

Zenon über Ausdehnung und Anzahl (DK 29 A 26, B 1-2, B 3)¹

Gottfried Heinemann

Vorbemerkung (Nov. 2014): Ich habe meine Arbeiten zu Zenon von Elea seit Anfang der 90er Jahre nicht weitergeführt. Der folgende Abschnitt aus meinem seinerzeitigen Zwischenbericht kann (mit kleinen Retuschen) so stehen, wie ich ihn abgefaßt habe.

Zenons Paradoxa der Bewegung und der Ausdehnung sind durch eine geeignete Terminologie zur Beschreibung kontinuierlicher Größen eliminierbar. Insofern handelt es sich um Artefakte der von Zenon gewählten Beschreibungsweise. Aber durch diese Beobachtung sind sie nicht erledigt. Vielmehr ist die Frage nach einer Begründung für die Wahl der jeweiligen Terminologie aufgeworfen – d.h. einerseits nach den Plausibilitäten, mit denen Zenon spielt, und andererseits nach den Härten, mit denen die Elimination der Paradoxa erkauft ist. Bei den hier diskutierten Paradoxa handelt es sich im wesentlichen darum, zwischen offenen und unbeschränkten Intervallen zu unterscheiden:² Diese Unterscheidung macht das Paradoxon der Ausdehnung (DK 29 B 1-2) und den "Achilleus" (DK 29 A 26) hinfällig; zugleich erlaubt sie, die Begrenzungsflächen von Volumina in solcher Weise zu berücksichtigen, daß die Konstruktion des Paradoxons der Anzahl (DK 29 B 3) nicht mehr durchführbar ist.

Das Paradoxon der Anzahl habe ich einerseits mit der Cantorsche Antinomie, andererseits mit dem antiken Atomismus in Verbindung gebracht. Beide Zusammenhänge sind naheliegend. Zenon und Cantor zeigen: Wenn es viele Dinge gibt, dann kann die Frage, wieviele Dinge es insgesamt gibt, nicht widerspruchsfrei beantwortet werden. Die Atomisten behaupten: Wenn es viele Dinge gibt, dann müssen sie nicht, wie Zenon voraussetzt, durch *etwas* getrennt werden; sie können durch *nichts* getrennt sein, d.h. durch das somit erfundene Leere. Die Verbindung mit Cantor ist vielleicht nur oberflächlich. Das Zenonsche Argument ist durch die Cantors transfinite Zahlen erledigt. Und dann findet Cantor, wohl ohne an ihn zu denken, ein neues Argument, das Zenon im Ergebnis bestätigt. Die Verbindung Zenons mit den Atomisten ist ein vieldiskutiertes Thema. Ich weiß nicht, welche Rolle das Paradoxon der Anzahl bei der Begründung des Atomismus gespielt hat. Auffällig bleibt die Bezeichnung des Leeren als "nichts" im atomistischen Sprachgebrauch. Sie könnte sich aus dem Paradoxon der Anzahl erklären.

Der erwähnte Zwischenbericht schließt mit einem umfangreichen Abschnitt zu Zenons "Pfeil".³ Darauf hoffe ich, im Zuge meiner geplanten Studien zum VI. Buch der *Physikvorlesung* zurückzukommen.⁴

¹ Zuerst erschienen als §1-5 des Schlußkapitels "Zenons Paradoxa: Können wir Natur erkennen, indem wir erkennen, was ist?" in: Verf., *Zum Naturbegriff im archaischen und klassischen griechischen Denken*. Zwischenbericht, Teil 1. *Kasseler Philosophische Schriften*, preprint 1/91, Kassel 1991, S. 89-141 (hier: S.89-105). – Geringfügig überarbeitet im Nov. 2014.

² Aristoteles trägt dem Rechnung, indem er die einschlägigen Ausdehnungsverhältnisse stets durch kompakte Intervalle beschreibt.

³ A.a.O. S. 105-141

⁴ Vgl. aber auch Abschnitt 3.5. meines Aufsatzes "Time as 'measure' ...".

1.

Berühmt ist der sog. Achilleus. Das Paradoxon lautet in der aristotelischen Fassung: "... daß das Langsamste vom Schnellsten niemals im Wettlauf eingeholt wird (sc. nachdem ihm zunächst ein Vorsprung gegeben wurde – GH). Das Verfolgende muß nämlich zuvor dort ankommen, von wo das Fliehende losgelaufen ist, und so muß das Fliehende immer etwas voraus sein." (DK 29 A 26 = *Phys.* VI 9, 239b15-18)

Achilleus versucht seine Aufgabe, die Schildkröte einzuholen, also folgendermaßen zu lösen: Zuerst läuft er dorthin, von wo die Schildkröte startet. Dort trifft er die Schildkröte aber nicht an, denn sie ist inzwischen ein Stück in dieselbe Richtung gekrochen. Die Schildkröte hat also immer noch einen Vorsprung. Insofern gleicht die neue Situation derjenigen am Anfang des Wettlaufs. Daher verhält sich Achilleus auch ebenso wie am Anfang: Er läuft dorthin, wo sich die Schildkröte nunmehr befindet. Aber auch dort trifft er sie nicht an, denn sie ist wieder ein Stück weitergekrochen und hat also immer noch einen Vorsprung. Und so fort: Jedesmal ergibt sich wieder die Ausgangssituation, und niemals ist es der Fall, daß Achilleus die Schildkröte eingeholt hat.

Die crux an diesem Argument ist offenbar, was hier 'immer' oder 'niemals' bedeutet. Zur genaueren Klärung des Problems ist es wohl nützlich, die mathematischen Details des Arguments deutlich zu machen. Der Vorsprung der Schildkröte sei a , das Verhältnis der Geschwindigkeit sei p , der Einfachheit halber starte Achilleus bei 0. Wenn Achilleus an der Stelle a angelangt ist, befindet sich die Schildkröte somit an der Stelle $a+pa$; wenn Achilleus dort angelangt ist, ist die Schildkröte an der Stelle $a+pa+p^2a$ usf. Die Stellen, an denen sich Achilleus und die Schildkröte jeweils zugleich befinden, lassen sich also aus folgender Tabelle ablesen:

A	0	a	$a+pa$...	$a+pa+\dots+p^{n-1}a$...
S	a	$a+pa$	$a+pa+p^2a$...	$a+pa+\dots+p^{n-1}a+p^na$...

Tabelle (1)

Das fragliche 'immer' und 'niemals' bezieht sich also zunächst auf die in dieser Tabelle beschriebenen, dann auch auf die dazwischenliegenden Situationen. Und unter diesen ist keine, in der Achilleus die Schildkröte eingeholt hat, sondern die Schildkröte hat jedesmal noch einen Vorsprung.

Aber folgt daraus, daß Achilleus die Schildkröte überhaupt niemals einholen wird? Selbstverständlich folgt das nicht. Nichts spricht dagegen, daß Achilleus die Schildkröte an der Stelle $a/(1-p)$ einholt. Zwischen der obigen Tabelle und

A	0	a	$a+pa$...	$a+pa+\dots+p^{n-1}a$...	$a/(1-p)$
S	a	$a+pa$	$a+pa+p^2a$...	$a+pa+\dots+p^{n-1}a+p^na$...	$a/(1-p)$

Tabelle (2)

besteht kein Widerspruch, sondern vielmehr ein Ergänzungsverhältnis. Sofern Zenon hier einen Widerspruch aufzuzeigen versuchte, ist dieser Versuch offensichtlich gescheitert. Daher kann Aristoteles das Zenonsche Argument mit der schlichten Bemerkung zurückweisen, um die Schildkröte einzuholen, müsse Achilleus überhaupt nur eine "begrenzte" Strecke – von 0 nach $a/(1-p)$ – zurücklegen können (239b28 f.).

Aber ist Zenons Argument hiermit erledigt? Wohl kaum, wenn wir die Beweislast anders verteilen. Sofern Zenon zu zeigen beansprucht, daß Achilleus die Schildkröte nicht einholen kann, mag sein Argument hinfällig sein. Aber vielleicht sollten wir Zenon stattdessen so verstehen, daß *wir* aufgefordert sind, zu zeigen, daß Achilleus die Schildkröte einholen kann. Und zwar sollen wir das nicht tun, indem wir einfach die Stelle berechnen, an der Achilleus die Schildkröte einholen wird. Sondern Zenon sagt uns zunächst, wie Achilleus bei seinem Versuch, die Schildkröte einzuholen, verfährt: Er läuft immer dorthin, wo die Schildkröte gerade ist; wenn er sie dort nicht antrifft, läuft er (selbstverständlich ohne anzuhalten oder seine Geschwindigkeit zu ändern) dorthin, wo sich nun ist, und so fort. Zenon fragt dann: Wie kann Achilleus, wenn er so verfährt, die Schildkröte einholen?

Wenn Achilleus nach dieser Regel verfährt, dann tut er, solange er die Schildkröte nicht eingeholt hat, nichts anderes als einfach – zu laufen. Die angegebene Regel ist also eine angemessene Beschreibung dessen, was bei dem Wettlauf vor dem Einholen der Schildkröte geschieht.⁵ Eigentümlich ist an dieser Beschreibung, daß sie überhaupt nur auf solche Situationen zurückgreift, die *während* des Wettlaufs eintreten, d. h. solange Achilleus die Schildkröte noch nicht eingeholt hat. Weder der Augenblick noch der Ort des Einholens noch gar eine spätere Zeit oder ein entfernterer Ort werden erwähnt. Gegeben sind vielmehr nur die Ausgangsposition beider Läufer sowie die Begriffe

(a) die Strecke zwischen zwei gegebenen Punkten mit gegebener Geschwindigkeit durchlaufen (wodurch dann bei gegebener Startzeit eine Ankunftszeit bestimmt wird)

und

(b) während eines gegebenen Zeitintervalls mit gegebener Geschwindigkeit in eine gegebene Richtung laufen (wodurch dann bei gegebenem Ausgangspunkt ein Endpunkt bestimmt wird).

Diese Ausgangsdaten und Operationen sind hinreichend zur Beschreibung des Wettlaufs. Aber diese Beschreibung gibt keinen Hinweis darauf, daß Achilleus die Schildkröte einholen wird. Zenons Argument zeigt, daß der Punkt, an dem Achilleus die Schildkröte einholt, (oder der Augenblick, in dem das geschieht) mit den angegebenen Mitteln gar nicht konstruiert werden kann.

⁵ Die Auffassung, daß Achilleus durch die Anweisung 'laufe jeweils dorthin, wo die Schildkröte gerade ist', ebenso fehlinstruiert sei wie jemand, der ein bewegtes Ziel mit dem Gewehr zu treffen versucht, indem er dorthin zielt, wo dieses gerade ist (Hughes und Brecht 1975, 24), ist irrig.

Es gibt also eine adäquate Beschreibung des Wettlaufs, in der dessen Resultat, daß die Schildkröte von Achilleus eingeholt wird, weder explizit noch implizit (als logische oder mathematische Konsequenz) vorkommt. Andererseits sind wir aber der Meinung, daß dieses Resultat, wenn die Beschreibung nur zutreffend ist, *notwendig* folgt: Wenn Achilleus nur immer wieder dorthin läuft, wo die Schildkröte gerade ist (und zwar ohne Unterbrechung, und ohne daß Achilleus oder die Schildkröte ihre jeweilige Geschwindigkeit ändern), dann ist es unvermeidlich, daß Achilleus die Schildkröte einholt. Aber wie ist diese Meinung begründet?

Sie kann nur darin begründet sein, daß wir unter 'Bewegung' etwas verstehen, das dieses Resultat garantiert. Das heißt, die beiden oben genannten Operationen – 'eine gegebene Strecke durchlaufen' und 'während eines gegebenen Zeitintervalls in eine gegebene Richtung laufen' – sind zur Bestimmung unseres Bewegungsbegriffs nicht hinreichend. Wenn wir, um anzugeben, was wir unter 'Bewegung' verstehen, nur auf diese beiden Operationen verweisen, dann haben wir also noch gar nicht alles gesagt, was wir denken. Oder sofern wir unseren Bewegungsbegriff nicht weiter als durch diese beiden Operationen zu bestimmen vermögen, dann denken wir überhaupt nicht, was wir zu denken vermeinen. Unsere Behauptung, daß Achilleus die Schildkröte einhole, ist bloßes Gerede, solange wir nicht unseren Bewegungsbegriff über (a) und (b) hinaus expliziert haben.⁶

Es ist bekannt, daß eine einfache Stetigkeitsbedingung das Geforderte leistet. Ich kann mit ihre Formulierung ersparen, da es auf technische Details hier nicht ankommt – zumal diese Stetigkeitsbedingung auch nur der schlichten mathematischen Konstruktion des Paradoxons entspricht: eine andere Konstruktion, die die Mittel der modernen Mathematik ausschöpft, könnte weitere Bedingungen erfordern.⁷ Wichtig ist vielmehr, daß man keinem Bewegungsbegriff vorab ansehen kann, ob er hinreichend ist. Ohne Zenons Paradoxon zu kennen, könnten wir meinen, daß die Operationen (a) und (b) bereits einen hinreichenden Begriff der (gleichförmigen) Bewegung (und zwar längs einer endlichen Strecke) ergeben. Zenon zeigt dann, daß dies gar nicht der Fall ist. Und nachdem Zenon dies einmal gezeigt hat, haben wir keinen Anlaß, uns bei irgendeiner, irgendwie verbesserten Definition von 'Bewegung' zu beruhigen. Zenon hat somit sein Ziel erreicht: zwar nicht, zu zeigen, daß Bewegung überhaupt nicht stattfinden kann, wohl aber, uns zu überführen, daß wir gar nicht wissen, was wir meinen, wenn wir von Bewegung reden.

⁶ Insofern ist auch die Aristotelische Bewegungslehre, die bei jeder Bewegung den Bewegungsabschluß immer schon voraussetzt (vgl. Heinemann 1986, Abschnitt 2), zur Lösung des von Zenon aufgezeigten Problems unzureichend. Aristoteles umgeht an der zitierten Stelle (239b28 f.) die entscheidende Frage: wieso die Strecke des Wettlaufs überhaupt "begrenzt" ist.

⁷ Vgl. Beck 1979

2.

Eng verwandt mit dem 'Achilleus' ist folgendes Argument gegen die Vielheit, das teilweise wörtlich, teilweise nur in Andeutungen durch Simplikios überliefert ist.⁸ Wenn Vieles ist, dann folgt:

- (a) Keines dieser Vielen hat Größe, Dicke und Masse, da es jeweils sich selbst gleich und Eines ist. (Testimonium zu DK 29 B 2)
- (b) Was keine Größe hat, bringt beim Hinzutreten keinen Zuwachs, beim Weggenommen werden keinen Verlust und ist somit nichts. (DK 29 B 2)
- (c) Jedes der Vielen muß also eine Größe und Dicke haben, und daher müssen seine verschiedenen Teile voneinander abstehen. Und von dem Teil, der vorsteht,⁹ gilt wieder dasselbe, usf., so daß es keinen äußersten Teil gibt. (DK 29 B 1)
- (d) Daher müssen die Vielen groß und klein sein: so klein, daß sie gar keine Größe haben, und so groß, daß sie unendlich sind. (DK 29 B 1)

Es ist nicht leicht, sich in diesem Beweisgang zurechtzufinden, ich will deshalb mit einigen einfachen Erläuterungen beginnen: Zenon bezieht sich auf die These des Parmenides, was ist, sei Eines: in sich zusammengeschlossen, unteilbar und undifferenziert.¹⁰ Diese These wird von Zenon zu der Formel, daß Eines ist und nicht Vieles, zusammengefaßt. Die Absurdität, die aus der Annahme folgt, daß Vieles sei, soll die Richtigkeit der Parmenideischen These belegen.

Dabei nimmt Zenon den Ausdruck 'Vieles' sehr streng. Vieles kann nicht sein, ohne daß auch Eines ist – nämlich die Vielen, die jeweils Eines sind und so erst insgesamt Viele sein können. Wenn wir dies nicht annehmen, können wir gar nicht erklären, was wir mit der Behauptung, daß Viele existieren, überhaupt meinen – nämlich daß x existiert und daß y existiert sowie z usf. Die x , y , z usf. müssen jeweils Eines sein und nicht Vieles. Denn sonst würden wir bei der Erläuterung der Behauptung, daß Viele existieren, wieder nur dasselbe behaupten.

In dem oben referierten Argument fragt Zenon nach der Größe dieser Einheiten, die insgesamt Viele sein sollen:

- (a) Diese Einheiten müssen einerseits unausgedehnt sein. Denn was ausgedehnt ist, ist teilbar und somit Vieles, nicht Eines. Und was ausgedehnt ist, kann auch nicht sich selbst gleich sein (d. h., es muß in sich selbst unbestimmt sein, und wir wissen wieder nicht, was wir meinen, wenn wir behaupten, daß so etwas existiert; warum das so ist, wird nicht gesagt, läßt sich aber evtl. aus (c) rekonstruieren).

⁸ Rekonstruktion des Arguments nach Fränkel 1942/68 (Frg. 6 bis 9 bei Mansfeld), Wortlaut von mir leicht gekürzt.

⁹ Hier ist mit dem Wort *proechein* die Entsprechung zum 'Achilleus', vgl. Aristoteles, *Phys.* VI 9, 239b17.

¹⁰ Vgl. bes. Parmenides DK 28 B 8.5 f., 22 ff., 44 f. sowie B 4

- (b) Aber andererseits können die zugrundeliegenden Einheiten auch wieder nicht unausgedehnt sein. Denn das würde bedeuten, daß man eine solche Einheit zu etwas hinzufügen oder von etwas abziehen könnte, ohne dessen Größe zu verändern. Da hier das Seiende durchaus körperlich gedacht ist, würde eine solche Hinzufügung oder Wegnahme überhaupt keine Änderung bewirken. Es würde gar nichts hinzugefügt oder weggenommen. Das heißt, was hinzugefügt oder weggenommen wird, die unausgedehnte Einheit, wäre nichts.¹¹ Bereits an dieser Stelle hat Zenon also einen Widerspruch abgeleitet: Die Einheiten, aus denen das Viele gebildet ist, müssen sowohl unausgedehnt als auch ausgedehnt sein. Dieser Widerspruch wird nun weiter zugespitzt.
- (c) Wenn die fraglichen Einheiten nach allen Richtungen hin ausgedehnt sind, dann ergibt diese Ausdehnung eine Unterscheidung verschiedener Teile in jeder Einheit. Und zwar müssen diese Teile ihrerseits wieder ausgedehnt sein – denn sonst wären sie "nichts", siehe (b). Sie sind also wiederum teilbar. Daher kann keiner von ihnen der äußerste sein. Denn wäre etwa z ein äußerster Teil von x , dann könnte z immer noch weiter geteilt werden in einen inneren Teil z_1 und einen äußeren Teil z_2 , und z_2 läge weiter außen als z .
- (d) Nach (a) ist somit jede der fraglichen Einheiten ausdehnungslos, ihre Größe ist Null. Nach (b) und (c) hingegen ist ihre Größe unendlich.

Die letztere Konklusion ist weiter erklärungsbedürftig. Die meisten Interpreten verstehen sie so, als hätte Zenon in (c) die fragliche Einheit in unendlich viele Teile zerlegt und dann die zweite Behauptung von (d) aus folgenden Voraussetzungen gewonnen:

- (*) Die Größe eines Ganzen ist gleich der Summe der Größen der Teile, in die es zerlegt wird.

Und:

- (**) Die Summe unendlich vieler, von Null verschiedener Größen ist unendlich.

Nun ergibt die Konstruktion von (c), wenn jeweils der äußerste Teil der Einheit in zwei gleichgroße Teile zerlegt wird, mit (*) eine Darstellung der Größe der Einheit als geometrische Reihe, etwa

$$(1) \quad E = 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots,$$

und tatsächlich ist diese Reihe ein Gegenbeispiel zu (**). Es gilt nämlich

$$(2) \quad 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots = 1,$$

also $E = 1$ und nicht etwa, wie Zenon zu behaupten scheint,

$$(3) \quad E = 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots = \text{unendlich}.$$

¹¹ Man beachte: Dieses Argument betrifft nur die Einheiten, aus denen Vielheiten gebildet sind. Wenn überhaupt nur Eines existiert, stellt sich die Frage einer Hinzufügung oder Wegnahme nicht.

Zenons Argument wäre demnach hinfällig, weil es auf der falschen Voraussetzung (**) und somit auf einem mathematischen Irrtum beruht.¹²

Aber Zenon könnte mit seinem Paradoxon ein Problem aufgezeigt haben, das in dieser Weise nicht zu erledigen ist. Und zwar handelt es sich dabei um eine Schwierigkeit bei der Größenbestimmung von Körpern. Wir sollten daher zuerst fragen, wie die Größe von Körpern überhaupt bestimmt werden kann, d. h. was wir überhaupt meinen, wenn wir sagen, ein Körper sei soundso groß.

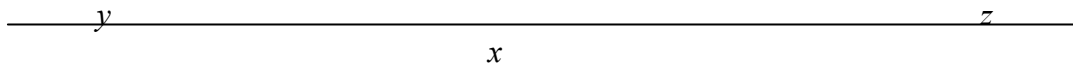
Bei einer Antwort auf diese Frage kommt unvermeidlich ein mathematischer Kalkül der Größenmaße ins Spiel. Aber dessen Beschreibung genügt nicht zur Antwort. Gefragt ist vielmehr, wieso ein solcher Kalkül für die Größenbestimmung von Körpern *einschlägig* ist. Insofern wird die *begriffliche* Analyse durch die *mathematische* niemals ersetzt, vielmehr gewinnt diese erst aus jener ihre Sachhaltigkeit.

Es liegt nahe, die Größenbestimmung von Körpern auf die Messung von Abständen zwischen Körpern oder Orten zurückzuführen. Das heißt, es wird ein Kalkül von *Abstandsmaßen* zugrundegelegt, dessen Einschlägigkeit als unproblematisch vorausgesetzt werden kann; aus diesem wird dann ein Kalkül der *Größenmaße* konstruiert, der für die Größenbestimmung von Körpern einschlägig sein soll.

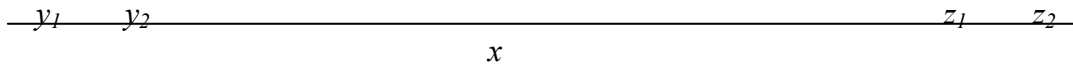
Als notwendige Bedingung für diese Einschlägigkeit könnte Zenon vorausgesetzt haben, daß bei der Größenbestimmung eines Körpers *nicht irgendwelche anderen Körper* (oder Orte außerhalb des fraglichen Körpers) ins Spiel gebracht werden dürften. Die Größe eines Körpers müßte demnach auf ein Verhältnis zwischen dessen Teilen zurückgeführt werden. Zur Charakterisierung dieses Verhältnisses bietet sich der – als bereits verfügbar unterstellte – Abstandsbegriff an. Das heißt, die Größe eines Körpers ist der Abstand gewisser Teile desselben, und zwar nicht beliebiger, sondern der äußersten Teile – oder anders gesagt: Die Größe eines Körpers ist *der maximale Abstand seiner Teile*.

Zenon hätte demnach einerseits gute Gründe gehabt, der Größenbestimmung von Körpern stillschweigend – d. h. ohne Erörterung von Alternativen – diese Definition zugrundezulegen. Andererseits führt seine Argumentation dieselbe Definition ad absurdum. Denn die Größe des Körpers x müßte als der Abstand gewisser Teile y und z bestimmt werden:

¹² Ähnlich Vlastos 1967, 370 f.; vgl. ansonsten die Literaturangaben in Barnes 1982, 619 (Anm. 28 zu S. 246). Eine raffiniertere Version, die sich an Aristoteles, *G.C.* I 2, 316a14 ff., anschließen kann, setzt statt der Teilung zum Rand hin – und somit einer geometrischen Reihe – eine durchgängige Teilung der fraglichen Einheit voraus. Das heißt, das Ganze wird in unendlich viele *unteilbare* Teile zerlegt. Von diesen kann vorausgesetzt werden, daß sie untereinander keinen Größenunterschied aufweisen; ihre Größe ist also entweder jeweils Null, oder sie hat jeweils denselben positiven Betrag. Nach (*) wäre im ersteren Fall auch die Größe der ganzen Einheit gleich Null, im letzteren Fall hingegen wäre diese Größe unendlich. Insgesamt ergäbe sich also das Dilemma (d) direkt aus (*) ohne Rückgriff auf (**). Zenons Fehler müßte demnach in (*) liegen, und tatsächlich wird (*) in der modernen mathematischen Maßtheorie ausdrücklich verneint (vgl. Grünbaum 1967, 121 ff. sowie Barnes 1982, 246 ff. und Caveing 1982, 45 f.). Wie bei der Interpretation durch eine geometrische Reihe beruht Zenons Argument demnach wiederum auf einem mathematischen Irrtum.



Aber y und z sind, wie Zenon in (c) dargelegt hat, ihrerseits teilbar, etwa in y_1 und y_2 bzw. in z_1 und z_2 :



Demnach wären nicht y und z , sondern y_1 und z_2 die äußersten Teile von x , als deren Abstand die Größe von x bestimmt werden soll. Und der Abstand zwischen y_1 und z_2 ist in einem relevanten Sinn *größer* als der Abstand zwischen y und z .¹³ Das heißt, die Größe von x wurde als der Abstand von y und z zu gering angegeben.

Für den Beweis, daß die Größe eines Körpers nicht als der Abstand von Teilen desselben Körpers bestimmt werden kann, ist dies hinreichend. Zenon läßt es sich freilich nicht nehmen, dieses Argument – weitaus eindrucksvoller – als einen unendlichen Regreß der Größenbestimmung zu konstruieren, und die Mathematiker sind ihm in dieser Darstellungsweise bis heute gefolgt. Er macht also darauf aufmerksam, daß auch y_1 und z_2 weiter geteilt werden können, und so fort ad indefinitum, und daß sich also für das Größenmaß des fraglichen Körpers immer größere Werte ergeben. *Das heißt, die Größe des Körpers übertrifft jede Größenbestimmung, die anhand des Abstands seiner Teile – und das heißt: an ihm selbst – konstatiert werden kann.*

Wenn Zenon somit in (d) die Größe des Körpers als "unendlich" bestimmt, muß er mit diesem Ausdruck nicht gemeint haben, daß diese Größe jeden überhaupt nur denkbaren numerischen Wert übertrifft. Sondern sie übertrifft jedes Maß, das als für diesen Körper einschlägige Größenbestimmung ausweisbar ist. Für ein Paradoxon ist dies genug, und auch der Ausdruck "unendlich" sollte gerechtfertigt sein, auch wenn er vorderhand nicht dem heutigen Sprachgebrauch entspricht.¹⁴

¹³ Von Lappland nach Sizilien ist es weiter als von Schweden nach Italien. Und zwar gilt dieser Satz nicht nur für die Abstände der Grenzen, die numerisch scharf bestimmt werden können, sondern insbesondere auch für die *unscharfen Maße*, an denen man sich alltäglich orientiert. Beispielsweise kann jemand, der sich zu einer Reise "von Schweden nach Italien" bereit erklärt hat, eine Reise "von Lappland nach Sizilien" als zu weit ablehnen, ohne daß dies als widersprüchlich aufgefaßt werden müßte. Ein entsprechender *Kalkül unscharfer Größenmaße* kann mathematisch exakt sein, aber selbstverständlich läßt er dann keine numerischen Maßbestimmungen zu.

¹⁴ Fränkel (1942/68, 461 f.) hat in diesem Zusammenhang auf die aristotelische Definition aufmerksam gemacht, unendlich sei, "wovon immer etwas außerhalb liegt" (*Phys.* 207a1). Dieser Begriff des Unendlichen entspricht tatsächlich genau meiner Rekonstruktion des Zenonschen Arguments. Gegen Fränkels Deutung, die alle Versuche gegenstandslos macht, das Paradoxon auf Postulate wie (*) und (**) und somit einen mathematischen Fehler zurückzuführen, hat Furley (1967, 68 f.; zustimmend: Barnes 1982, 619, Anm. 28) eingewandt, daß "this would be to accuse the ancient commentators of a great misunderstanding; for they certainly thought Zeno meant infinitely large. But more seriously, it would also be to rob Zeno's objection of all its force; except the purely verbal success of forcing the pluralists to use the word *apeiron* (d. h. unendlich) for their units. So long as they were not committed

Die moderne Mathematik hilft sich bei diesem Problem bekanntlich mit dem Begriff der kleinsten oberen Schranke. Beim Stand der Mathematik seiner Zeit konnte Zenon diesen Begriff nicht kennen. Er hätte, was die mathematische Stimmigkeit dieser Begriffsbildung angeht, möglicherweise gar keine Einwände gehabt. Aber er hätte vermutlich gefragt, wieso ein solcher Begriff, der auf Größenwerte rekurriert, die jeden Abstand von Teilen des fraglichen Körpers übertreffen, für die Größenbestimmung dieses Körpers einschlägig sein soll. Er hätte eingewandt, daß wir mit dem Heranziehen von oberen Schranken für die Abstände der Teile des Körpers definitiv aufgehört hätten, von diesem Körper zu reden – oder anders gesagt: daß wir mit dem Begriff der kleinsten oberen Schranke versuchen, *von ihm* zu reden, indem wir *von etwas anderem* reden, und daß unsere Rede somit widerspruchsvoll ist.¹⁵

3.

Beide Paradoxa, die ich bis jetzt diskutiert habe, heben dort, wo wir mit wohlbestimmten Grenzen rechnen, die Grenzenlosigkeit dessen hervor, dessen Grenzen wir meinen: des Wettlaufs, der als solcher eben kein Einholen, sondern ein Vorkriechen und Hinterherrennen ist; und des Körpers, der nur anhand seiner Teile erkannt werden kann, dessen Begrenzung aber kein Teil von ihm ist. Das Problem läßt sich, denke ich, treffend mit den Begriffen der modernen Mathematik formulieren:

Die Strecke, die Achilleus zurücklegt (vom Start bis zum Einholen der Schildkröte) ist ein beschränktes Intervall im reellen Kontinuum. Ebenso ist das Volumen des auszumessenden Körpers ein beschränktes Gebiet im euklidischen Raum. Im Hinblick auf die topologische Struktur des *umfassenden* Kontinuums oder Raums können wir den *Rand* des fraglichen Intervalls oder Gebiets definieren und von dessen *Inneren* unterscheiden. Wir können beweisen, daß ein solcher Rand existiert, und wir können zeigen, daß Achilleus an einem solchen Randpunkt die Schildkröte einholen muß bzw. daß die Größe eines Körpers gleich dem maximalen Abstand seiner Randpunkte ist.

to infinite extension they might well be willing to make this concession." – Dieser Einwand ist zweifellos insofern treffend, als keine Rekonstruktion des Zenonschen Arguments darüber hinweggehen kann, daß Zenon die fraglichen Einheiten als *unendlich groß* charakterisiert. Aber nicht dies ist die Frage, sondern vielmehr, was der Begriff 'unendlich groß' überhaupt bedeutet. Und hierfür bietet sich die Alternative an, als unendlich groß zu bestimmen,

- entweder, was jeden *überhaupt nur denkbaren* Größenwert,
- oder, was jeden *einschlägigen* Größenwert

übertrifft. Man kann evtl. bezweifeln, daß Zenon oder irgendein antiker Kommentator diese Alternative ausdrücklich in Betracht gezogen haben. Aber nachdem diese Alternative einmal aufgestellt ist, kann man nicht mehr übersehen, daß sich dabei aus Zenons Formulierungen entweder ein schlichter mathematischer Unfug oder ein gültiges Argument ergibt.

¹⁵ Zusatz (Nov. 2014): Ich habe es seinerzeit versäumt, auf die mit dem Satz von der oberen Grenze verbundenen grundlagentheoretischen Probleme hinzuweisen. Grob gesagt, liefert dieser Satz nur bei Zulassung imprädikativer Begriffsbildungen (oder mit dem ad hoc eingeführten Reduzibilitätaxiom der *Principia Mathematica*) das volle mathematische Kontinuum. Dazu Weyl 1928/76, 69 f.

Aber wir können das nur deshalb, weil wir unseren Gegenstand (die Laufstrecke bzw. das Volumen des Körpers) von vornherein als beschränktes Intervall oder Gebiet in einem umfassenden topologischen Raum betrachten. Nun ist aus der Mathematik bekannt: Jede Teilmenge eines topologischen Raums, mit der topologischen Struktur, die sich für ihre Elemente und Teile aus der Topologie des Gesamtraums ergibt, ist wieder ein topologischer Raum.¹⁶ Das heißt, diese restringierte topologische Struktur ist als Struktur der Teilmenge durchaus adäquat, und wenn man ausschließlich diese Teilmenge betrachtet, kann man an ihrer topologischen Struktur nicht mehr erkennen, daß sie aus einem umfassenden topologischen Raum herausgeschnitten wurde. An ihr selber ist nichts, das auf ihre Einbettung in jenen umfassenden Raum verweist. Daher sollte nun, wenn man auch die Randpunkte abgeschnitten hat (was mathematisch zulässig ist), auch keine Rede mehr davon sein, daß diese Teilmenge beschränkt ist: sie ist es nicht an ihr selbst, als selbständiger topologischer Raum, sondern nur durch ihre Einbettung in einen umfassenderen Raum. An ihr selbst kann sie in einem wohldefinierten mathematischen Sinne unbeschränkt sein.¹⁷

Wir sollten nun diesen Perspektivwechsel vollziehen und das fragliche Intervall oder Gebiet nicht in einem umfassenden topologischen Raum (im ganzen reellen Kontinuum oder im euklidischen Raum) betrachten, sondern als selbständigen topologischen Raum mit seiner eigenen Struktur. Demgemäß sollten wir diese Struktur auch nicht durch Übertragung von jenem umfassenden Raum auf den Teil, der uns interessiert, sondern im Rahmen einer Betrachtung ausschließlich dieses Teils definieren. Das ist durchaus möglich – ich brauche es hier nicht auszuführen, weil die Hauptsache schon in der Diskussion der beiden Paradoxa dargestellt wurde.

Wenn wir also das Innere des fraglichen Intervalls oder Gebiets in dieser Weise betrachten, dann zeigt sich erstens, daß dieses Intervall oder Gebiet *unbeschränkt* ist. Genau in diesem Sinn, nämlich unbeschränkt zu sein, hat Zenon die Laufstrecke und das Volumen des Körpers als *unendlich* bezeichnet.¹⁸ Und zweitens zeigt sich, daß wir dieses Intervall oder Gebiet zwar

¹⁶ Das ist die sogenannte Spurtopologie, vgl. etwa Franz 1968, 37 f.

¹⁷ Um den Begriff 'beschränkt' bequem einführen zu können, betrachte ich von vornherein einen metrischen Raum (X, d) . Eine Teilmenge M von X ist genau dann beschränkt, wenn eine obere Schranke für die Abstände von Elementen von M existiert. Diese Bedingung wird üblicherweise (vgl. z.B. Franz 1968, Df. 22.1, p. 83) in der Form

$$\exists r \in \mathfrak{R} \forall x, y \in M: d(x, y) \leq r$$

angegeben; dabei ist \mathfrak{R} Menge der reellen Zahlen. In einem stärkeren Sinne beschränkt ist M , wenn stattdessen gilt:

$$\exists a, b \in M \forall x, y \in M: d(x, y) \leq d(a, b).$$

In diesem Sinn ist jedes offene (oder halboffene) Intervall, mit seiner eigenen (Spur-)Topologie, unbeschränkt; d.h. jedes beschänkte Intervall ist kompakt. (Anm. und zugehöriger Haupttext red. Nov. 2014).

¹⁵ Die aristotelische Definition, unendlich sei, wovon immer etwas außerhalb liegt (*Phys.* III 6, 207a1), ergibt nicht nur, wie dargelegt, eine schlüssige Interpretation des Paradoxons der Ausdehnung,

in einen umfassenden topologischen Raum *einbetten* können, in dem es dann beschränkt ist (so daß Achilleus die Schildkröte einholt und der Körper eine endliche Größe hat), daß diese Einbettung aber immer nur unsere Zutat zu dem sein kann, was uns vorliegt: d. i. der Wettlauf (also was Achilleus tut, um die Schildkröte einzuholen, und was die Schildkröte tut, um nicht eingeholt zu werden) bzw. das Innere des Körpers (wie er aus seinen Teilen aufgebaut ist).

Für Zenon kommt eine solche Einbettung nicht in Betracht. Die Paradoxa, die ich diskutiert habe, entstehen gerade dadurch, daß Zenon auf eine Einbettung verzichtet. Und unsere Vorstellungen von Körpern, als beschränkten Volumina, und von Bewegungen, so daß Achilleus die Schildkröte einholen muß, beruhen darauf, daß wir die Einbettung immer schon vollzogen haben, ohne darüber Rechenschaft abzulegen. Wie Zenon gezeigt hat, können wir aus der Sache, die unser jeweiliger Gegenstand ist, diese Einbettung nicht begründen. Sondern wir bestimmen das, was uns vorliegt, von vornherein aus dem, was uns nicht vorliegt. Wir verstoßen gegen die Regel, die Parmenides aufgestellt hat und von der wir doch meinen sollten, daß sie ein unhintergebares Kriterium alles Wissens aufstellt: Man muß sagen und denken, daß dasjenige, was ist, ist;¹⁹ oder etwas weiter gefaßt: von dem, was ist, muß man sagen und denken, daß es ist und was es ist – stattdessen aber sagen und denken wir, was es nicht ist, und nur so glauben wir, was es ist, erkennen zu können.

4.

Ein weiteres Argument gegen die Vielheit betrifft deren Anzahl.

- (a) "Wenn Viele sind, dann sind sie notwendigerweise gerade soviele, wie viele sie eben sind, und nicht mehr als eben soviele und nicht weniger. Wenn sie aber gerade soviele sind, wieviele sie eben sind, werden sie (sc. in ihrer Anzahl) begrenzt sein.
- (b) Wenn Viele sind, sind die Seienden unendlich viele. Denn immer sind Andere zwischen den Seienden, und wiederum Andere zwischen diesen. Und auf diese Weise sind die Seienden unendlich viele." (DK 29 B 3)

Da es hier ausdrücklich um Anzahlen geht, ist der Ausdruck 'unendlich' im zweiten Teil zweifellos im numerischen Sinn zu verstehen: Zenon behauptet, daß die Vielheit der Seienden jede bestimmte Zahl übertrifft; und dabei besteht kein Zweifel, daß für ihn nur die sogenannten natürlichen Zahlen, also die Zahlen 2, 3, 4, 5, ... in Betracht kommen können. Anfechtbar ist daher auch zunächst eher Zenons erste Behauptung, sofern etwa die folgende Voraussetzung in sie einzugehen scheint:

- (*) Wenn gewisse Entitäten gerade soviele sind, wieviele sie eben sind, dann muß ihre Anzahl durch eine der natürlichen Zahlen bestimmt sein.

sondern sie trifft insbesondere auch die Bedeutung des Worts *prochein*, das dieses Paradoxon mit dem 'Achilleus' terminologisch verbindet.

¹⁹ Parmenides DK 28 B 6.1. Zur Übersetzung vgl. Calogero 1932, 22 (mit Anm.), ähnlich Diels 1922 sowie DK. Anders Heitsch 1974, Mansfeld 1983; Kirk et al. 1983, Barnes 1982, 158. – Zusatz (Nov.

Sollte Zenon mit dieser Voraussetzung operieren, dann kann man auch den Ausdruck 'begrenzt' im numerischen Sinn interpretieren. Zenon scheint dann folgendermaßen zu argumentieren:

- (a) Weil die Seienden gerade so viele sind, wieviele sie eben sind, gibt es nach (*) eine natürliche Zahl, die ihre Anzahl bestimmt.
- (b) Weil zwischen den Seienden immer wieder andere Seiende sind, gibt es keine natürliche Zahl, die ihre Anzahl bestimmt.

Und daraus ergibt sich, was Zenon zu zeigen beabsichtigt, daß nämlich überhaupt nicht viele Seiende existieren können.

Die Kritik richtet sich, wie gesagt, zunächst gegen (a), und zwar insbesondere gegen die Voraussetzung (*). Man kann leicht einwenden, daß die natürlichen Zahlen selber ein Gegenbeispiel zu (*) liefern – vorausgesetzt freilich, die natürlichen Zahlen sind "gerade so viele, wieviele sie eben sind". Zenon hätte dann aber immer noch die Wahl, entweder diese letztere Voraussetzung irgendwie in Frage zu stellen oder aber gerade in diesem Einwand eine Bestätigung seiner Ablehnung des Vielen – und somit insbesondere der Existenz einer Zahlenreihe! – zu finden.²⁰ Ein starker Einwand gegen (*) ergäbe sich vielmehr erst aus der modernen Mengenlehre, sofern diese die Anzahl von Vielheiten evtl. durch unendliche Zahlen bestimmt.²¹ Zenon hätte dann freilich immer noch das Verdienst, ein Problem aufgezeigt zu haben, das erst mit den Mitteln der Mengenlehre gelöst werden konnte.

Aber ist das Problem auf diese Weise gelöst? Nehmen wir an, in (a) sei der Begriff 'natürliche Zahl' durch 'Kardinalzahl' ersetzt; dabei verstehen wir zunächst ganz untechnisch unter einer Kardinalzahl die – eventuell jede natürliche Zahl übertreffende – Anzahl der Elemente einer Menge, z. B. der Menge aller Bleistifte auf meinem Tisch oder der Menge der natürlichen Zahlen oder auch der Menge alles dessen, was überhaupt existiert. So verstanden, ist der Begriff 'Kardinalzahl' gerade darauf abgestellt, die Voraussetzung (*) des Zenonschen Arguments wahr zu machen. Das heißt, wenn eine Frage der Form "Wieviele sind dies?" überhaupt beantwortet werden kann – und "mehr als jede natürliche Zahl" ist auch eine Antwort! –, dann soll sie auch durch die Angabe einer Zahl, eben der Kardinalzahl der fraglichen Menge, beantwortbar sein. Der Ausdruck 'begrenzt' im ersten Teil des obigen Zenon-Zitats erhält somit die Bedeutung: von wohlbestimmter – aber eben nicht notwendigerweise endlicher – Anzahl.

2014): Vgl. jetzt auch Abschnitt 2.4.6. in *Die Fragilität der Weisheit* sowie bes. Handout 3.3. meiner *Materialien zur antiken Philosophie*.

²⁰ Vgl. Vlastos 1967, 371b: "His (d.h. Zenons) Eleatic faith that only the One exists would have derived further comfort from the assurance that even that paradigmatic aggregate, the number series, is flawed by contradiction."

²¹ So auch Vlastos, ebd.: Das Argument für (a) "is so strong that it is hard to see how anyone could have broken it before the demonstration of transfinite cardinals ... by Georg Cantor." Barnes (1982, 252 f.) setzt Cantors Methoden in seiner Diskussion stillschweigend voraus.

Die Behauptung (a) scheint nach dieser Modifikation unangreifbar zu sein. Und der Widerspruch zwischen (a) und (b) ist scheinbar eliminiert, denn in (b) wird gezeigt, was nach (a) nicht mehr ausgeschlossen ist, nämlich daß die Seienden unendlich viele sein müssen. Denn betrachten wir die in (b) angegebene Konstruktion: Sie besagt nicht mehr, als daß zwischen je zwei Entitäten stets wieder andere liegen und daß daher die Anordnung der Entitäten, der Einfachheit halber auf einer Linie betrachtet, insgesamt der Dichte der rationalen Zahlen entspricht. Für die Kardinalzahl der Menge aller Seienden folgt daraus nur, daß sie größer oder gleich der Kardinalzahl der Menge der rationalen Zahlen sein muß, und dies ist nach (a), wenn dort der Begriff 'Kardinalzahl' eingesetzt wird, durchaus zulässig.

Wenn wir freilich das Zenonsche Argument in seinem ersten Teil korrigieren, um das von Zenon aufgeworfene Problem als gelöst darzustellen, müssen wir zur Verteidigung des Paradoxons auch eine entsprechende Korrektur im zweiten Teil zulassen. Dabei sollten wir uns zunächst die Strategie vergegenwärtigen, die Zenon bei der Konstruktion des Paradoxons verfolgt hat:

- In (a) werden die Seienden zunächst auf eine bestimmte Anzahl festgelegt; diese Anzahl sei n .
- In (b) wird dann ein Verfahren beschrieben, wie bei vorliegenden n Entitäten gezeigt werden kann, daß darüber hinaus noch weitere Entitäten existieren. Und zwar geht Zenon davon aus, daß die vorliegenden n Entitäten, die vermeintlich alle Seienden ausmachen, irgendwie räumlich angeordnet sein müssen; der Einfachheit halber sollten wir sie uns entlang einer Linie aufgereiht vorstellen. Und weil dann, wie Zenon weiter voraussetzt, zwischen je zwei Entitäten wieder eine andere Entität liegen muß, erhalten wir mit der gegebenen Anordnung der vorliegenden n Entitäten sogleich noch $n-1$ weitere Entitäten, die bislang unberücksichtigt blieben. Die Anzahl aller Seienden wird somit von n auf $2n-1$ korrigiert.

In der Sprache der Mengenlehre formuliert, kommt Zenons Strategie also darauf hinaus, *jede Festlegung der Gesamtheit der Seienden auf eine Menge mit einer bestimmten Kardinalzahl nach oben zu korrigieren*. Worauf es dabei ankommt, ist ein Verfahren, nach dem aus jeder Behauptung der Form

(a*) Die Gesamtheit der Seienden ist die Menge M

eine Gegenbehauptung der Form

(b*) Die Gesamtheit der Seienden umfaßt zumindest die Menge M' , und es ist

$$\text{card}(M) < \text{card}(M')$$

ableitbar ist. Ein solches Verfahren besteht insbesondere darin, zu jedem für (a*) in Betracht kommenden M nach einer festen Regel ein geeignetes M' anzugeben, für das dann (b*) gezeigt werden kann. Dabei leistet die von Zenon verwendete Regel nur für endliche M das Gewünschte (und überdies unter weiteren Voraussetzungen über die räumliche Anordnung der Seienden, die noch zu diskutieren sind). Aber das heißt keineswegs, daß nicht mit weiterent-

wickelten mathematischen Methoden andere Regeln gefunden werden können, deren Anwendung auf beliebige M eine Ableitung von (b*) aus (a*) ermöglicht.

Wer ein wenig Mengenlehre gelernt hat, weiß, daß eine solche Regel tatsächlich existiert: man braucht nur M' als die Potenzmenge $P(M)$ von M zu bestimmen. Dann gilt jedenfalls $\text{card}(M) < \text{card}(M')$, und es bedarf nur einer kurzen Überlegung, um einzusehen, daß auch die erste Teilaussage von (b*) erfüllt ist, d. h. daß M die Potenzmenge $P(M)$ umfaßt:

- Definitionsgemäß ist $P(M)$ die Menge aller Teilmengen von M . Das heißt, die Elemente von $P(M)$ sind jedenfalls Mengen; und zwar gehört irgendeine Menge A genau dann zu $P(M)$, wenn A eine Teilmenge von M ist, d. h. wenn alle Elemente von A auch Elemente von M sind. Dabei war M als die Menge aller Entitäten bestimmt; also ist A genau dann eine Teilmenge von M und folglich ein Element von $P(M)$, wenn A aus lauter Entitäten besteht.
- In (b*) wird behauptet, daß $P(M)$ eine Teilmenge von M ist. Zum Nachweis dieser Behauptung ist das soeben aufgestellte Kriterium auf $P(M)$ selbst anzuwenden, d. h. es ist zu zeigen, daß $P(M)$ aus lauter Entitäten besteht. Wir haben schon eingesehen: Die Elemente von $P(M)$ sind Mengen von Entitäten. Zu zeigen bleibt also: Jede Menge von Entitäten ist selbst wiederum eine Entität.
- Aber dies sollte selbstverständlich sein, wenn wir uns überhaupt auf eine Theorie wie die Mengenlehre eingelassen haben. Denn von einer Entität wird nichts anderes verlangt, als daß sie überhaupt existiert. Und das kann bei einer Menge, die als Teilmenge von M und als Element von $P(M)$ bestimmt worden ist, schwerlich verneint werden; wer etwa behauptet, A sei ein Element von $P(M)$, aber A existiere nicht, sagt zwar vielleicht nichts Widersprüchliches, aber doch etwas Unsinniges. Wenn man überhaupt Mengenlehre treibt, dann betrachtet man Mengen eben auch als Entitäten.

Der Widerspruch kann nun unschwer ausdrücklich gemacht werden: Wenn man die Anzahl aller Seienden mit n^* bezeichnet, dann ist nach (a*)

$$n^* = \text{card}(M).$$

Nach dem soeben gezeigten umfaßt M die Menge M' , wobei $M' = P(M)$, also ist einerseits

$$\text{card}(M) \geq \text{card}(M'),$$

andererseits aber nach allgemeinen Sätzen der Mengenlehre²²

$$\text{card}(M) < \text{card}(P(M))$$

und somit

$$\text{card}(M) < \text{card}(M').$$

²² Der Beweis ist elementar und allen Mathematikern bekannt (vgl. die leicht zugängliche Darstellung in Kirsch 1987, 279), aber eine allgemeinverständliche Darstellung wäre an dieser Stelle zu aufwendig.

Insgesamt ergibt sich daher

$$n^* = \text{card}(M) < \text{card}(M') \leq \text{card}(M) = n^*,$$

also $n^* < n^*$. Das Argument (b*) führt also zu einer Widerlegung von (a*), die sich direkt auf Zenons eigene Formulierung von (a) zurückbeziehen läßt: Wie in (b*) gezeigt wurde, sind die Seienden *nicht* "eben soviele, wieviele sie eben sind", sondern "mehr (oder auch weniger) als eben soviele".

In der Mathematik kennt man diesen Widerspruch als die *Cantorsche Antinomie*. Ein Resumé hat Cantor selbst so formuliert:

"Eine Vielheit kann ... so beschaffen sein, daß die Annahme eines 'Zusammenseins' aller ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die Vielheit als Einheit, als 'ein fertiges Ding' aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich absolut unendliche oder inkonsistente Vielheiten.

Wie man sich leicht überzeugt, ist z. B. der 'Inbegriff alles Denkbaren' eine solche Vielheit ..."²³

Durch das obige Argument wird also die von Zenon in Betracht gezogene Gesamtheit aller Entitäten als, wie Cantor sagt, *absolut unendlich* erwiesen; in heutiger Terminologie würde man sagen, daß M keine Menge im engeren Sinn, sondern eine *echte Klasse* sein muß. Und zwar unterscheiden sich echte Klassen insbesondere dadurch von gewöhnlichen Mengen, daß die Anzahl der Elemente einer echten Klasse durch keine Kardinalzahl bestimmt werden kann. Das heißt, bei einer echten Klasse kann die Frage "Wieviele sind dies?" jedenfalls nicht durch die Angabe einer Kardinalzahl beantwortet werden. Und somit ergibt sich genau diejenige Situation, die bereits Zenon konstatiert hat: Wer die Frage, wieviele Entitäten es gibt, durch eine Zahl zu beantworten versucht, sei dies nun eine der natürlichen Zahlen oder eine Kardinalzahl, wird in Widersprüche verwickelt.

Und wer glaubt, dem Problem durch eine Vermeidung des Zahlbegriffs zu entgehen, wird gleichfalls enttäuscht. Denn der für Mengen einschlägige Zahlbegriff, d. h. der Begriff der Kardinalzahl, ist selber durch eine Analyse dessen geprägt, wonach mit dem Ausdruck 'wie viele?' gefragt wird. Die einfachste Antwort, die man auf eine derartige Frage erwartet, ist dieser Analyse zufolge von der Form 'ebenso viele, wie ...' oder 'mehr (bzw. weniger) als ...'. Und für eine derartige Antwort ist keine Zählung erforderlich, sondern es genügt der *direkte Vergleich* der beteiligten Mengen: Es gibt *ebensoviele A wie B* genau dann, wenn sich die Elemente beider Mengen einander eineindeutig zuordnen lassen (das heißt, wenn eine Paarbildung aufgeht); und es gibt *mehr B als A* genau dann, wenn bei jeder Zuordnung je eines Elements von B zu jedem Element von A die Menge B unausgeschöpft bleibt (das heißt, wenn keine derartige Paarbildung aufgehen kann). Diese Begriffsbildung liegt der Einführung von Kardinalzahlen und auch dem Beweis des Satzes $\text{card}(M) < \text{card}(P(M))$ zugrunde, der in

²³ Brief an Dedekind, 28. Juli 1899, hier zit. nach Becker 1964, 308 f. Vgl. zur Cantorschen Antinomie auch Heinemann 1988, 169 ff.

obiger Argumentation aus der Mengenlehre zitiert werden mußte. Das heißt, man braucht für diese Argumentation und somit für eine mengentheoretische Rekonstruktion des Zenonschen Paradoxons keinen Zahlbegriff, sondern nur die Zurückführung der Begriffe 'ebenso viele, wie' und 'mehr als' auf einen direkten Mengenvergleich; und das Paradoxon zeigt, daß die grundlegenden Regeln für einen solchen Vergleich auf die Gesamtheit der Seienden nicht anwendbar sind. Die Frage, wieviele Entitäten es gibt, kann also auf diese Weise nicht beantwortet werden – und es bleibt ganz offen und rätselhaft, wie sie überhaupt beantwortet werden soll.

5.

Wenn viele sind – so kann man die bisherige Diskussion des Paradoxons der Anzahl (DK 29 B 3) resumieren –, dann läßt sich die Frage nicht mehr beantworten, wieviele sie sind. Dieses Theorem Zenons und auch seine Beweisstrategie werden durch die moderne Mengenlehre bestätigt. Als unzureichend hat sich nur die mathematische Konstruktion erwiesen, die Zenon bei der Durchführung seines Beweises verwandte. Unter einem anderen Aspekt verdient diese Konstruktion aber größtes Interesse.

Zenon setzt im zweiten Teil seines Arguments voraus:

(*) Zwischen verschiedenen Entitäten müssen sich stets weitere Entitäten befinden.

Gegenüber der Konstruktion im ersten Ausdehnungsparadoxon (DK 29 B 1-2, Teil (c)), jedenfalls wie diese gemeinhin verstanden wird, ergibt sich somit eine gewisse Modifikation: Ein Körper kann nicht umstandslos in zwei Teile x und y zerlegt werden. Denn x und y wären ihrerseits Entitäten, zwischen denen sich nach (*) noch weitere Entitäten befinden; daher haben wir zwischen x und y mindestens einen weiteren Teil z des zu teilenden Körpers zu erwarten, und dann zwischen x und z sowie zwischen z und y jeweils wiederum einen weiteren Teil usf. ad indefinitum.²⁴ Was daher überhaupt in verschiedene Teile zerlegt werden kann, wird auf diese Weise zwangsläufig in unendlich viele Teile zerlegt.

Man kann (*) nun auf verschiedene Weisen interpretieren: Entweder betrachtet man von vornherein zwei räumlich getrennte Körper x und y und fragt dann, was sich in dem Raum zwi-

²⁴ Diese Modifikation verbietet jedenfalls die Ableitung einer geometrischen Reihe für die Größe des fraglichen Körpers. Vlastos, der seiner Interpretation von DK 29 B 1-2 eine solche Reihe zugrundegelegt hat, kann daher das Verhältnis zwischen den Konstruktionen in B 1-2 und in B 3 nur folgendermaßen erörtern: "Is (D 1) – d.i. mein (*) – puzzling in view of the fact that the preceding argument – d.i. B 1-2 – allowed for (and, as interpreted, entailed) the distinctness of contiguous existents? Not if we remember Zeno's dialectical method, which picked its premises wherever it found them." (1967, 371b) – Diese Charakterisierung der Zenonschen Methode ist grundsätzlich gar nicht zu bestreiten, aber man sollte sie auch nicht unnötig strapazieren. Daher ist es nicht ohne Belang, daß bei meiner obigen Interpretation von B 1-2 auf die Berührung verschiedener Teile des fraglichen Körpers kein Wert gelegt werden muß. Es kommt nur darauf an, daß auf jeder Stufe der Teilung jeweils *äußerste* Teile existieren. Und diese sind als solche von (*) nicht betroffen. Wenn man daher B 1-2 so interpretiert, wie ich es vorgeschlagen habe, dann ist die Modifikation, die sich aus (*) für das Argument von B 1-2 ergibt, letztlich irrelevant.

schen ihnen befindet. Man kann dann auf die Eleatische Doktrin rekurren, daß kein leerer Raum existiert und der fragliche Zwischenraum daher durch weitere Körper ausgefüllt werden muß. So betrachtet, könnte freilich ein einziger Körper z genügen, der den Zwischenraum ausfüllt; es ist schwer einzusehen, wieso sich dann auch, wie Zenon behauptet, zwischen x und z sowie zwischen z und y noch weitere Körper befinden müssen. Man behilft sich dann oftmals mit dem Argument, zwei Dinge seien "nur dann zwei, wenn sie voneinander getrennt sind", und hierfür müsse "etwas zwischen ihnen sein";²⁵ das heißt, ohne Trennung durch einen weiteren Körper wären x und z gar nicht zwei verschiedene Körper, sondern derselbe. – Aber warum das so sein muß und warum dieser Gedanke der Zenonsche ist, bleibt erklärungsbedürftig.

Oder man beginnt umgekehrt mit der Frage, wie ein Körper überhaupt in zwei Teile x und y geteilt werden kann. Ein leerer Raum, der irgendwie ausgefüllt werden muß, kommt auf diese Weise gar nicht in Betracht. Vielmehr ist die Welt lückenlos mit Körper(n) erfüllt, und es fragt sich nur, inwiefern dies viele verschiedene Körper sein können und der massive Gesamtkörper der Welt somit in verschiedene Körper geteilt ist. Man kann dann so argumentieren: Bei einer schlichten Zweiteilung eines gegebenen Körpers besäßen die Teile x und y einen *gemeinsamen Rand*. Daher fragt sich, was bei der Teilung mit diesem Rand geschieht.²⁶ Grundsätzlich gibt es hierfür drei Möglichkeiten:

- (i) Der gemeinsame Rand wird einem der beiden Körper zugeschlagen oder irgendwie zwischen ihnen aufgeteilt. Aber dann müßte es irgendeinen Grund geben, warum das in einer bestimmten Weise und nicht anders geschieht (warum der gemeinsame Rand z. B. zu x gehören soll und nicht zu y);²⁷ ein solcher Grund läßt sich aber schwerlich bestimmen.
- (ii) Der gemeinsame Rand gehört zu beiden Körpern. Aber dann findet gar keine Zerlegung statt; diese Möglichkeit kann also von vornherein ausgeschlossen werden.
- (iii) Der gemeinsame Rand gehört weder zu x noch zu y . Dann liegt eigentlich schon eine Dreiteilung des ursprünglichen Körpers vor, nämlich in x , y und den gemeinsamen Rand. Aber ein Teil seines Körpers muß selber wieder ein Körper sein, und das ist dieser Rand nicht; das heißt, bei der Teilung bleibt etwas übrig, dessen Status ungeklärt ist.

²⁵ So bereits Zeller 1876, 543; ebenso Kirk et al. 1983, 266; Owen 1957-8, 151 f.; dagegen Fränkel 1942/68, 427 f.

²⁶ Zenon hat die Ränder der in DK 29 B 1-2 und im 'Achilleus' betrachteten Kontinua so kunstvoll wegdefiniert, daß man ihm diese Frage durchaus zutrauen sollte.

²⁷ Daß die Alten die Forderung nach einem hinreichenden Grund für eine Asymmetrie als Argument einzusetzen wußten, zeigt sich bereits bei Anaximandros, wo dieser das Verharren der Erde im Mittelpunkt der Welt letztlich dadurch erklärt, daß er jeden diesbezüglichen Erklärungsbedarf aus Symmetriegründen verneint (Nr. 10 in Kahns Doxographie, Kahn 1960, 53 ff., 76 ff.; dasselbe Argument ausführlicher bei Platon, *Phaidon* 108E f.).

Die Annahme eines gemeinsamen Randes verschiedener Teile eines Körpers führt also zu erheblichen Schwierigkeiten,²⁸ die vermieden werden, wenn man von vornherein fordert:

(**) Verschiedene Teile eines Körpers haben keinen gemeinsamen Rand.

Bei Annahme eines massiven Gesamtkörpers, der in verschiedene Körper eingeteilt werden soll, ergibt sich hieraus sogleich Zenons Voraussetzung (*): Wenn die Teile x und y keinen gemeinsamen Rand haben, dann befindet sich zwischen ihnen mindestens ein weiterer Körper, und dieser kann seinerseits weder mit x noch mit y einen gemeinsamen Rand haben, und so fort, wie Zenon es ausgeführt hat.²⁹

Wer eine Vielheit von Körpern und überdies die Voraussetzung (**) akzeptiert, steht folglich vor dem Dilemma, *entweder* mit Zenon das Seiende als insgesamt massiv anzusetzen und die von Zenon aufgezeigte Konsequenz in Kauf zu nehmen, daß nicht angegeben werden kann, wieviele Körper es gibt; wenn man überdies die verschiedenen Körper, d. h. Teile des insgesamt massiven Gesamtkörpers, als evtl. verschiedenartig ansetzt, ergibt sich etwa die von Anaxagoras behauptete vollständige Durchmischung der Stoffe. *Oder* man entscheidet sich für einen Gedanken, der den Älteren ganz unzugänglich war, dann von Parmenides implizit und von Melissos, Empedokles und Anaxagoras explizit verneint und schließlich von den Atomisten akzeptiert wurde: daß verschiedene Körper durch einen *leeren Raum* – und auch nur so – getrennt sein können,³⁰ massive Körper müßten demnach unteilbar sein, d. h., sie hätten gerade die Eigenschaften der von Leukipp und Demokrit eingeführten *Atome*.

²⁸ Owen vertritt, wie gesagt, die erste Deutungsvariante zu (*) und wendet dann ein, zur Trennung verschiedener Dinge genüge ein gemeinsamer Rand und es sei "absurd to ask what separates them from their edges, absurd for the reason that Plato and Aristotle drove home, that the edge of a thing is not another thing of the same type as what it borders, not a part that can be cut off from its possessor." (1957-8, 151 f.) Nach der zweiten Deutungsvariante muß Zenon diese absurde Frage gar nicht gestellt haben, sondern nur, zu welchem der beiden Körper der gemeinsame Rand gehört. Dieser Frage, die auch für die moderne Topologie eine entscheidende ist, widmet Aristoteles in den Büchern IV und VI der 'Physik' die größte Sorgfalt, und bei seiner Wiederaufnahme der Zenonschen Probleme im Buch VIII sagt er ausdrücklich, bei der Teilung eines Kontinuums betrachte man jeden Teilungspunkt als zwei Punkte, nämlich als Anfang und Ende (*Phys.* VIII 8, 263a23 ff., vgl. Guthrie, *HGP* II, 99). Die Verschiedenheit des Status von Rändern und Körpern, auf die Owen aufmerksam macht, steht dem durchaus nicht entgegen.

²⁹ Insofern kann man mit Fränkel (1942/68, 430 f.) sagen, daß sich Zenons Argumentation auf die Struktur des Kontinuums bezieht. Aber es sollte doch hinzugefügt werden, daß dieses Kontinuum nicht einfach das mathematische, sondern ein von Körpern erfülltes ist, d. h., daß Zenon eben *die Kontinuumsstruktur von Körpern (und an anderen Stellen von Bewegungen) diskutiert*. Die mathematische Abstraktion als solche bereitet sich bei Zenon erst vor, und zwar in dem identischen Vokabular, das Zenon bei der Erörterung verschiedener Fälle verwendet (z. B. der Terminus *prochein*). Erst Aristoteles kann eine allgemeine Theorie der Kontinua abstrakt – d. h. explizit verallgemeinernd – formulieren.

³⁰ Nach Kirk et al. ist der Begriff des Leeren "probably an Eleatic invention" (1983, 341); ähnlich Guthrie (*HGP* II, 33) zu Parmenides (DK 28 B 8.25): "It is evident that earlier and contemporary thinkers were still far from grasping the notion of empty space or vacuum. Parmenides faced them with it, and showed that on their own premises it was an impossible conception." – Ansonsten:

Daß Zenon und seine Nachfolger tatsächlich so argumentierten, wie ich es skizziert habe, will ich nicht mit Bestimmtheit behaupten. Aber sie hätten so argumentieren können. Und die Existenz einer von Zenon ausgehenden Argumentationslinie, in die sich die naturphilosophischen Doktrinen des mittleren 5. Jahrhunderts zwanglos einordnen lassen, ist wohl auch für die historisch orientierte Forschung bedeutsam.

Schlußbemerkung: In den diskutierten Paradoxa treten mathematische Fragen hinter grundsätzlicheren Problemen zurück. Die Diskussion der Paradoxa kommt zwar ohne Klärung solcher Fragen nicht aus, denn anders wäre die Triftigkeit der Zenonschen Argumente gar nicht zu beurteilen; und angesichts der dürftigen Quellenlage müssen wir den mathematischen Aspekten Zenonscher Argumente als Hinweisen für deren Rekonstruktion sogar besondere Aufmerksamkeit schenken. Aber zur Lösung der von Zenon aufgezeigten Probleme trägt die Mathematik am wenigsten bei. Evtl. kann sie zur Beschreibung der von Zenon diskutierten Sachverhalte konsistente Theorien vorschlagen. Aber der Anspruch, Zenons Argumente würden auf diese Weise entkräftet, ließe sich nur dadurch einlösen, daß erstens die Widerspruchsfreiheit und zweitens die Einschlägigkeit dieser Theorien für die fraglichen Sachverhalte gezeigt würde, und zumindest das letztere ist keine mathematische Frage.³¹ Und selbst wenn Zenons Argumente durch die seitherige Entwicklung der Mathematik überholt zu sein scheinen, hat es sich als lohnend erwiesen, sie entsprechend zu verbessern (wie man es ja in der Mathematik auch sonst zu tun pflegt, denn kaum ein alter Beweis hält heutigen Ansprüchen stand).

Zitierte Literatur:

Aristoteles: *Physica* zit. nach Ross 1936; *De generatione et corruptione* zit. nach Joachim 1922

Barnes, Jonathan [1982]; *The Presocratic Philosophers*, rev. ed. London: Routledge

Beck, A. [1979]: Ein Paradoxon: Der Hase und die Schildkröte, in *Selecte Mathematica V*, hg. von K. Jacobs, Berlin etc.: Springer, S. 1-21

Becker, Oskar [1964]: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, repr. Frankfurt: Suhrkamp 1975

Melissos DK 30 B 7; Empedokles DK 31 B 13 (vgl. aber Kirk et al. 1983, 409 Anm. 2); Anaxagoras nach Aristoteles, *Phys.* 213a22.

³¹ Beispielsweise wären die Aporien des Achilleus (DK 29 A 26) und der Ausdehnung (B 1-2) durch eine Einbettung in das reelle Kontinuum bzw. in den euklidischen Raum gelöst. Aber diese Lösung ist *irrelevant*, solange die Einschlägigkeit dieser mathematischen Konzepte für die Beschreibung von Wettläufen bzw. für die Größenbestimmung von Körpern nicht dargetan ist. Und sie bleibt ohnehin eine *bloße Behauptung*, solange die Konsistenz der fraglichen entsprechenden mathematischen Theorien nicht gezeigt worden ist. Dieses Konsistenzproblem sollte nicht unterschätzt werden: immerhin impliziert das zur Einbettung erforderliche Axiom der oberen Grenze die komplette Theorie der reellen Zahlen, während die relevanten Binnenverhältnisse des Bewegungsverlaufs bzw. der fraglichen Körper durch eine Theorie wie die elementare Arithmetik beschrieben werden können (dazu auch oben Anm. 12).

- Calogero, Guido [1932/70]: *Studien über den Eleatismus* (1932), dt. von W. Raible, Darmstadt: wbg 1970
- Caveing, Maurice [1982]: *Zénon d'Élée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Étude historique et critique des Fragments et Témoignages*, Paris: Vrin
- Diels, Hermann [1922], *Die Fragmente der Vorsokratiker*, gr./dt. von H. Diels, 4. Aufl. Berlin: Weidmann
- DK = Diels, Hermann und Kranz, Walter: *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 8. Aufl. hg. von W. Kranz, Berlin: Weidmann 1956
- Fränkel, Hermann [1942/68]: "Zenon von Elea im Kampf gegen die Idee der Vielheit" (1942), in: *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, hg. von H.-G. Gadamer, Darmstadt: wbg 1968, S. 423-475
- Franz, Wolfgang [1968]: *Topologie. I. Allgemeine Topologie*, Sammlung Götschen Bd. 1181, Berlin: De Gruyter
- Grünbaum, Adolf [1968]: *Modern Science and Zeno's Paradoxes* (1955), London: Allan & Unwin
- Guthrie, W.K.C. [HGP]: *A History of Greek Philosophy*, 6 Vols., Cambridge: U. Pr. 1962 ff.
- Heinemann, Gottfried [1989]: "Zenons Pfeil: Aristoteles, Parmenides, Hegel", in: *Hegel-Jahrbuch* 1989, S. 263-271
- : *Die Fragilität der Weisheit. Vorgeschichten zu Platon*, Rohfassung im Internet unter [www.uni-kassel.de/philosophie/Heinemann/Verstecktes und Unpubliziertes](http://www.uni-kassel.de/philosophie/Heinemann/Verstecktes%20und%20Unpubliziertes)
- : *Materialien zur antiken Philosophie*, im Internet unter [www.uni-kassel.de/philosophie/Heinemann/Materialien zur antiken Philosophie](http://www.uni-kassel.de/philosophie/Heinemann/Materialien%20zur%20antiken%20Philosophie)
- : "Time as 'measure'. Is Aristotle's account of time in *Physics* IV a theory of time-measurement?", ersch. in: *The Issue of Time in Aristotle* (Arbeitstitel), ed. by L. Couloubaritsis et al., Paris: Vrin ca. 2014 – im Internet unter www.uni-kassel.de/philosophie/Heinemann/Preprints
- Heitsch, Ernst [1974]: *Parmenides, die Fragmente*, hg., übers. und erl., Samml. Tusculum, München
- Hughes, Patrick und Brecht, George [1975/78]: *Die Scheinwelt des Paradoxes. Eine kommentierte Anthologie in Wort und Bild* (= *Vicious Circles and Infinity: a Panoply of Paradoxes*, London 1975), dt. von E. Bubser, Braunschweig: Vieweg 1978
- Joachim, Harold H. [1922]: *Aristotle, On Coming-to-Be and Passing-Away (De generatione et corruptione)*, A revised text with introduction and commentary, Oxford: Clarendon
- Kahn, Charles H. [1960]: *Anaximander and the Origins of Greek Cosmology*, New York
- Kirk, G.S., Raven, J.E., Schofield, M. [1983]: *The Presocratic Philosophers*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge U. Pr.
- Kirsch, Arnold [1987]: *Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen*, Köln: Aulis Verlag Deubner
- Mansfeld, Jaap [1983-86]: *Die Vorsokratiker*, gr./dt, 2 Bde. Stuttgart: Reclam 1983 und 1986
- Owen, G.E.L. [1957-8]: "Zeno and the Mathematicians" (1957-8), in: *Zeno's Paradoxes*, ed by W.C. Salmon, Indianapolis-New York: Bobbs-Merrill 1970, S. 139-163
- Ross, W.D. [1936]: *Aristotle's Physics*. A revised text with introduction and commentary by W.D. Ross, Oxford: Clarendon
- Vlastos, Gregory [1967]: "Zeno of Elea", in: *The Encyclopedia of Philosophy*, ed. by P. Edwards, Vol. VIII, New York-London: Macmillan, repr. 1972, Sp. 369a-379a
- Weyl, Hermann [1928/76]: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 4. Aufl. München: Oldenbourg – Darmstadt: wbg 1976