersatzsystem verwendet werden. Die Kraftmesszelle besteht aus einer Masse m, die in einer masselosen Kreisplatte (Radius R, Dicke t, Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν) aufgehängt ist, einem Dämpferelement (Dämpferkonstante d), in dem die Gesamtdämpfung des Systems zusammengefasst ist, und einem Federelement (Federkonstante k). Die Anregung des Systems erfolgt über das Federelement.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad.

b) Bei welcher Erregerkreisfrequenz wird die Amplitude der Schwingung am größten, und welchen Wert nimmt sie an?

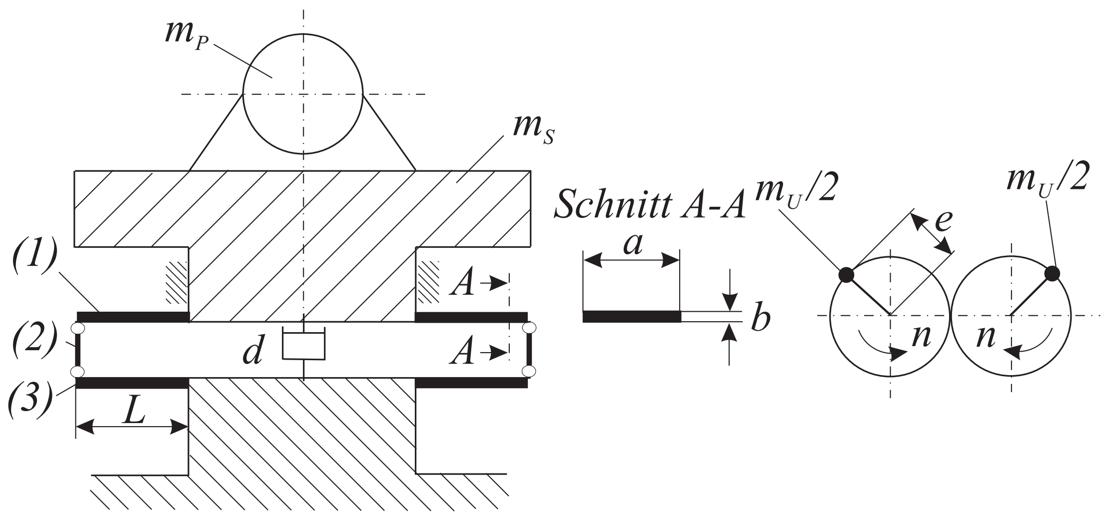
c) Welcher Frequenzbereich muss zur Erfüllung von $\hat{w} \leq 0,25 \cdot \hat{u}$ vermieden werden?

Geg.: $m = 0,1$ kg ; $E = 2,1 \cdot 10^5 \, \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$; $\nu = 0,3$; $k = 200 \, \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 100 \, \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $R = 40$ mm
$u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$; $\hat{u} = 4$ mm ; $t = 0,5$ mm

(Hinweis: Die Kreisplatte kann als Kreisplatte ohne Bohrung betrachtet werden!)

Aufgabe 3.3.4 - 7

Das unten gezeichnete System ist das Modell eines Schwingtisches. Die elastische Abstützung erfolgt über zwei an ihm eingespannte Rechteckfedern (1) (Breite a, Höhe b, Länge L), die sich über zwei starre Lenker (2) auf zwei entsprechenden im Fundament starr eingespannten Rechteckfedern (3) abstützen. Alle vier Federn haben gleiche Abmessungen. Die Anschlüsse zwischen den Lenkern und den Federn können als gelenkig betrachtet werden. Die Gesamtdämpfung des Systems wird durch einen Dämpfer (Dämpferkonstante d), der in der Systemmitte angebracht ist, erfasst. Die Masse des Schwingtisches beträgt m_S, die des auf dem Schwingtisch aufgespannten Prüfkörpers m_P. Das System wird durch zwei in der Systemmitte angebrachte Schwungscheiben, die im Abstand e die Unwuchtmasse $m_U/2$ tragen und mit der Drehzahl n rotieren, erregt.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad.

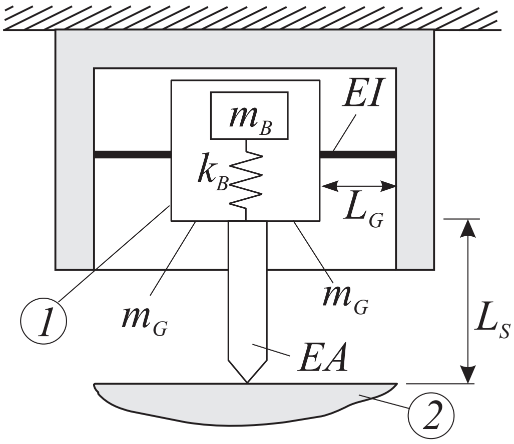
b) Wie groß ist die maximale Amplitude der sich einstellenden Schwingung des Schwingtisches?

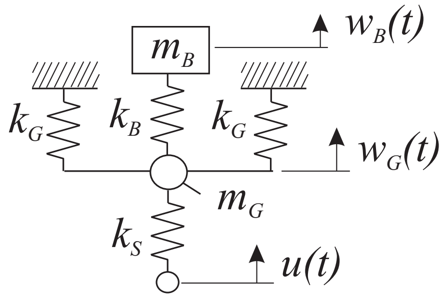
c) Mit welcher Drehzahl müssten die Unwuchtmassen rotieren, um die größtmögliche Amplitude der Schwingung zu erzielen ?

Geg.: $E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$; $m_S = 36$ kg ; $m_P = 3$ kg ; $m_U = 1$ kg ; $d = 300 \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$
$L = 180$ mm ; $e = 40$ mm ; $n = 320 \frac{1}{\mathrm{min}}$; $a = 60\,\mathrm{mm}$; $b = 4\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.3.4 - 8

Zur Schwingungsmessung an Getriebeblöcken wird das dargestellte Messsystem verwendet. Dabei wird ein seismischer Aufnehmer (1) (seismische Masse m_B, Gehäusemasse m_G, Federsteifigkeit k_B), der über zwei Blattfedern (Biegesteifigkeit EI, Länge L_G) an einem ortsfesten Rahmen befestigt ist, über einen masselosen Taststift (Längssteifigkeit EA, Länge L_S) auf die Getriebeoberfläche (2) gedrückt. Die Getriebeoberfläche führt harmonische Schwingungen $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$ aus. Ein mechanisches Ersatzmodell des Systems ist der rechtsstehenden Skizze zu entnehmen.





a) Zeichnen Sie jeweils ein Freikörperbild der seismischen Masse m_B und der Gehäusemasse m_G und stellen Sie jeweils den Impulssatz für die beiden Massen auf.

b) Wie lautet die Bewegung w_G des Gehäuses bei vernachlässigter Masse $m_G = 0$ in Abhängigkeit von u und w_B?

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der seismischen Masse m_B auf.

d) Stellen sie die erzwungene Schwingungsamplitude über der Erregerfrequenz dar.

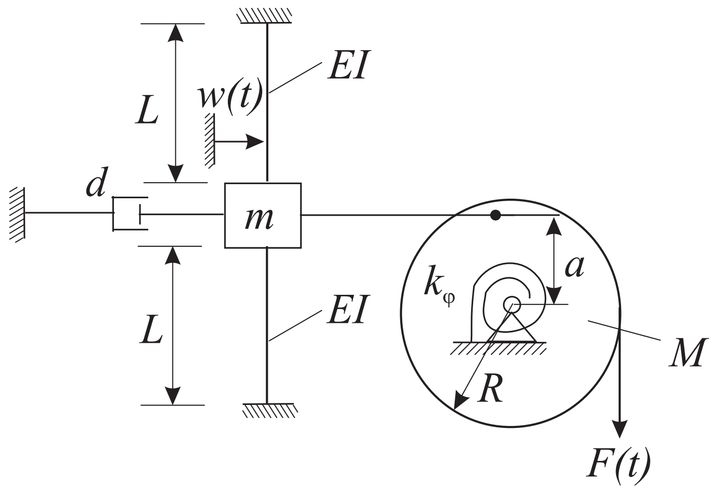
e) Im Arbeitsbereich des Messsystems soll die Abweichung der Amplitude der seismischen Masse weniger als 10 % der Erregeramplitude betragen. Ermitteln Sie den Arbeitsbereich.

Geg.: $L_S = 100\,\text{mm}$; $L_G = 20\,\text{mm}$; $m_B = 0,1\,\text{kg}$; $k_B = 10\,\frac{\text{kN}}{\text{mm}}$; $\hat{u} = 2\,\text{mm}$

$EA = 1500\,\text{kN}$; $EI = 1400\,\text{kNmm}^2$

Aufgabe 3.3.4 - 9

In dem dargestellten System ist eine Masse m zwischen zwei Biegefedern (Biegesteifigkeit EI, Länge L) gelagert. An der Masse ist ein Dämpfer (Dämpferzahl d) befestigt und ein masseloser starrer Stab gelenkig angebracht, der ebenfalls gelenkig in einer Scheibe (Radius R, Masse M) im Abstand a zum Drehpunkt endet. Die Scheibe ist mittig über eine Drehfeder (Drehfederzahl k_φ) gelagert. Eine harmonisch oszillierende Kraft $F(t) = \hat{F} \cos \Omega t$ greift wie dargestellt am Außenrand der Scheibe an.



a) Ermitteln Sie die Ersatzfederkonstante für die Biegefedern.

b) Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Teilsysteme und stellen Sie für kleine Bewegungen die Bewegungsgleichung der Masse m auf.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad des Systems.

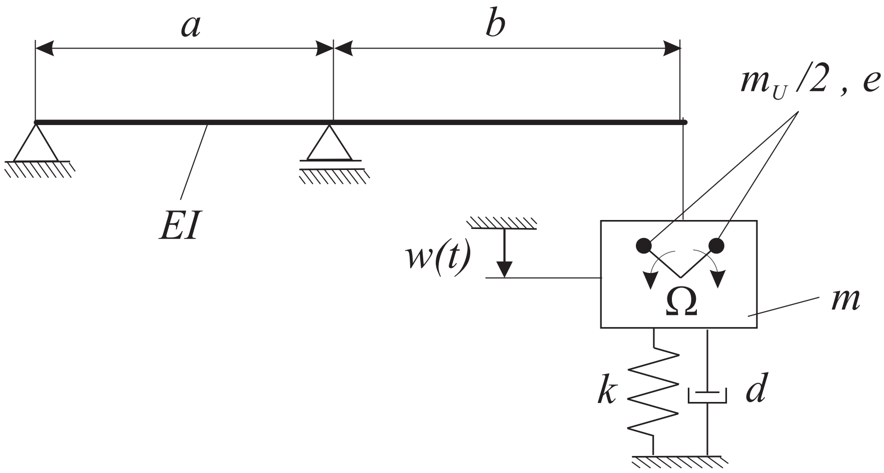
d) Berechnen Sie die maximale mögliche Amplitude und die zugehörige Erregerkreisfrequenz Ω.

Geg.: $EI = 1 \cdot 10^8\,\text{Nmm}^2$; $k_\varphi = 8\,\text{Nm}$; $d = 200\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $L = 0,5\,\text{m}$; $m = 10\,\text{kg}$

$M = 30\,\text{kg}$; $a = \frac{1}{2}L$; $R = \frac{3}{4}L$; $\hat{F} = 100\,\text{N}$

Aufgabe 3.3.4 - 10

Das dargestellte System wird durch eine Maschine (Masse m), in der sich zwei Restunwuchten (Unwuchtmassen $m_u/2$, Exzentrizität e) befinden, zu Schwingungen angeregt. Die Maschine hängt an einem masselosen Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge $a + b$), der auf zwei Stützen gelagert ist. An der Unterseite ist die Maschine durch eine Feder (Federzahl k) und über einen Dämpfer (Dämpferzahl d) an die Umgebung angebunden.



a) Ermitteln Sie die Ersatzfederkonstante für den Balken.

b) Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Maschine und stellen Sie die Bewegungsgleichung für das System auf.

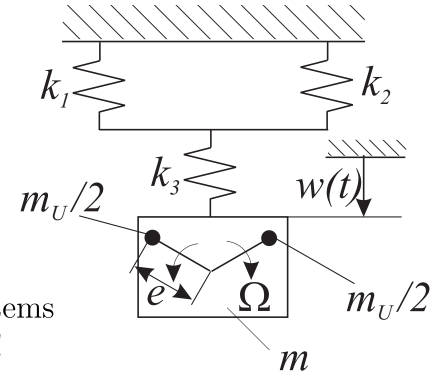
c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad des Systems.

d) Berechnen Sie die maximale mögliche Amplitude und die zugehörige Erregerkreisfrequenz Ω.

Geg.: $EI = 5 \cdot 10^5\,\mathrm{Nmm}^2$; $k = 25,6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $d = 320\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $m = 100\,\mathrm{kg}$

$m_U = 1\,\mathrm{kg}$; $a = 35\,\mathrm{mm}$; $b = 40\,\mathrm{mm}$; $e = 2,5\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.3.4 - 11



Das nebenstehende mechanische System (Gesamtmasse m) wird durch einen unwuchtigen Motor (Unwuchtmassen m_u, Exzentrizität e) zu vertikalen Schwingungen angeregt. Aus konstruktiven Gründen darf das System keine Ausschläge über einen zulässigen Bereich w_{max} (gemessen aus der Gleichgewichtslage) hinaus ausführen.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz!

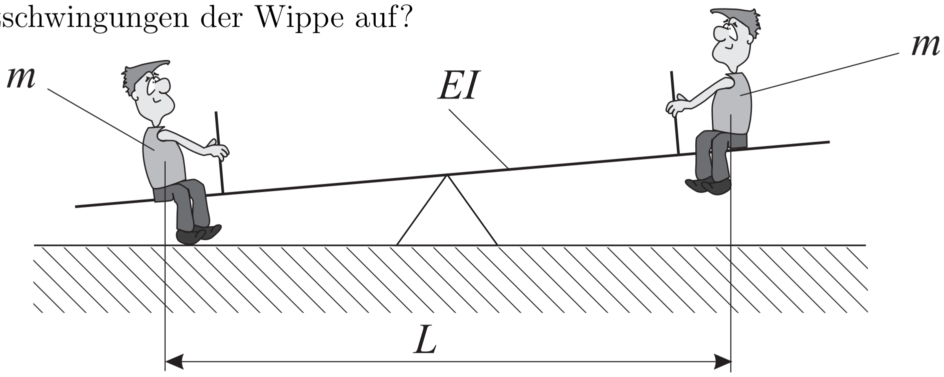
b) Welcher Drehzahlbereich ist entsprechend der Aufgabenstellung zu meiden?

Geg.: $m = 5$ kg ; $m_u = 1$ kg ; $e = 0,6$ mm ; $w_{max} = 10$ mm ; $k_1 = 10\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $k_2 = 20\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$
$k_3 = 30\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

3.3.5 Periodische Anregung

Aufgabe 3.3.5 - 1

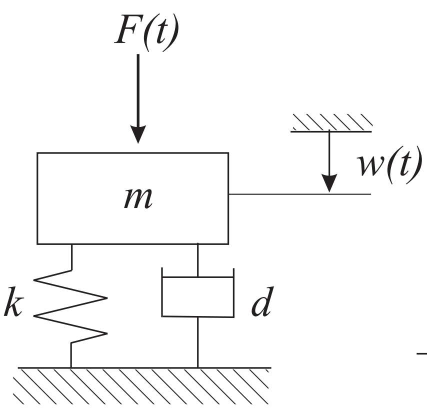
Eine Kinderwippe besteht aus einem in der Mitte gelenkig gelagerten Brett (Länge L, Biegesteifigkeit EI), das als masselos angenommen werden kann. Zwei Kinder (Masse jeweils m) bewegen die Wippe durch Abstoßen auf dem Boden hin und her, wobei für eine vollständige Periode die Zeit T_w verstreicht. Für welche Periodendauer T_w treten Resonanzschwingungen der Wippe auf?

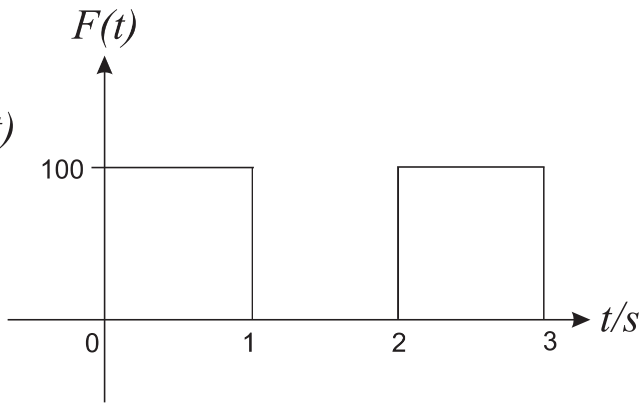


Geg.: $L = 6$ m ; $EI = 14200\,\text{Nm}^2$; $m = 40$ kg

Aufgabe 3.3.5 - 2

An einer Plattform der Masse m, die auf einer Feder (Federkonstante k) und einem Dämpfer (Dämpferzahl d) gelagert ist, greift durch einen Verladevorgang eine periodische Rechteckerregung $F(t)$ an. Berechnen und zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Antwort $w(t)$ unter Berücksichtigung der ersten fünf Glieder der FOURIER-Reihe.

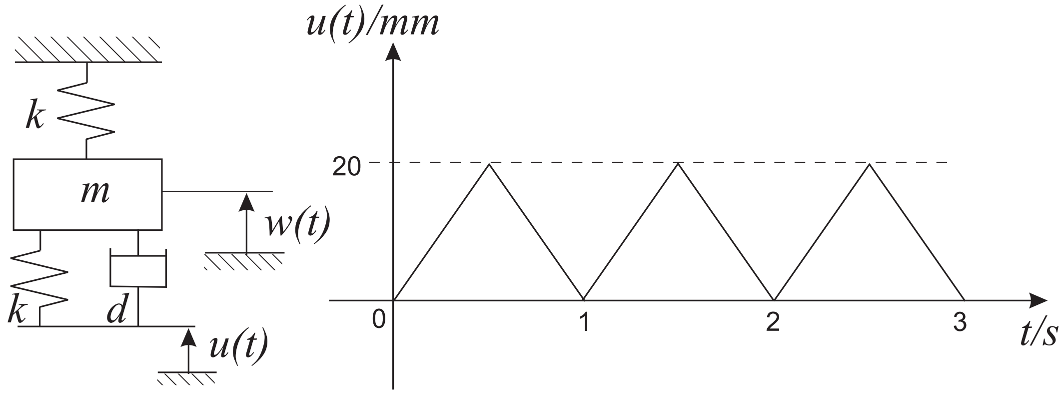




Geg.: $k = 10\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 150\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $m = 100$ kg

Aufgabe 3.3.5 - 3

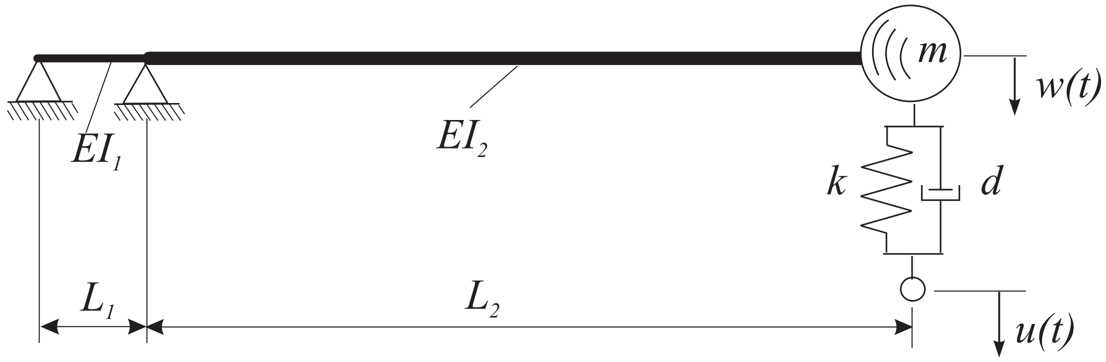
An dem gezeichneten schwingungsfähigen System (Masse m, Dämpferzahl d, Federzahl k) greift am Feder-Dämpfer-Fußpunkt die gezeichnete periodische Erregung $u(t)$ an. Beschreiben Sie die sich einstellende Bewegung der Masse m.



Geg.: $k = 10\ \frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $m = 100$ kg ; $d = 400\ \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Aufgabe 3.3.5 - 4

Ein masseloser Kragbalken (Länge L_2, Biegesteifigkeit EI_2) ist an seinem linken Ende über einen weiteren Balken (Länge L_1, Biegesteifigkeit EI_1) elastisch gelagert. An seinem rechten Ende befindet sich ein Massepunkt (Masse m), der über eine Feder und einen Dämpfer (Federsteifigkeit k, Dämpferzahl d) zu Schwingungen angeregt wird. Bei der Erregung handelt es sich um eine periodische Wegfunktion $u(t) = u_0 + \hat{u}_1 \cos \Omega_0 t + \hat{u}_2 \cos 2\Omega_0 t$, die über den Fußpunkt der Feder und des Dämpfers eingeleitet wird.



a) Berechnen Sie eine Ersatzfederkonstante für den elastisch eingespannten Kragbalken.

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems und den Dämpfungsgrad.

c) Berechnen Sie die Resonanzstellen für die gegebene Anregung.

d) Geben Sie die erzwungene Schwingungsantwort an und berechnen Sie alle dazu nötigen Größen.

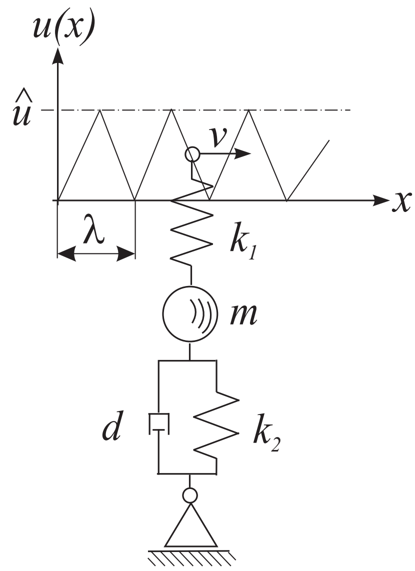
Geg.: $m = 5\,\text{kg}$; $k = 10\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 200\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $\Omega_0 = 35\,\frac{1}{\text{s}}$; $EI_1 = 10 \cdot 10^7\,\text{Nmm}^2$

$EI_2 = 6 \cdot 10^{11}\,\text{Nmm}^2$; $L_1 = 30\,\text{mm}$; $L_2 = 1000\,\text{mm}$; $u_0 = 5\,\text{mm}$

$\hat{u}_1 = 3\,\text{mm}$; $\hat{u}_2 = 2\,\text{mm}$

Aufgabe 3.3.5 - 5

Gegeben ist ein Massepunkt (Masse m), der über eine Feder (Federzahl k_2) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) wie dargestellt durch ein horizontal verschiebliches Lager an die Umgebung angebunden ist. Oben an der Masse befindet sich eine Feder (Federzahl k_1), deren Ende in einer Führung läuft. Bei der Führungsbahn handelt es sich um einen dreieckigen Verlauf mit der Periodendauer λ = 1 cm und einer Amplitude $\hat{u}$ = 5 mm. Das gesamte System bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v in horizontaler Richtung. Dabei bewegt sich der Federfußpunkt gemäß der Führungsbahn auf und nieder.



a) Ermitteln Sie die Erregerfunktion $u(t)$ als Funktion der Zeit. Entwickeln Sie anschließend die Erregerfunktion in eine FOURIER-Reihe und geben Sie die FOURIER-Koeffizienten an.

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

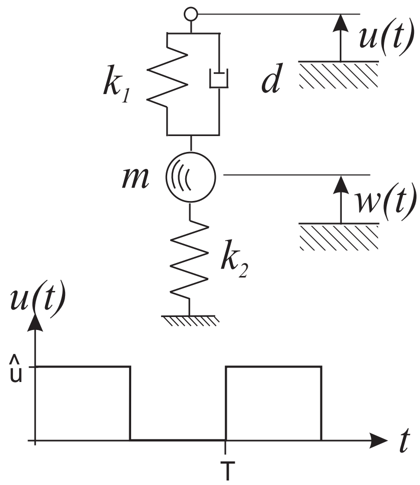
c) Geben Sie die erzwungene Schwingung der Masse m an und berechnen Sie alle Größen der dritten von Null verschiedenen Harmonischen.

Geg.: $\hat{u} = 5\,\text{mm}$; $\lambda = 1\,\text{cm}$; $v = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $k_1 = 1/2\ k_2$; $k_2 = 100\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 100\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

$m = 5\,\text{kg}$

Aufgabe 3.3.5 - 6

Gegeben ist ein Massenpunkt (Masse m), der über eine Feder (Federzahl k_2) an die Umgebung angebunden ist. Des Weiteren befindet sich an der Masse eine Feder (Federzahl k_1) und ein Dämpfer (Dämpferzahl d), deren Ende durch eine Wegerregung $u(t)$ auf und ab bewegt wird. Bei der Wegerregung handelt es sich um einen rechteckigen Verlauf mit der Periodendauer T und der Amplitude $\hat{u}$.



a) Entwickeln Sie die Funktion der Wegerregung $u(t)$ in eine FOURIER-Reihe und geben Sie die ersten 5 FOURIER-Koeffizienten an.

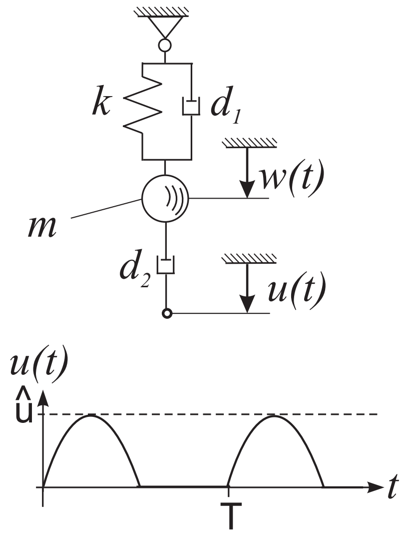
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad.

c) Berechnen Sie die Amplitude der ersten Harmonischen der erzwungenen Schwingungsantwort der Massen.

Geg.: $\hat{u} = 5\,\text{mm}$; $T = 0{,}05\,\text{s}$; $m = 10\,\text{kg}$; $k_1 = 2000\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $k_2 = 500\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d = 100\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

Aufgabe 3.3.5 - 7

Gegeben ist ein Massenpunkt (Masse m), der über eine Feder (Federzahl k) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d_1) an die Umgebung angebunden ist. An der Masse befindet sich ein Dämpfer (Dämpferzahl d_2), dessen Ende durch eine Wegerregung $u(t)$ auf und ab bewegt wird. Bei der Funktion der Wegerregung handelt es sich um eine periodische halbsinusförmige Funktion mit der Periodendauer T und der Amplitude $\hat{u}$.



a) Entwickeln Sie die Funktion der Wegerregung $u(t)$ in eine FOURIER-Reihe und geben Sie die ersten 4 FOURIER-Koeffizienten an.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz und den Dämpfungsgrad.

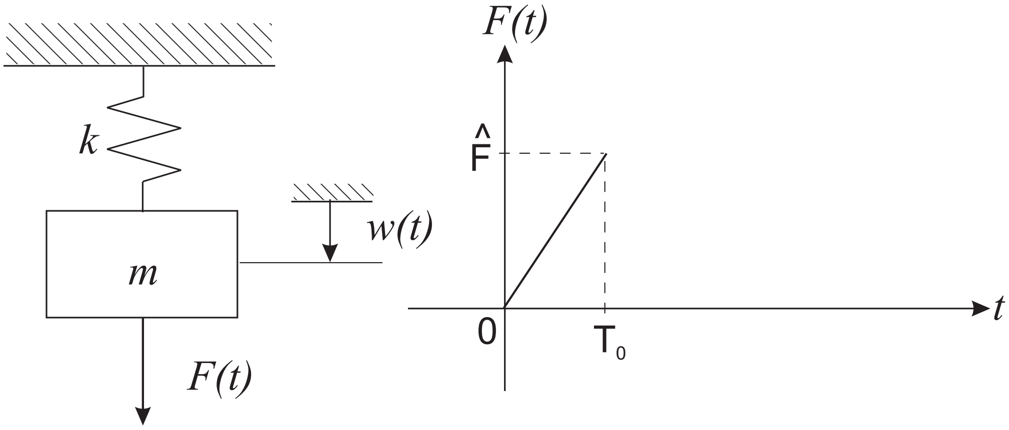
c) Berechnen Sie die Amplitude der ersten Harmonischen der erzwungenen Schwingungsantwort.

Geg.: $\hat{u} = 10\,\text{mm}$; $T = 1\,\text{s}$; $m = 20\,\text{kg}$; $k = 3000\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$; $d_1 = 100\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $d_2 = 200\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

3.3.6 Nichtperiodische Anregung

Aufgabe 3.3.6 - 1

Das gezeichnete ungedämpfte Feder-Masse-System wird durch eine dreiecksförmige Kraft zu Schwingungen angeregt.

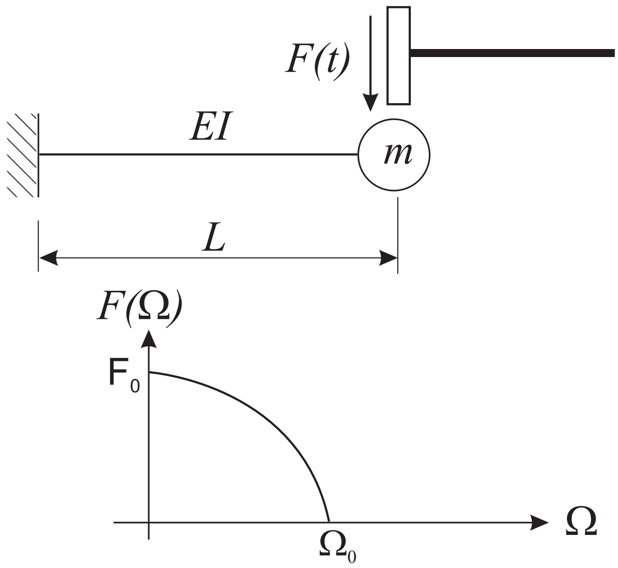


Berechnen Sie die Antwort des Systems im Zeit- und Frequenzbereich.

Geg.: T_0 ; $\hat{F}$

Aufgabe 3.3.6 - 2

In einem Schwingungsversuch wird ein masseloser Kragbalken (Länge L, Biegesteifigkeit EI) mit einer Einzelmasse (Masse m) durch einen Impulshammer zu Schwingungen angeregt. Das Erregerspektrum des Hammers hat den dargestellten, parabelförmigen Verlauf $\bar{F}(\Omega) = F_0(1 - \Omega^2/\Omega_0^2)$. Der Dämpfungsgrad des Systems beträgt D.



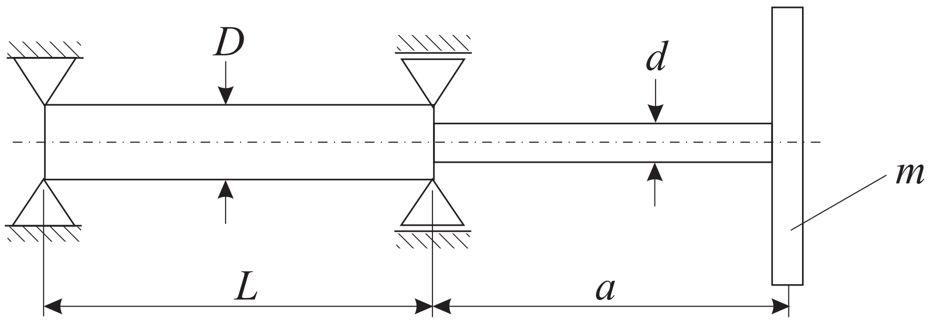
Berechnen Sie das Antwortspektrum der einsetzenden Schwingung der Masse m und stellen Sie diese graphisch dar.

Geg.: $L = 0,4\,\mathrm{m}$; $EI = 2,5\,\mathrm{Nm}^2$; $m = 0,1\,\mathrm{kg}$; $D = 0,1$; $F_0 = 1\,\mathrm{N}$; $\Omega_0 = 50\,\mathrm{s}^{-1}$

3.3.7 Technische Anwendungen

Aufgabe 3.3.7 - 1

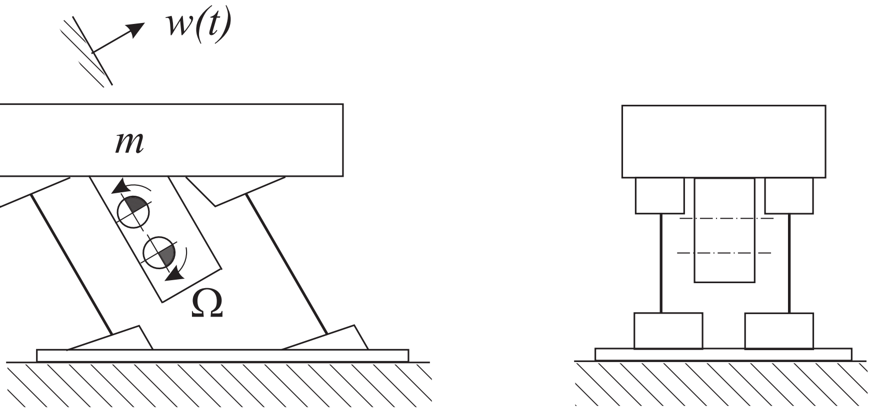
Der Läufer einer Kreiselpumpe kann durch das skizzierte Ersatzmodell dargestellt werden. Es besteht aus zwei Wellenabschnitten der Längen L und a mit den jeweiligen Durchmessern D und d und einer starren Masse m. Welche biegekritische Drehzahl hat der Läufer?



Geg.: $a = 120$ mm ; $L = 175$ mm ; $D = 8$ mm ; $d = 4$ mm
$m = 0,17$ kg ; $E = 2,1 \cdot 10^5 \ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 3.3.7 - 2

Die gezeichnete Schwingförderrinne (Masse m, Eigenkreisfrequenz ω_0) wird durch zwei um 180° versetzte gleichgroße und gegenläufig mit der Drehzahl n angetriebene Unwuchtmassen zu Schwingungen angeregt. Der Abstand der Unwuchtmassen von der Drehachse beträgt e. Die Amplitude der Schwingungen soll $\hat{w}$ betragen. Dämpfung ist vernachlässigbar.



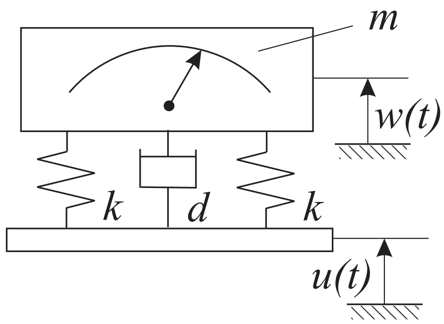
a) Wie ist die Gesamtfederkonstante k der vier parallelen Blattfedern zu wählen?

b) Welche Gesamtunwuchtmasse m_U ist zum Erreichen der vorgeschriebenen Amplitude erforderlich?

Geg.: $m = 90$ kg ; $n = 960\,\mathrm{min}^{-1}$; $e = 30$ mm ; $\hat{w} = 2$ mm ; $\omega_0 = 30\,\mathrm{s}^{-1}$

Aufgabe 3.3.7 - 3

Ein Messgerät (Masse m) ist über zwei Federn (Federkonstante jeweils k) und einen Dämpfer (Dämpferkonstante d) auf einer starren Platte befestigt. Die Platte wird gemäß $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$ harmonisch bewegt.



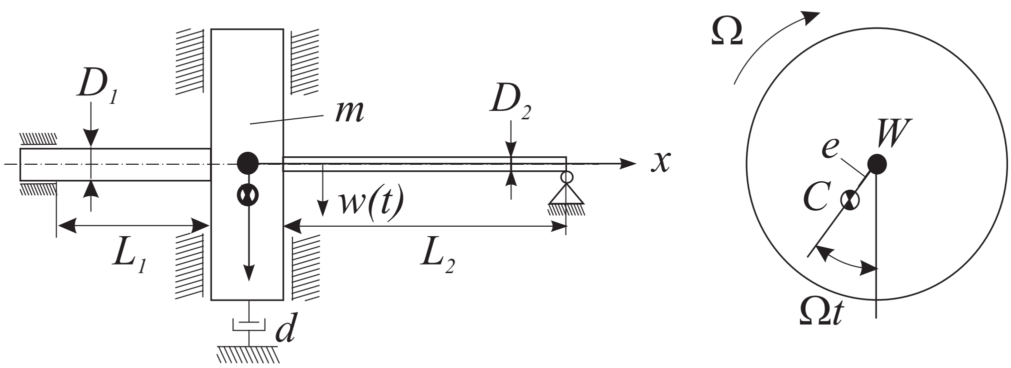
a) Wie groß ist für die gegebenen Parameter die maximale Beschleunigung des Messgerätes in eingeschwungenem Zustand?

b) Welche Wertebereiche sind für die Federsteifigkeiten k und die Dämpferkonstante d im Hinblick auf einen möglichst störungsfreien Betrieb des Messgerätes zu wählen?

Geg.: $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $d = 17{,}89\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $m = 4$ kg ; $\hat{u} = 0{,}09$ mm ; $\Omega = 3\,\mathrm{s}^{-1}$

Aufgabe 3.3.7 - 4

Der Läufer eines Axiallüfters besteht aus zwei Wellenabschnitten der Längen L_1 und L_2 mit den jeweiligen Durchmessern D_1 und D_2 und einer starren Scheibe (Masse m). Durch die Abdichtung des Lüfterlaufrades ist eine Dämpfung (Dämpferzahl d) zu berücksichtigen. Der Schwerpunkt C des Lüfterlaufrades weicht um die Schwerpunktsexzentrizität e von dem Wellendurchstoßpunkt W ab, wodurch eine Unwucht entsteht, die den Läufer zu Schwingungen anregt.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Wellendurchstoßpunkt W in z-Richtung auf.

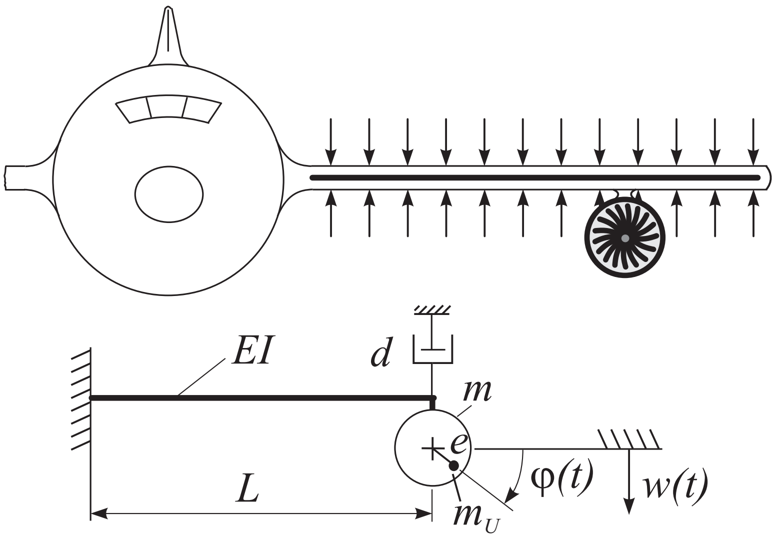
b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

c) Wie groß ist die maximale Schwingungsamplitude für den gedämpften Läufer und bei welcher Drehzahl tritt sie auf?

Geg.: $L_2 = 2\ L_1 = 1400\,\text{mm}$; $d = 50\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$; $e = 1\,\text{mm}$; $m = 30\,\text{kg}$
$D_1 = 2\ D_2 = 40\,\text{mm}$; $E = 2{,}1 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Aufgabe 3.3.7 - 5

Zur Beurteilung der ersten Biegeschwingung der Tragflächen eines Flugzeuges können diese durch das skizzierte Ersatzsystem einer Tragfläche approximiert werden. Dazu wird die Tragfläche als masseloser biegesteifer Balken (Biegesteifigkeit EI=konst.) modelliert, an dem die Turbine als Massepunkt m im Abstand L zum Rumpf befestigt ist. Die Unwucht der Turbine wird durch die Unwuchtmasse m_U und die Exzentrizität e berücksichtigt, wobei die Unwuchtmasse mit konstanter Drehzahl n der Turbine rotiert. Die Umgebungsluft wirkt sich dämpfend auf die Biegeschwingungen aus, so dass sie durch einen viskosen Dämpfer (Dämpferzahl d), der ebenfalls im Abstand L angreift, approximiert werden kann.



a) Beschreiben Sie die vertikale Komponente der Unwuchtkraft und stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Turbine in $w(t)$ auf.

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad.

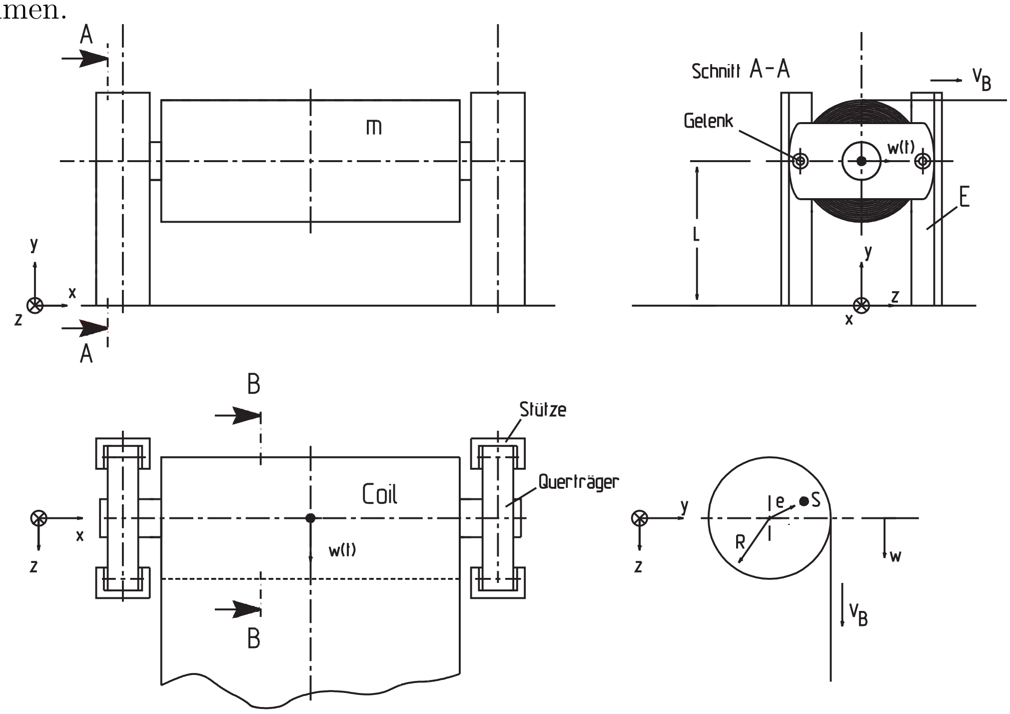
c) Handelt es sich bei der Drehzahl n der Turbine um einen unter- oder überkritischen Betrieb? Berechnen Sie die zugehörige Schwingungsamplitude.

d) Welcher Drehzahlbereich ist zu vermeiden, wenn die Schwingungsamplitude kleiner als $\hat{w}_{\max}$ sein soll (die Dämpfung kann dabei vernachlässigt werden).

Geg.: $d = 100\,\frac{\text{kNs}}{\text{m}}$; $\hat{w}_{\text{max}} = 1\,\text{mm}$; $n = 5000\,\frac{1}{\text{min}}$; $L = 4000\,\text{mm}$
$E = 2,1 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$; $I = 9 \cdot 10^9\,\text{mm}^4$; $m = 2000\,\text{kg}$; $m_U = 3\,\text{kg}$
$e = 2\,\text{mm}$

Aufgabe 3.3.7 - 6

Von einem Coil (Blechbandwalze) mit der Masse m und dem Radius R wird ein dünnes Blechband mit der Geschwindigkeit v_B abgewickelt. Das Coil wird in zwei starren Querträgern (Höhe über dem Boden L) gelagert, die wiederum gelenkig an vier masselosen, biegeelastischen Stützen (Biegesteifigkeit jeweils EI) befestigt sind. Die Unwucht des Coils, beschrieben durch die Exzentrizität e, regt das gesamte System in z-Richtung zu Schwingungen an. Die Dämpfung des Systems wird mit einem Dämpfungsgrad D angenommen.



a) Ermitteln Sie eine Ersatzfederkonstante für die vier Stützen.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Blechbandes, bei der Resonanz auftritt.

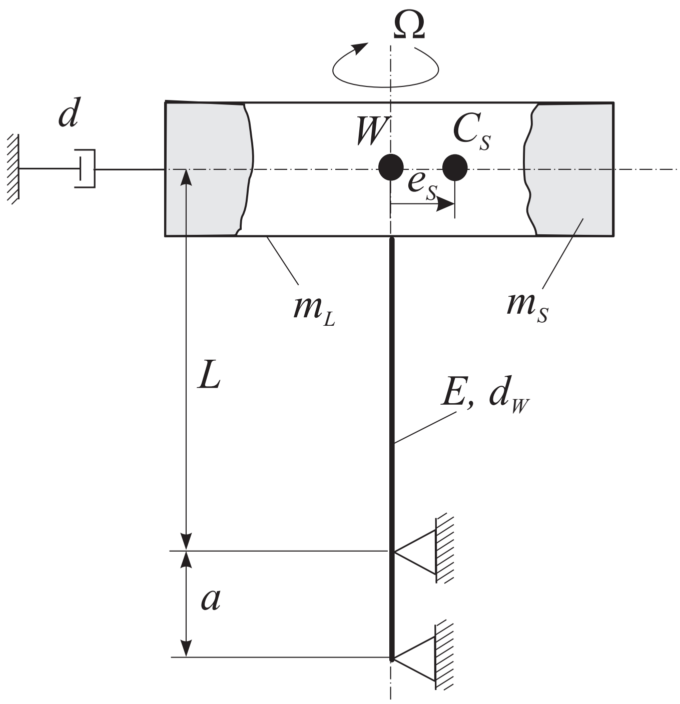
c) Wie groß ist die Amplitude des Walzenmittelpunktes bei $v_B = 1.7\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

d) Wie groß wird die Amplitude des Walzenmittelpunktes, wenn die Geschwindigkeit des Blechbandes sehr groß wird?

Geg.: $EI = 100\text{Nm}^2$; $L = 2\,\text{m}$; $R = 1\,\text{m}$; $e = 2\,\text{mm}$; $m = 600\,\text{kg}$
$v_B = 1.7\frac{\text{km}}{\text{h}}$; $D = 0.1$

Aufgabe 3.3.7 -7

Die dargestellte Zentrifuge besteht aus einem Laufrad (Masse m_L), das über eine Welle (Durchmesser d_W, freie Länge L, Lagerabstand a) gelagert ist. Das zu trennende Schüttgut (Masse m_S) verteilt sich in dem Laufrad nicht ganz achssymmetrisch, so dass eine Exzentrizität e_S verbleibt. Die Dämpfung des Systems wird durch einen viskosen Dämpfer approximiert, der dem System einen Dämpfungsgrad D gibt.



a) Berechnen Sie eine Ersatzfederzahl für die gelagerte Welle.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Laufradmittelpunktes W in horizontaler Richtung auf.

c) Berechnen Sie die biegekritische Drehzahl und die zugehörige Schwingungsamplitude des Laufradmittelpunktes.

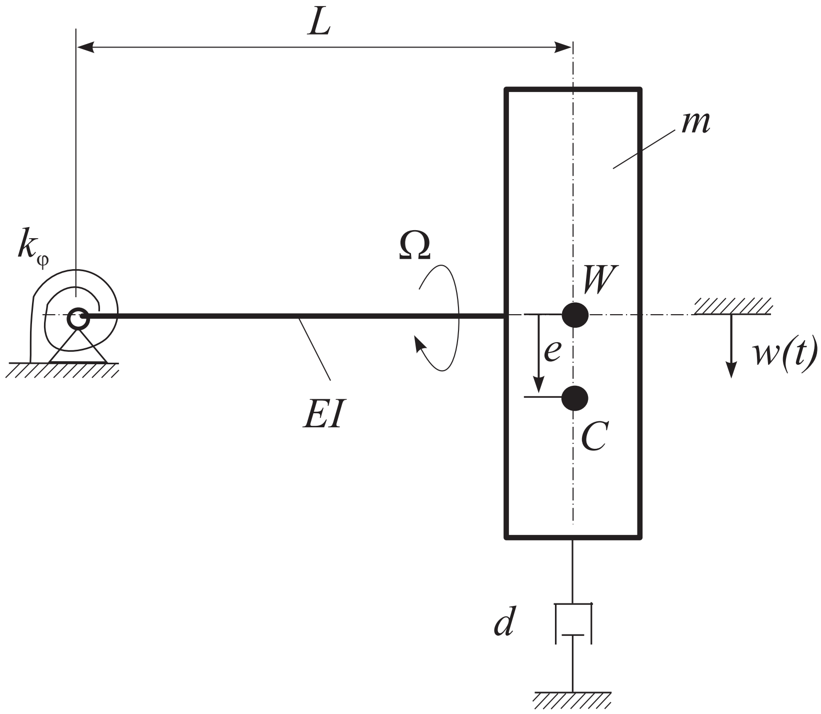
d) Stellen sie die erzwungene Schwingungsamplitude über der Drehzahl dar und zeichnen Sie die wichtigsten Parameter ein.

Geg.: $D = 0,1$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \, \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$; $d_W = 40\,\text{mm}$; $e_S = 4\,\text{mm}$; $m_S = 5\,\text{kg}$

$m_L = 3\,\text{kg}$; $a = 50\,\text{mm}$; $L = 400\,\text{mm}$

Aufgabe 3.3.7 - 8

Der dargestellte Radialverdichter besteht aus einem Laufrad (Masse m), dessen Schwerpunkt C um die Exzentrizität e gegenüber dem Laufradmittelpunkt W verschoben ist. Das Laufrad ist über eine masselose, biegeelastische Welle (Biegesteifigkeit EI, Länge L) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) gelagert. Die Welle ist über eine Drehfeder (Federsteifigkeit k_φ) an die Umgebung angebunden. Der Radialverdichter rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω.



a) Berechnen Sie eine Ersatzfederzahl für die Welle mit Drehfeder.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Laufradmittelpunktes W für kleine Schwingungen $w(t)$ auf.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Rotors und den Dämpfungsgrad.

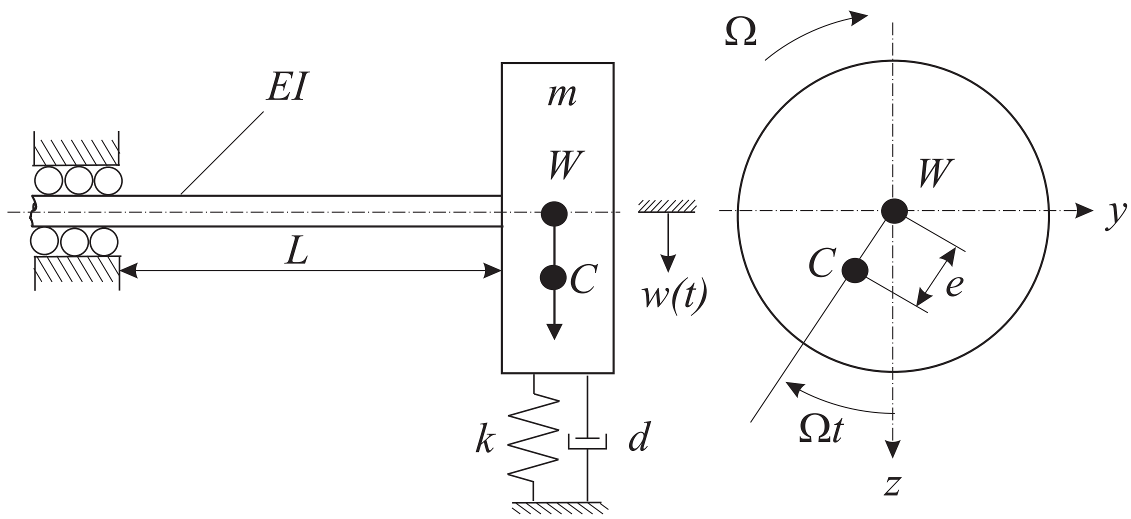
d) Welcher Drehzahlbereich ist zu vermeiden, wenn die Schwingungsamplitude kleiner als $\hat{w}$ bleiben soll (die Dämpfung kann dabei vernachlässigt werden)?

Geg.: $EI = \frac{100}{3}\,\text{kNm}^2$; $k_\varphi = \frac{EI}{L}$; $e = 2\,\text{mm}$; $m = 20\,\text{kg}$; $d = 200\,\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

$\hat{w} = 4\,\text{mm}$; $L = 500\,\text{mm}$

Aufgabe 3.3.7 - 9

Gegeben ist ein Rotor (beschrieben in einem raumfesten y, z-Koordinatensystem) zum Mischen von Fluiden. Der Rotor besteht aus einem masselosen Wellenabschnitt (Biegesteifigkeit EI, Länge L, Durchmesser D) und einer starren Scheibe (Masse m). Die Welle des Rotors ist in zwei dicht benachbarten Kugellagern gelagert. Es sollen die Biegeschwingungen des Rotors untersucht werden. Dazu kann die Lagerung des Rotors als feste Einspannung betrachtet werden. An der Scheibe ist das Rührwerk durch eine Dichtung an das Gehäuse gekoppelt. Diese Kopplung wird durch einen Dämpfer (Dämpferzahl d) und durch eine Feder (Federzahl k) approximiert. Der Schwerpunkt C der Scheibe weicht um die Exzentrizität e von dem Wellendurchstoßpunkt W ab, wodurch eine Unwucht entsteht, die den Rotor zu Schwingungen anregt.



a) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Auslenkung $w(t)$ des Wellendurchstoßpunktes W in z-Richtung und der des Schwerpunktes C der Scheibe her (Skizze!).

b) Zeichnen Sie ein Freikörperbild und stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der unter (a) hergeleiteten Beziehung für den Wellendurchstoßpunkt W in z-Richtung auf.

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad des gedämpften Systems.

d) Berechnen Sie die biegekritische Drehzahl des Rotors.

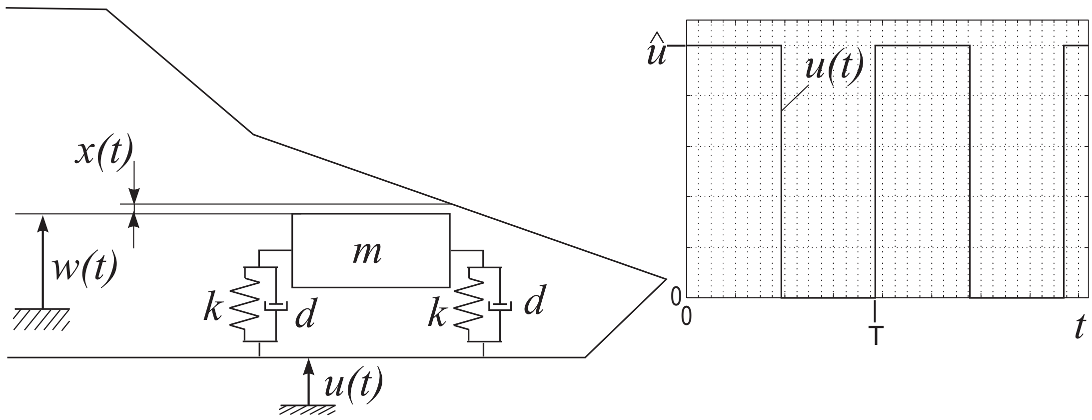
e) Für welche Erregerkreisfrequenz Ω hat die sich einstellende Amplitude ein Maximum und wie groß ist sie?

Geg.: $E = 2,1 \cdot 10^5 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$; $L = 1200\,\mathrm{mm}$; $D = 35\,\mathrm{mm}$; $e = 5\,\mathrm{mm}$

$k = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$; $d = 500\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $m = 100\,\mathrm{kg}$

Aufgabe 3.3.7 - 10

Ein PKW-Motor, dessen Vertikalschwingung durch $w(t)$ beschrieben wird, ist über zwei Schwingungsisolatoren (Federkonstanten k, Dämpferzahlen d) an den Fahrzeugrahmen angeflanscht. Die Bewegungen des Fahrzeugrahmens auf Grund von Fahrbahnunebenheiten werden durch die dargestellte periodische Funktion $u(t)$ beschrieben. Eine Anforderung an die Schwingungsisolation ist, dass der Motor nicht an angrenzende Baugruppen (z.B. Motorhaube) anschlagen soll.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung $x(t) = w(t) - u(t)$ zwischen Motor und den angrenzenden Baugruppen auf und berechnen Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz sowie den Dämpfungsgrad des Systems.

b) Entwickeln Sie die periodische Funktion $u(t)$ in eine FOURIER-Reihe und geben Sie die Amplituden und Phasen der einzelnen Harmonischen an.

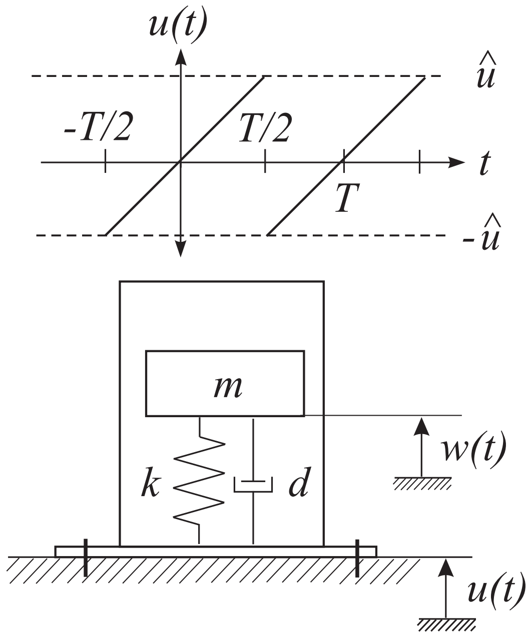
c) Beschreiben Sie die Erregerfunktion des Motors (rechte Seite der Bewegungsgleichung).

d) Ermitteln Sie die ersten 3 Resonanzstellen.

e) Wie groß sind die ersten 3 maximalen Amplituden der Relativbewegung?

Geg.: $m = 100\,\mathrm{kg}$; $k = 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $d = 5000\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$; $\hat{u} = 1\,\mathrm{mm}$; $T = 0.05\,\mathrm{s}$

Aufgabe 3.3.7 - 11



Die Eigenschaften eines piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmers können durch das nebenstehend dargestellte mechanische Ersatzmodell beschrieben werden. Darin ist eine Masse m über eine Feder (Federzahl k) und einen Dämpfer (Dämpferzahl d) an eine Struktur angebunden. Die Schwingungen der Struktur werden durch die dargestellte periodische Funktion $u(t)$ beschrieben.

a) Welcher Typ der Erregung liegt bei dem dargestellten System vor?

b) Entwickeln Sie die Funktion der Erregung $u(t)$ in eine FOURIER-Reihe und geben Sie die ersten 5 FOURIER-Koeffizienten an.

c) Zeichnen Sie ein Freikörperbild der Masse m und stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung $x(t) = w(t) - u(t)$ auf. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und den Dämpfungsgrad des gedämpften Systems.

d) Berechnen Sie die Amplitude der ersten Harmonischen der erzwungenen Schwingungsantwort der Relativbewegung $x(t)$.

Geg.: $\hat{u} = 2\,\mathrm{mm}$; $T = 3\,\mathrm{s}$; $m = 5$ g ; $k = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $d = 0{,}75\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

4 Lösungen

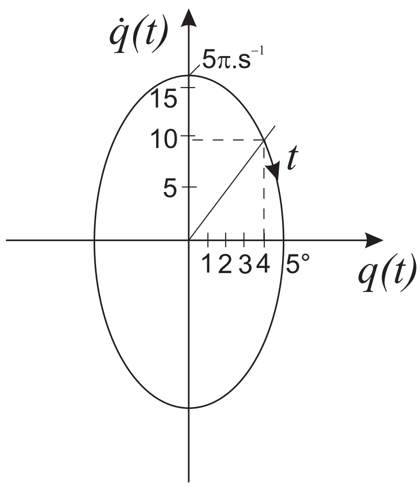
Aufgabe 1.1 - 1

a) $\hat{q}_c = 4,33° \; ; \quad \hat{q}_s = 2,5° \; ; \quad \omega = \pi \, \frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $f = 0,5 \, \frac{1}{\mathrm{s}}$

c) Ellipsengleichung:

$$\frac{q^2(t)}{\hat{q}^2} + \frac{\dot{q}^2(t)}{\hat{q}^2 \cdot \omega^2} = 1$$

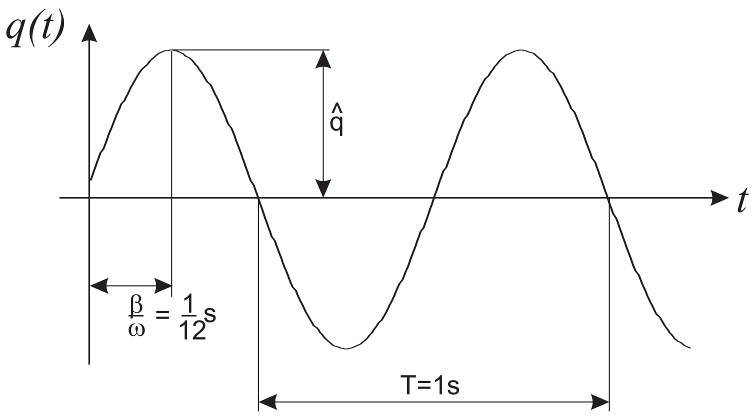


Aufgabe 1.1 - 2

a) $\hat{q} = 2 \text{ mm}$

b) $T = 1 \text{ s}$

c)



Aufgabe 1.1 - 3

a) $\hat{q}_C = \hat{q}\cos\beta = 0,809\,\mathrm{mm}$; $\hat{q}_S = \hat{q}\sin\beta = 0,588\,\mathrm{mm}$; $\omega = 31,42\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 1.2.1 - 1

a) $\vartheta = 0,693$; $D \approx 0,11$

b) $\omega_0 = 31,6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

c) $\frac{\omega_D}{\omega} = 0,994$

Aufgabe 1.2.1 - 2

a) $\vartheta = 0,3567$; $D = 0,0567$

b) $\dot{q}(t_3) = \sqrt{\dot{q}(t_1)\dot{q}(t_2)} \approx -8,367\mathrm{mm/s}$

Aufgabe 1.2.1 - 3

a) $\bar{q}_{(t)} = A \cdot e^{-D\omega t} \cdot e^{j(\omega_D t - \beta)}$

b) $A = 11,18\,\mathrm{mm}$; $\beta = -26,57°$

c) $\omega_D = 1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,707$

Aufgabe 1.2.1 - 4

a) exponentiell gedämpfte Schwingung

b) $\ddot{q} = -A\omega^2 \cdot e^{-D\omega t}\left[(1-2D^2)\cos(\omega_D t - \beta) - 2D\sqrt{1-D^2}\sin(\omega_D t - \beta)\right]$

$$\vartheta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{1}{n}\ln\frac{\ddot{q}_i}{\ddot{q}_{i+1}}$$

$$\vartheta = 0,0613 \quad ; \quad D = 0,00975 \quad ; \quad \omega_D = 62,832\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad ; \quad \omega = 62,835\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

c) $q(t=0) = -4,054\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 1.2.1 - 5

$D = 0,009713$

Aufgabe 1.2.2 - 1

a) $\tilde{D} \approx 0,119 \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \approx 3,14\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

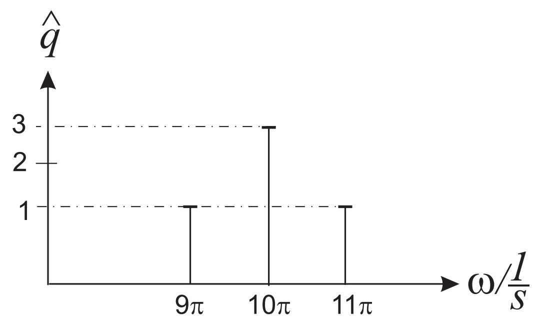
b) $g_D = 8,75\mathrm{mm} - 0,375\mathrm{mm/s} \cdot t$

c) $t_E = 23,\bar{3}\,\mathrm{s}$

Aufgabe 1.3.1 - 1

a) $m = \frac{2}{3}$; b) $\omega_T = 10\pi \approx 31,42\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

c)



Aufgabe 1.3.1 - 2

a) amplitudenmodulierte Schwingung

b) $q(t) = \hat{q}_0(1 - m\cos\omega_M t)\cos\omega_T t$

$$q(t) = \hat{q}_0\cos\omega_T t - \frac{\hat{q}_0 m}{2}\cos(\omega_T - \omega_M)t - \frac{\hat{q}_0 m}{2}\cos(\omega_T + \omega_M)t$$

$\hat{q}_0 = 20\,\mathrm{mm} \quad ; \quad m = 1 \quad ; \quad \omega_T = 500\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad ; \quad \omega_M = 50\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

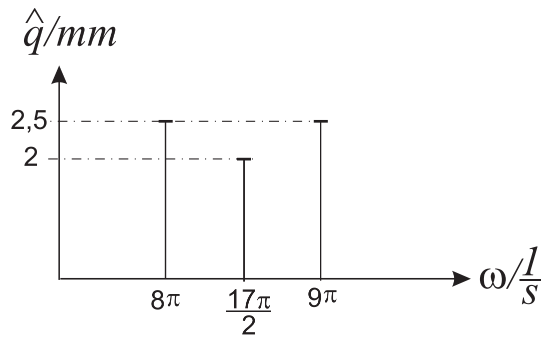
Aufgabe 1.3.1 - 3

a) amplitudenmodulierte Schwingung

b) $q(t) = \hat{q}_0(1 - m\cos\omega_M t)\cos\omega_T t$

$\hat{q}_0 = 2\,\text{mm}$; $m = -2,5$; $\omega_T = \frac{17\pi}{2}\,\frac{1}{\text{s}}$; $\omega_M = 0,5\pi\,\frac{1}{\text{s}}$

c)



Aufgabe 1.3.2 - 1

a) $m \leq 1$ b) $m = 1$

c) ω_T : linearer Zuwachs

ω_M : Frequenz der harmonischen Änderung

$m\frac{\omega_T}{\omega_M}$: max.Schwankung um den Mittelwert

d) $\omega_T = 9,26\,\frac{1}{\text{s}}$; $m = 0,89$

Aufgabe 1.3.3 - 1

a) Schwebung

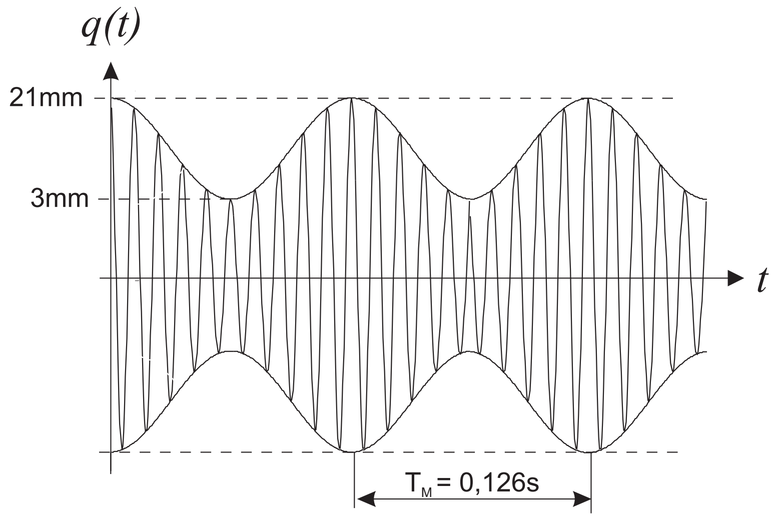
b) $q(t) = \hat{q}(t)\cos(\omega_T t - \beta(t))$

$\hat{q}(t) = \sqrt{(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + 2\hat{q}_1\hat{q}_2\cos 2\omega_M t)}$

$\tan\beta(t) = \frac{\hat{q}_2 - \hat{q}_1}{\hat{q}_2 + \hat{q}_1}\tan\omega_M t$

$\omega_T = 500\,\frac{1}{\text{s}}$; $\omega_M = 50\,\frac{1}{\text{s}}$; $T_M = \frac{2\pi}{50} \approx 0,126\,\text{s}$

c)



Aufgabe 1.3.3 - 2

a) $\omega_M = 3,06\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\omega_T = 3,93\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $\hat{q}_1 = 6,952\,\mathrm{mm}$; $\hat{q}_2 = 3,476\,\mathrm{mm}$

c) nichtmodulierte, harmonische Schwingung

Aufgabe 1.4 - 1

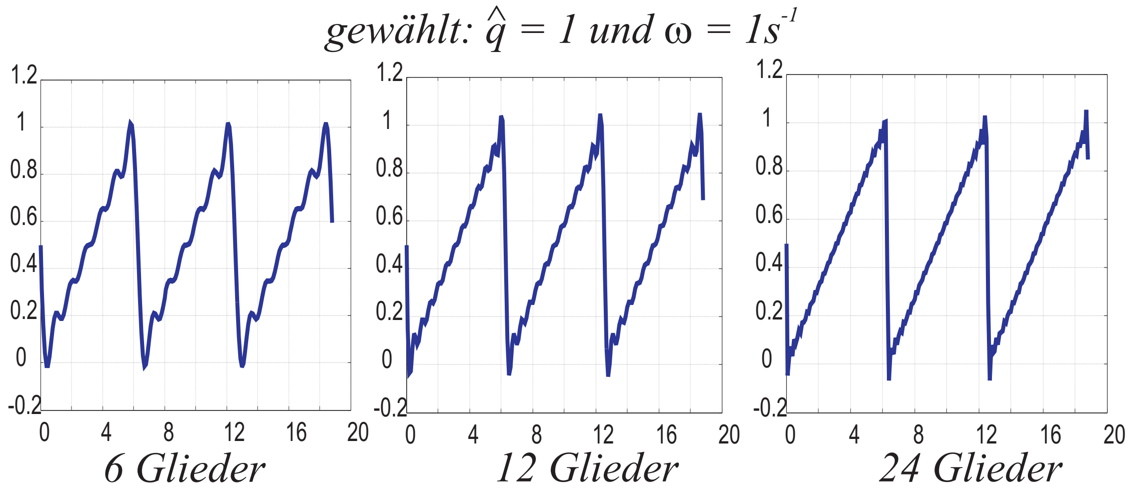
a) $\hat{\underline{q}}_\nu = \frac{\hat{q}}{4a\pi^2\nu^2}[(1 + j2a\pi\nu)e^{-j2a\pi\nu} - 1]$

b) 1. $a = 1$; $\hat{q}_{c\nu} = 0$; $\hat{q}_{s\nu} = -\frac{\hat{q}}{\pi\nu}$

2. $a = 0,5$

$$\hat{q}_{c\nu} = \begin{cases} \dfrac{-2\hat{q}}{\nu^2\pi^2} & ; \quad \nu = 1,3,5,... \\ 0 & ; \quad \nu = 2,4,6,... \end{cases}$$

$$\hat{q}_{s\nu} = \begin{cases} +\dfrac{\hat{q}}{\nu\pi} & ; \quad \nu = 1,3,5,... \\ -\dfrac{\hat{q}}{\nu\pi} & ; \quad \nu = 2,4,6,... \end{cases}$$

c) 

Aufgabe 1.4 - 2

a) $q(t) = 4\hat{q}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \quad$ für $\quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$

b) $\hat{\bar{q}}_\nu = 2\hat{q}\left[\frac{1}{\pi^2\nu^2}\cos\nu\pi - \left(\frac{1}{2\pi\nu} - \frac{1}{\pi^3\nu^3}\right)\sin\nu\pi\right]$

c) $\hat{q}_{s\nu} = 0 \quad ; \quad \hat{q}_{c\nu} = \frac{4\hat{q}}{\pi^2\ \nu^2}\cos\nu\pi$

$$q(t) = \frac{1}{3}\hat{q} - \frac{4\hat{q}}{\pi^2}\left(\cos\omega t - \frac{1}{4}\cos 2\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t - \ldots + \ldots\right)$$

Aufgabe 1.5 - 1

a) $\bar{Q}(\Omega) = \frac{\hat{q}}{2\pi T_0 \Omega^2}\left[(j\Omega T_0 + 1)\, e^{-j\Omega T_0} - 1\right]$

b) $\bar{Q}(\Omega \to 0) = \frac{\hat{q}T_0}{4\pi}$

Aufgabe 1.5 - 2

a) $\bar{Q}(\Omega) = \frac{\hat{q}}{\pi\Omega^2 T_0}\left(2e^{-j\Omega\frac{T_0}{2}} - e^{-j\Omega\frac{T_0}{2}} - 1\right)$

b) $\bar{Q}(\Omega \to 0) = \frac{\hat{q}T_0}{4\pi}$

Aufgabe 2.1.1 - 1

$$k_{ers} = \frac{3EI}{L^3} + k$$

Aufgabe 2.1.1 - 2

a) $k_\varphi = k_1 a_1^2 + k_2 (L - a_1)^2$

b) $J_O = a_2^2 m + \rho AL \left(\frac{1}{3} L^2 - La_1 + a_1^2 \right)$

Aufgabe 2.1.1 - 3

a) $k_\varphi = 540\,\mathrm{Nm}$

b) $J_0 = 1{,}5003\ \mathrm{kgm}^2$

Aufgabe 2.1.1 - 4

$$k_{ers} = \frac{(k_1 + k_2 + k_3)\,(k_4 + k_5)\,k_6}{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)\,k_6 + (k_1 + k_2 + k_3)\,(k_4 + k_5)} = 3{,}75\ \mathrm{N/m}$$

Aufgabe 2.1.2 - 1

$$k = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

Aufgabe 2.1.2 - 2

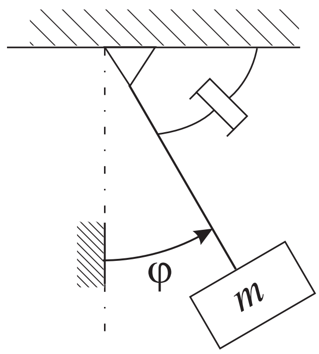
$$k_\varphi = \frac{6EI}{L}$$

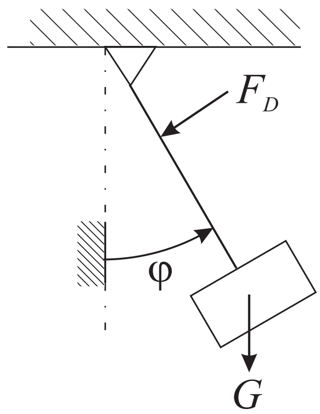
Aufgabe 2.1.2 - 3

$$-\hat{M}(x) e^{-j\varphi} = (1 + jg) EI_y \hat{w}''(x)$$

Aufgabe 2.2 - 1

a) b)





c) $\ddot{\varphi} + \frac{a^2 d}{L^2 m}\dot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$

Aufgabe 3.1.2 - 1

$\omega_0 = 10\,\frac{1}{\text{s}}$

Aufgabe 3.1.2 - 2

a) $\omega_0 = 400\,\frac{1}{\text{s}}$ b) $f = \frac{200}{\pi}\text{Hz} = 63,66$ Hz ; $T = \frac{\pi}{200}$ s$= 0,0157$ s

Aufgabe 3.1.2 - 3

a) $\frac{3}{2}m\ddot{\varphi} + k\left(\frac{a+R}{R}\right)^2 \varphi = 0$

b) $\omega_0 = 32\,\frac{1}{\text{s}}$

c) $\frac{T(a\ =\ 0)}{T(a=R)} = 2$

Aufgabe 3.1.2 - 4

a) $a_1 = 25,6774$ mm

b) $J_c = 10124\text{kg mm}^2$

Aufgabe 3.1.2 - 5

$$\omega = \sqrt{\frac{(m + 2RA\rho)g}{4r\left(m + \frac{2}{3}A\rho R\right)}}$$

Aufgabe 3.1.2 - 6

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mV_0}{\kappa p_0 A_1^2}}$$

Aufgabe 3.1.2 - 7

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi D^2 \rho g}{4m}}$$

Aufgabe 3.1.2 - 8

a) $\ddot{x} + \frac{\pi h \rho g}{m}\left(\frac{7}{3}h + 2R\right)x = 0$

b) $\omega_0 = 28,27\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.1.2 - 9

a) $\omega_0 = 7,48\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $m = 10,72\,\mathrm{kg} \quad ; \quad M = 107,76\,\mathrm{kg}$

Aufgabe 3.1.3 - 1

a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

b) $\varphi(t) = \frac{m}{(m+M)}\frac{v}{\sqrt{gL}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t - \beta\right) \qquad \beta = \frac{n\pi}{2} \qquad n = 1, 3, 5, ...$

Aufgabe 3.1.3 - 2

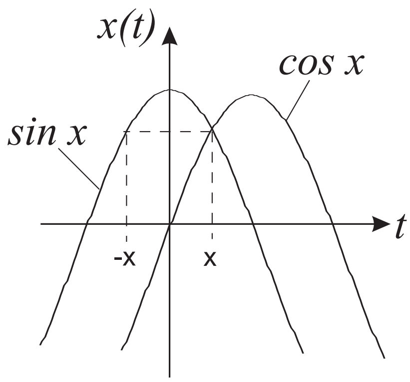
a) $\ddot{q}(t) = 0,56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ b) $\omega_0 = 7\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ c) $q(t) = 0,08\sin(7t)$

Aufgabe 3.1.3 - 3

a) $\hat{q} = 50\,\mathrm{mm}$; $\omega_0 = 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\beta = 1{,}369 = 78{,}465°$

b) Koeffizienten:

$q_C = \hat{x}\cos\beta = 10\,\mathrm{mm}$
$q_S = \hat{x}\sin\beta = 49\,\mathrm{mm}$



Aufgabe 3.1.3 - 4

a) $m\ddot{w} + kw = 0$; $\omega_0 = 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $w(t) = \hat{w}\cos(\omega t - \beta)$ oder $w(t) = \hat{w}_C\cos\omega t + \hat{w}_S\sin\omega t$

Anfangsbedingungen:

$w(t=0) = L_0 - L_s = \hat{w}_C$; $\dot{w}(t=0) = v_0 = \omega_0\hat{w}_S$

Daraus folgt:

$\hat{w} = \sqrt{\hat{w}_C^2 + \hat{w}_S^2} = 100\,\mathrm{mm}$; $\beta = \arctan\frac{\hat{w}_S}{w_C} = 60°$

c) $\omega_D = 9{,}950\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.1.4 - 1

a) $\left(\frac{3}{2}MR^2 + m\,(L-R)^2\right)\ddot{\varphi} + mgL\varphi = 0$

b) $T = 2{,}316$ s

Aufgabe 3.1.4 - 2

a) $\left(4m + \frac{3}{2}M\right)\ddot{x} + kx = 0$

b) $x(t) = 5\cos(25t - 1{,}0475)$

Aufgabe 3.1.4 - 3

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

Aufgabe 3.1.4 - 4

a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{480g}{\pi\alpha^\circ}\frac{(R_a{}^3 - R_i^3)}{(R_a^4 - R_i^4)}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{8g}{3\pi R_a}}$

Aufgabe 3.2.1 - 1

a) $17mR^2\ddot{\varphi} + d_\varphi\dot{\varphi} + 4mRg\varphi = 0$

b) $d = 3,28m\sqrt{R^3g}$

Aufgabe 3.2.1 - 2

a) $m\ddot{x} + d\dot{x} + 4kx = 0$ (x :=Koordinate der Masse m)

b) $d = 19,95\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.2.1 - 3

a) $\omega_0 = 62,84\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $k = 9872\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$; $d = 4,99\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

b) $\Delta d \geq 309,21\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

Aufgabe 3.2.1 - 4

a) $D = 1$ b) $\varphi(t_1) = 0,0404^\circ$

Aufgabe 3.2.1 - 5

a) $m\ddot{x} + \frac{d}{4}\dot{x} + \frac{k}{4}x = 0$

b) $\omega_0 = 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,05$

c) -27 %

Aufgabe 3.2.1 - 6

a) 1 Freiheitsgrad

b) $\left(m + \frac{1}{3}\rho AL\frac{3a^2 - 3aL + L^2}{(L-a)^2}\right)\ddot{x} + d\frac{a^2}{(L-a)^2}\dot{x} + k\frac{a^2}{L-a)^2}x = 0$

$\omega_0 = 6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,6$

c) $x(t) = \hat{x}e^{D\omega t}\cos(\omega_D t - \beta)$ mit $\hat{x} = 6,25$ mm ; $\beta = 36,87°$

d) $\omega_0 = 5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.2.1 - 7

a) $\ddot{\varphi} + \frac{4dL^2}{9J_0}\dot{\varphi} + \left[\frac{4kL^2}{9J_0} + \frac{mg(2L+3h)}{6J_0}\right]\varphi = 0$

b) $\omega_0 = 9,728\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,123$

c) $\omega_0 = 4,771\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,126$

Aufgabe 3.2.1 - 8

a) $\ddot{\varphi} + \frac{4d}{3m}\dot{\varphi} + \frac{20k}{3m}\varphi = 0$

b) $\omega_0 = 258,20\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,79$

Aufgabe 3.2.1 - 9

a) $\ddot{\varphi} + \frac{12dR^2}{\pi t\rho\,(R_a^4 - R_i^4)}\dot{\varphi} + \frac{12kR^2}{\pi t\rho\,(R_a^4 - R_i^4)}\varphi = 0$

b) $\omega_0 = 197{,}46\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0{,}4936$

c) $\ddot{\varphi} + \frac{12dR^2}{\pi t\rho\,(R_a^4 - R_i^4)}\dot{\varphi} + \frac{240kR^2}{22\pi t\rho\,(R_a^4 - {R_i}^4)}\varphi = 0$

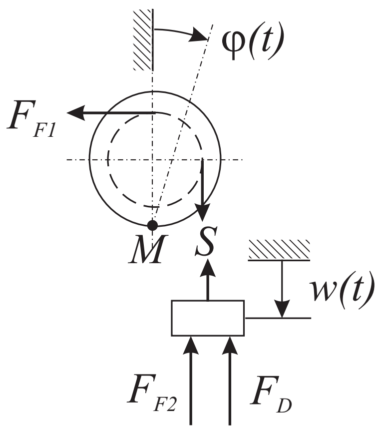
$\omega_0 = 188{,}27\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.2.1 - 10

$\ddot{x} + \frac{2g\mu}{L(1-\mu\frac{d}{L})}x = 0 \qquad ; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g\mu}{L(1-\mu\frac{d}{L})}}$

Aufgabe 3.2.1 - 11

a) Freikörperbild:

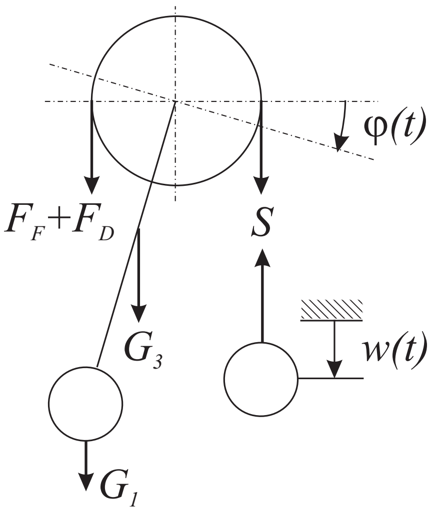


Bewegungsgleichung: $\ddot{w} + \frac{3d}{10m}\dot{w} + \frac{12k}{5m}w = 0$

b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{12k}{5m}}$; $D = \frac{3}{20}\sqrt{\frac{5}{12km}}d$

Aufgabe 3.2.1 - 12

a) Freikörperbild:

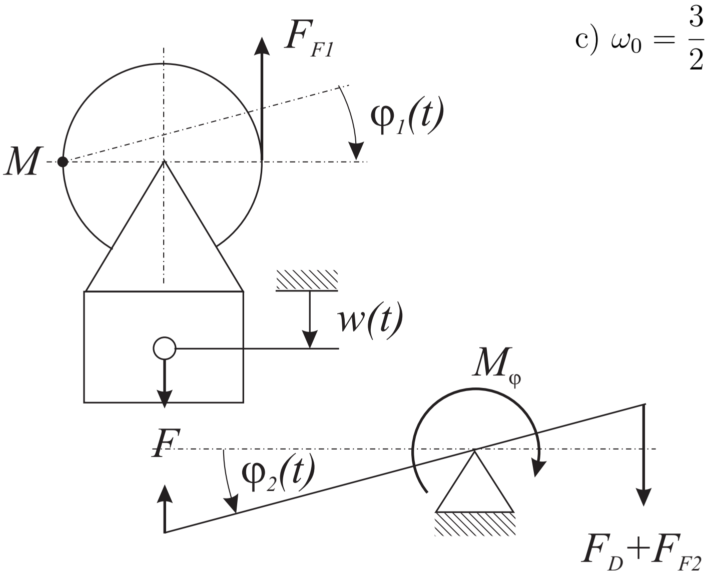


b) $\ddot{\varphi} + \frac{2d}{9M}\dot{\varphi} + \frac{4g}{9R}\varphi = 0$

c) $\omega_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{R}}$; $D = \frac{d}{6M}\sqrt{\frac{R}{g}}$

Aufgabe 3.2.1 - 13

a) Freikörperbild:

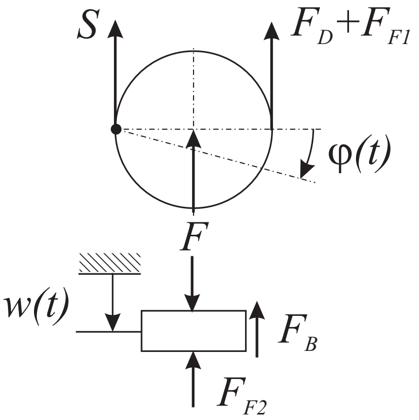


b) $\ddot{w} + \frac{d}{64m}\dot{w} + \frac{9k}{4m}w = 0$

c) $\omega_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$; $D = \frac{d}{192\sqrt{km}}$

Aufgabe 3.2.1 - 14

a) Freikörperbild:



b) $\ddot{w} + \frac{d}{m}\dot{w} + \frac{4k}{m}w = 0$

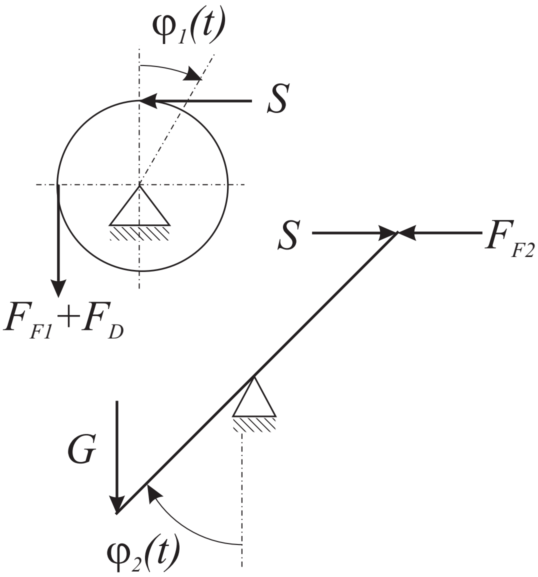
c) $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$; $D = \frac{1}{4}\frac{d}{\sqrt{km}}$

d) Eigenkreisfrequenz erhöht sich!

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Aufgabe 3.2.1 - 15

a) Freikörperbild:



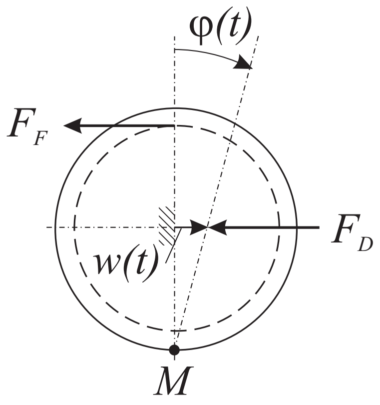
Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi}_2 + \frac{3d}{2m}\dot{\varphi}_2 + (\frac{3k}{m} + \frac{3g}{L})\varphi = 0$

b) $\omega_0 = \sqrt{(\frac{2k}{m} + \frac{3g}{L})}$; $D = \frac{d}{3m\omega_0}$

Aufgabe 3.2.1 - 16

a) Freikörperbild:

Bewegungsgleichung: $\ddot{w} + \dfrac{2d}{3m}\dot{w} + \dfrac{2k_{ers}(R+a)^2}{3mR^2}w = 0$



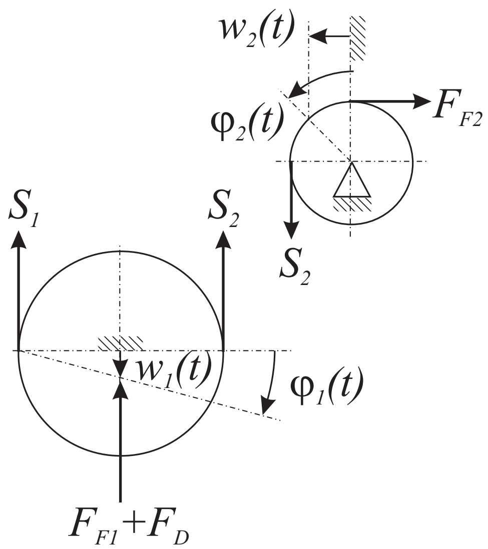
b) $\omega_0 = 28,17\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,095$

c) $\dfrac{T(a=0)}{T(a=R)} = 2$

Aufgabe 3.2.1 - 17

a) Freikörperbild:

Bewegungsgleichung: $\ddot{w}_1 + \dfrac{d}{4m}\dot{w}_1 + \dfrac{5k}{6m}w_1 = 0$



b) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5k}{6m}}$; $D = \dfrac{d}{8m\omega_0}$

Aufgabe 3.2.1 - 18

a) $k_\varphi = 1911,58$ Nmm/rad

b) $\vartheta = 0,0646$; $D_L = 0,01028$

c) $J_M = 7,746 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm\,s^2}$

Aufgabe 3.2.1 - 19

a) $\omega_D = 9,708\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\omega_0 = 9,86\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,172$

b) $\varphi_0 = 0,026$; $\dot{\varphi}_0 = 0,512\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.2.1 - 20

a) Ausschwingbewegung: $q(t) = Ae^{-D\omega_0 t}\cos(\omega_D t - \beta)$

$A = 250\,\mathrm{mm}$; $\omega_D = 99,87\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,05$; $\omega_0 = 100\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $m = 2\,\mathrm{kg}$; $\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\omega$; $D_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,D$

Aufgabe 3.2.1 - 21

a) $\hat{w}_1 = 500\,\mathrm{mm}$; $\hat{w}_2 = 370\,\mathrm{mm}$ $\Rightarrow$ $\vartheta = 0,301$; $D = 0,048$

$\omega_0 = 50,27\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $\frac{\omega_0}{\omega_D} = 0,999$

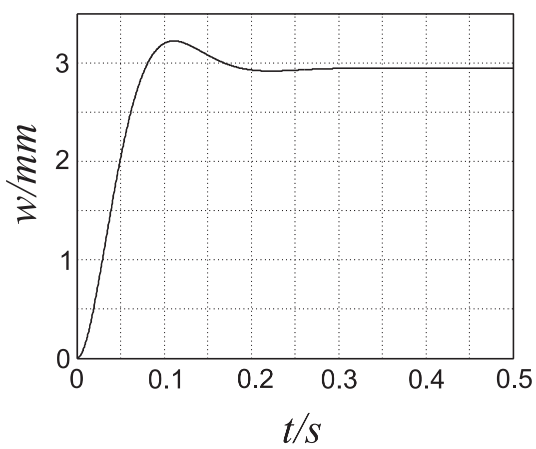
c) $k = 1002,31\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$

Aufgabe 3.3.3 - 1

a) $\omega_0 = 35,40\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,601$; $\omega_D = 28,32\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $r_0 = 2,943$ mm ; $\beta = 36,87°$

b) $t = 0,111\,\mathrm{s}$ c) $w_{max} = 3,222$ mm

d)



Aufgabe 3.3.3 - 2

für $t < T_0$

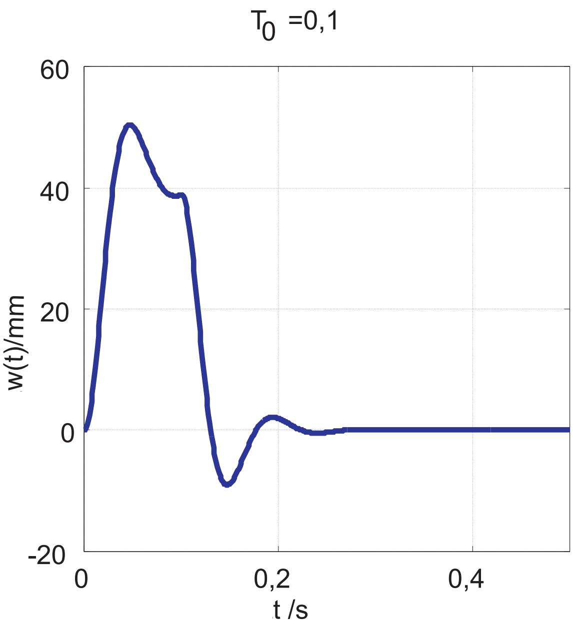
$$q(t) = \kappa_k u_0 \left[1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega_D t - \beta)\right]$$

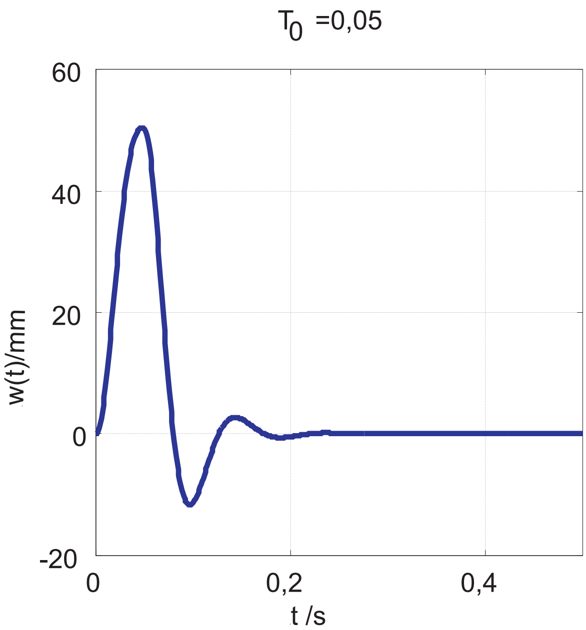
für $t > T_0$

$$q(t) = \kappa_k u_0 \left[\frac{e^{-D\omega_0 (t-T_0)}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega_D (t - T_0) - \beta) - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega_D t - \beta)\right]$$

$\kappa_k = 0,68$; $\omega_0 = 74,16\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,421$; $\omega_D = 67,27\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\beta = 24,89°$

a) $w_{max} = 38,82\,\mathrm{mm}$ b) $w_{max} = 50,03\,\mathrm{mm}$





Aufgabe 3.3.3 - 3

a) $\omega_0 = 335\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,2$; $\omega_D = 328,23\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $t_{max} = 0,004172\,\mathrm{s}$; $q(t_{max}) = 37,56\,\mathrm{mm}$

c) $q(t) = \dfrac{\omega_0 F_0}{(k_1 + k_2)\sqrt{1-D^2}}\; e^{-D\omega_0 t} \sin \omega_D t$

Aufgabe 3.3.4 - 1

a) $\mathit{\Omega} = 100\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\hat{w}_{max} = 0,104\,\mathrm{mm}$; $\psi = 41,41°$

b) $D > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 3.3.4 - 2

a) $\ddot{w} + \dfrac{2d}{3m}\dot{w} + \dfrac{4k}{m}w = \dfrac{2}{3}\mathit{\Omega}^2\hat{u}\cos\mathit{\Omega}t$

(w := Relativbewegung zwischen Wand und Rolle)

b) $\omega_0 = 80\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ c) $d = 160\,\dfrac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

Aufgabe 3.3.4 - 3

a) $(m + m_u)\ddot{w} + d\dot{w} + kw = m_u e\mathit{\Omega}^2\cos\mathit{\Omega}t$; $\omega_0 = 160\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) $n_{kr} = 1543\,\frac{1}{\mathrm{min}} \Rightarrow \hat{w}_{max} = 2,5125\,\mathrm{mm}$

c) $1366,60\,\frac{1}{\mathrm{min}} < n < 1764,23\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 3.3.4 - 4

a) $8,944\,\frac{1}{\mathrm{s}} < \mathit{\Omega} < 9,428\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; b) $d \geq 0,497\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$

Aufgabe 3.3.4 - 5

a) $\ddot{w} + \dfrac{d}{m}\dot{w} + \dfrac{2k_{ers} + k}{m}w = \kappa_k\omega_0^2\cos\mathit{\Omega}t$

mit: $k_{ers} = \dfrac{12EI}{L^3}$; $\kappa_k = \dfrac{k}{2k_{ers} + k}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k_{ers} + k}{m}} = 10\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

b) $n = 94,53\,\frac{1}{\mathrm{min}}$; $\hat{w} = 16,75\,\mathrm{mm}$

c) $\dfrac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{(1 + \kappa_k)} \geq n \geq \dfrac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{(1 - \kappa_k)}$

$110,27\,\frac{1}{\mathrm{min}} \geq n \geq 77,97\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 3.3.4 - 6

a) $\ddot{w} + \frac{d}{m}\dot{w} + \frac{k_{ers}+k}{m}w = \frac{k}{m}\hat{u}\cos\Omega t$

mit: $k_{ers} = \frac{4\pi E t_2^3}{3(1-\nu^2)R^2}$; $\omega_0 = 1659,88\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,3012$

b) $\Omega = \omega_0\sqrt{1-2D^2} = 1501,76\,\frac{1}{\mathrm{s}} \Rightarrow \hat{w}_{max} = \frac{\kappa_k}{2D\sqrt{1-D^2}}\,\hat{u} = 5,058\,\mathrm{mm}$

c) $\Omega \geq 1,9144\omega_0 = 3177,60\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.3.4 - 7

a) $\ddot{w} + \frac{d}{m_S+m_P+m_U}\dot{w} + \frac{k}{m_S+m_P+m_U}w = {\omega_0}^2\frac{m_U}{m_S+m_P+m_U}\,e\eta^2\cos\Omega t$

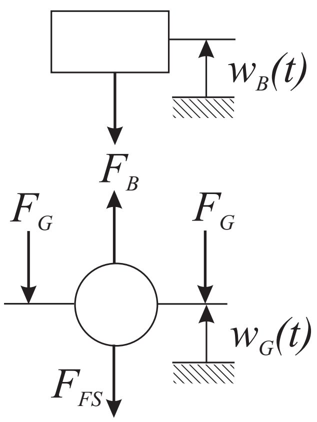
$\omega_0 = 29,4\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,12756$

b) $\hat{w}_{max} = 3,113\,\mathrm{mm}$

c) $n = 285,4\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

Aufgabe 3.3.4 - 8

a) Freikörperbild:



Bewegungsgleichungen:

b) $\ddot{w}_B + \frac{k_B}{m_B}w_B = \frac{k_B}{m_B}w_G$

$\ddot{w}_G + \frac{2k_G+k_B+k_S}{m_G}w_G = \frac{k_B}{m_G}w_B + \frac{k_S}{m_G}u$

c) $w_G = \frac{1}{2k_G+k_B+k_S}(k_B w_B + k_S u)$

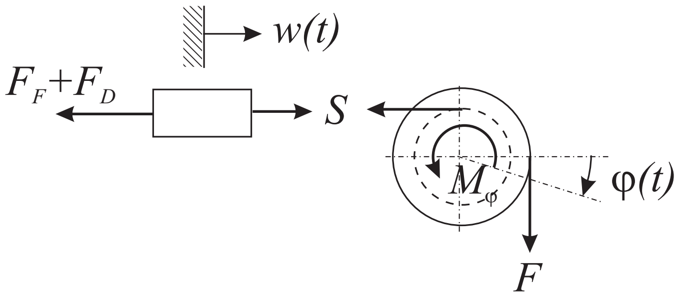
d) $\ddot{w}_B + \frac{k_B}{m_B}\left(1 - \frac{k_B}{2k_G + k_B + k_S}\right)w_B = \frac{k_B k_S}{m_B(2k_G + k_B + k_S)}u$

e) $0 \leq \Omega \leq 2445\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.3.4 - 9

a) $k_B = 19,2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$

b)



$$\ddot{w} + \frac{8d}{9M + 8m}\dot{w} + \frac{8k_B + 32k_\varphi/L^2}{9M + 8m}w = \frac{12}{9M + 8m}F(t)$$

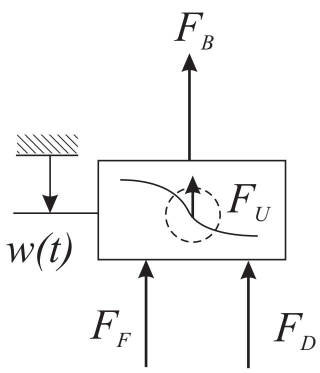
c) $\omega_0 = 21,02\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,1078$

d) $w_{max} = 32,39\,\mathrm{mm}$; $\Omega_{max} = 20,77\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.3.4 - 10

a) $k_B = 12,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$

b) Freikörperbild:



Bewegungsgleichung:

$$\ddot{w} + \frac{d}{m + m_U}\dot{w} + \frac{k_B + k}{m + m_U}w = -\frac{m_U}{m + m_U}e\Omega^2 sin\Omega t$$

c) $\omega_0 = 19,42\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,08157$

d) $w_{max} = 0,1522\,\mathrm{mm}$; $\Omega_{max} = 19,56\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.3.4 - 11

a) $(m+m_U)\ddot{w} + \dfrac{(k_1+k_2)k_3}{k_1+k_2+k_3} w = \pm m_u \Omega^2 e \cos \Omega t \quad ; \quad \omega_0 = 50\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

b) $49,75\,\frac{1}{\mathrm{s}} < \Omega < 50,25\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Aufgabe 3.3.5 - 1

$T_w = 2$ s

Aufgabe 3.3.5 - 2

$$\begin{aligned} w(t) = 5\,\mathrm{mm} \quad &+ \quad 7,05\,\mathrm{mm} \quad \cos(1\pi t - 1,6230) \\ &+ \quad 11,77\,\mathrm{mm} \quad \cos(3\pi t - 2,4728) \\ &+ \quad 0,86\,\mathrm{mm} \quad \cos(5\pi t - 1,4118) + \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3.5 - 3

$$\begin{aligned} w(t) = 5\,\mathrm{mm} \quad &+ \quad 5,1438\,\mathrm{mm} \quad \cos(2\pi t - 3,0507) \\ &+ \quad 0,6532\,\mathrm{mm} \quad \cos(6\pi t - 2,0437) \\ &+ \quad 0,0653\,\mathrm{mm} \quad \cos(10\pi t - 2,0847) + \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3.5 - 4

a) $k_B = 9945\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ [0.3cm] ; b) $\omega_0 = 63,16\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,317$

c) $\Omega_{01} = 58,36\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\Omega_{02} = 29,18\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

d) $w_{erz} = \dfrac{r_0}{2} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{2} \hat{r}_{k\nu} V_{k\nu} \cos(\Omega_\nu - \beta^*_{k\nu} - \Psi_{k\nu}) \quad ; \quad r_0 = 5,01\,\mathrm{mm}$

$$V_{k\nu} = \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta_\nu^2 \cdot 1/\kappa_k^2}{(1-\eta_\nu^2)^2 + 4D^2\eta_\nu^2}} \quad ; \quad \kappa_k = 0,501$$

ν	$\hat{r}_{k\nu}$/ mm	η_ν	$V_{k\nu}$	$\Psi_{k\nu}$	$\beta^*_{k\nu}$
1	1,504	0,554	1,3645	0,47	-0,6
2	1,003	1,108	1,655	-1,25	-0,95

Aufgabe 3.3.5 - 5

a) $u(t) = \dfrac{u_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$

$$u_0 = \hat{u} \quad ; \quad \beta_\nu = \pi \quad ; \quad \Omega_\nu = \frac{2\pi\nu v}{\lambda}$$

$$\hat{u}_\nu = \begin{cases} 0 & ; \quad \nu = 2, 4, 6, \ldots \\ \dfrac{4\hat{u}}{\nu^2\pi^2} & ; \quad \nu = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

b) $\omega_0 = 173,21\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad ; \qquad D = 0,058$

c) $w_3(t) = \hat{r}_{35} V_{35} \cos(\Omega_\nu t - \beta^*_{35} - \Psi_{35})$

$$\hat{r}_{35} = 0,027\,\mathrm{mm} \quad ; \quad V_{35} = 3,0397 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad \beta^*_{35} = \pi \quad ; \quad \Psi_{35} = -0,0365^\circ$$

Aufgabe 3.3.5 - 6

a) $u(t) = \dfrac{u_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$

$$u_0 = \hat{u} = 5\,\mathrm{mm} \quad ; \quad \beta_\nu = \pi/2 \quad ; \quad \Omega_\nu = \nu\Omega_0 \quad ; \quad \Omega_0 = 125,66\,\tfrac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\hat{u}_\nu = \begin{cases} 0 & ; \quad \nu = 2, 4, 6, \ldots \\ \dfrac{\hat{u}}{\nu\pi} & ; \quad \nu = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

ν	$\hat{u}_r/\,\mathrm{mm}$	$\Omega_\nu/\,\frac{1}{\mathrm{s}}$
1	3,18	125,66
2	0	-
3	1,06	376,99
4	0	-
5	0,64	628,32

b) $\ddot{w} + \dfrac{d}{m}\dot{w} + \dfrac{k_1 + k_2}{m} w = \dfrac{k_1}{m} u + \dfrac{d}{m}\dot{u} \qquad ; \qquad \omega_0 = 500\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \qquad ; \qquad D = 0,01$

c) $\hat{w}_1 = 2,717\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.3.5 - 7

a) $u(t) = \dfrac{u_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$

$u_0 = \hat{u} = 3,183\,\mathrm{mm}$

$$\beta_\nu = \begin{cases} \beta/2 \quad ; \quad \nu = 1 \\ \pi \quad ; \quad \nu = 2,4,6,\ldots \\ 0 \quad ; \quad \nu = 3,5,7,\ldots \end{cases} \qquad \hat{u}_\nu = \begin{cases} u/2 \quad ; \quad \nu = 1 \\ 0 \quad ; \quad \nu = 3,5,7,\ldots \\ \dfrac{2\hat{u}}{(\nu+1)(\nu-1)\pi} \quad ; \quad \nu = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

ν	$\hat{u}_r/\,\mathrm{mm}$	$\Omega_\nu/\,\frac{1}{\mathrm{s}}$
1	5	2π
2	2,122	4π
3	0	-
4	0,4244	8π

b) $\ddot{w} + \dfrac{d_1 + d_2}{m}\dot{w} + \dfrac{k}{m}w = \dfrac{d_2}{m}\dot{u} \quad ; \quad \omega_0 = 387,30\,\dfrac{1}{\mathrm{s}} \quad ; \quad D = 0,0194$

c) $\hat{w}_1 = 2,06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.3.6 - 1

Zeitbereich:

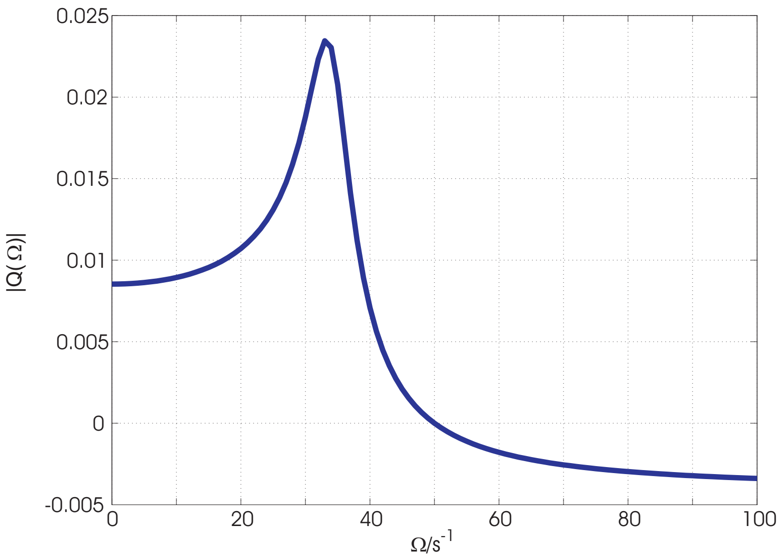
$$q(t) = \begin{cases} \dfrac{\hat{F}}{kT_0\omega_0}\Big[\omega_0 t - \sin\omega_0 t\Big] \quad ; \quad 0 \le t \le T_0 \\ \dfrac{\hat{F}}{kT_0\omega_0}\Big[\sin\omega_0(t - T_0) + \omega_0 T_0 \cos\omega_0(t - T_0) - \sin\omega_0 t\Big] \quad ; \quad T_0 \le t \end{cases}$$

Frequenzbereich: $\bar{Q}(\Omega) = \dfrac{\hat{F}}{2\pi T_0 k \Omega_0^2 (1 - \eta^2)}\Big[(j\Omega T_0 + 1)e^{-j\Omega T_0} - 1\Big]$

Aufgabe 3.3.6 - 2

Antwortspektrum:

$$Q(\Omega) = \frac{F_0(1 - \Omega^2/\Omega_0)}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$



Aufgabe 3.3.7 - 1

$n_{kr} = 1500,95\,\frac{1}{\text{min}}$

Aufgabe 3.3.7 - 2

a) $k_{ges} = 86,8\,\dfrac{\text{N}}{\text{mm}}$; b) $m_U = 6,43\,\text{kg}$

Aufgabe 3.3.7 - 3

a) $\ddot{w}_{max} = 0,8248\ \text{mm/s}^2$

b) Geringe Federsteifigkeit k und geringe Dämpfung d (tiefe Abstimmung).

Aufgabe 3.3.7 - 4

a) $\ddot{w} + \frac{d}{m}\dot{w} + \frac{1}{m}\Big(\frac{12EI_1}{L_1^3} + \frac{3EI_2}{L_2^3}\Big)w = \Omega^2 e \cos \Omega t$

b) $\omega_0 = 175,59\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,0047$

c) $\hat{w}_{max} = 106,38\,\mathrm{mm} \;\Rightarrow\; n_{max} = 1677\,\mathrm{min}$

Aufgabe 3.3.7 - 5

a) $F_U = m_U \Omega^2 e \sin \Omega t$

$$\ddot{w} + \frac{d}{m+m_U}\dot{w} + \frac{k_B}{m+m_U}w = \frac{m_U}{m+m_U}\Omega^2 e \sin \Omega t$$

b) $\omega_0 = 210,31\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,1187$

c) $\eta = 2,4896 > 1 \;\Rightarrow$ überkritischer Betrieb

d) $2005\,\mathrm{min} \leq \Omega \leq 2011\,\mathrm{min}$

Aufgabe 3.3.7 - 6

a) $k_{ers} = 150\,\mathrm{Nm}$

b) $v = 1,8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

c) $\hat{w} = 8,2\,\mathrm{mm}$

d) $\hat{w}_\infty = e = 2\,\mathrm{mm}$

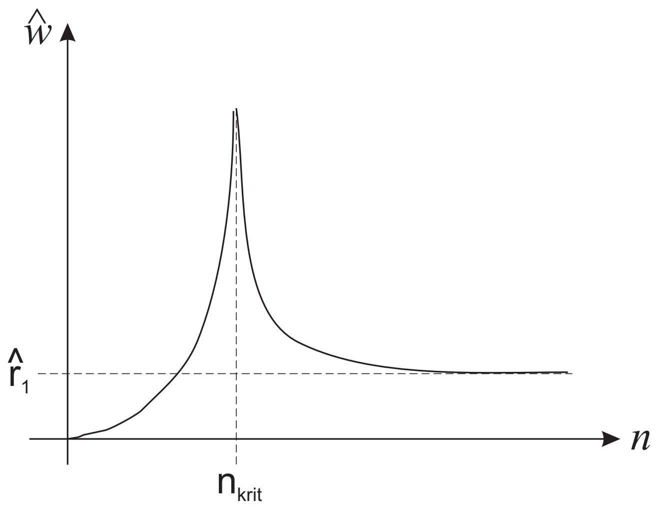
Aufgabe 3.3.7 - 7

a) $k_{ers} = 1099,56\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$

b) $\ddot{w} + \dfrac{d}{m_L + m_S}\dot{w} + \dfrac{k_{ers}}{m_L + m_S}w = \dfrac{m_s}{m_L + m_S}\Omega^2 e_S \cos\Omega t$

c) $n_{krit} = 3540,31\,\frac{1}{\mathrm{min}} \;\;\Rightarrow\;\; \hat{w} = 12,5\,\mathrm{mm}$

d)



Aufgabe 3.3.7 - 8

a) $k_{ers} = 200\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$

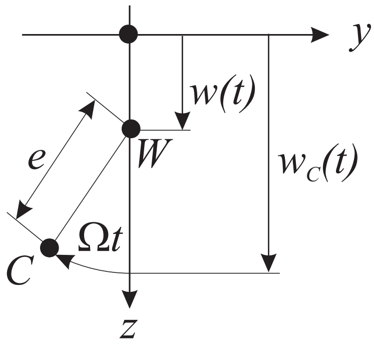
b)$\ddot{w} + \dfrac{d}{m}\dot{w} + \dfrac{k_{ers}}{m}w = \Omega^2 e_s \cos\Omega t$

c) $\omega_0 = 100\,\frac{1}{\mathrm{s}} \qquad ; \qquad D = 0,05$

d) $81,4\,\frac{1}{\mathrm{s}} \;\leq \Omega \leq 141\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

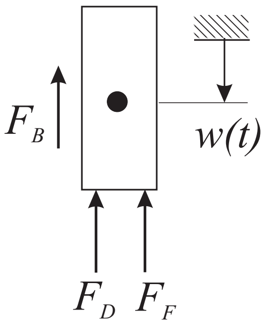
Aufgabe 3.3.7 - 9

a)



$$w_C = w(t) + e\cos\Omega t$$

b) Freikörperbild:



Bewegungsgleichung:

$$\ddot{w} + \frac{d}{m}\dot{w} + \frac{k + k_B}{m} = \Omega^2 e\cos\Omega t$$

mit $k_B = 26,86\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$

c) $\omega_0 = 19,20\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 0,1302$

d) $n_{krit} = 183,35\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

e) $\Omega_{max} = 19,53\,\frac{1}{\mathrm{s}} \;\Rightarrow\; \hat{w}_{max} = 19,35\,\mathrm{mm}$

Aufgabe 3.3.7 - 10

a) $\ddot{x} + \dfrac{2d}{m}\dot{x} + \dfrac{2k}{m}x = -\ddot{u}$; $\omega_0 = 1,414\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$; $D = 35,36$

b) $u(t) = \dfrac{u_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$

$u_0 = \hat{u} = 1\,\mathrm{mm}$; $\beta_\nu = \pi/2$; $\Omega = 125,66\,\frac{1}{\mathrm{s}}$; $\Omega_\nu = \nu\Omega$

$$\hat{u}_\nu = \begin{cases} 0 & ; \quad \nu = 2,4,6,\ldots \\ \dfrac{2\hat{u}}{\nu\pi} & ; \quad \nu = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

c) $r(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \eta_\nu^2 \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$; $\eta_\nu = \dfrac{\Omega_\nu}{\omega_0}$

d) $\Omega_1 = 1,414\,\frac{1}{\text{s}}$; $\Omega_2 = 0,47\,\frac{1}{\text{s}}$; $\Omega_3 = 0,28\,\frac{1}{\text{s}}$

e) $\hat{x}_1^{max} = 9 \cdot 10^{-3}\,\text{mm}$; $\hat{x}_2^{max} = 9,996 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}$; $\hat{x}_3^{max} = 3,593 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}$

Aufgabe 3.3.7 - 11

a) Feder- und Dämpferfußpunkterregung

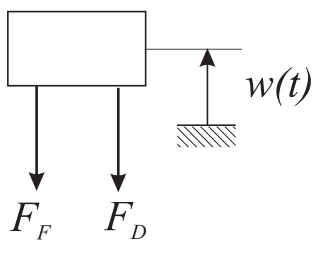
b) $u(t) = \dfrac{u_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cos(\Omega_\nu t - \beta_\nu)$

$u_0 = 0\,\text{mm}$; $\hat{u}_\nu = \dfrac{2\hat{\nu}}{\nu\pi}$; $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\beta_\nu = \begin{cases} \pi/2 & ; \quad \nu = 1 \\ -\pi/2 & ; \quad \nu = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

ν	$\hat{u}_r$/ mm	Ω_ν/ $\frac{1}{\text{s}}$
1	1,27	2,09
2	0,64	4,18
3	0,42	6,27
4	0,32	8,36
5	0,25	10,45

c) Freikörperbild:



Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{u}$$

$\omega_0 = 100\,\frac{1}{\text{s}}$; $D = 0,75$

d) $\hat{x}_{erz} = 5,55 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}$

Am Institut für Mechanik erschienene Skripte zu Vorlesungen

P. Haupt

Einführung in die Mechanik - Technische Mechanik III

H. Irretier

Schwingungstechnik
Schwingungstechnik Aufgabensammlung
Schwingungen diskreter und kontinuierlicher Systeme
Schwingungen nichtlinearer Systeme
Maschinen- und Rotordynamik
Experimentelle Methoden der Mechanik
Experimentelle Modalanalyse

L. Schreiber

Aufgabensammlung zur Einführung in die Mechanik - Technische Mechanik I/II
Aufgabensammlung zur Einführung in die Mechanik - Technische Mechanik III