

# Formelsammlung zur Thermodynamik (Stand: 20.9.05)

Auszüge aus Formelsammlung von P. Stephan, TU Darmstadt, 2004 und E. Hahne, Technische Thermodynamik, 2004, Änderungen vorbehalten

## 1. Einheiten

Kraft	Druck	Energie
$1N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$ $1kp = 9,81N$	$1Pa = 1 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{J}{m^3}$ $1bar = 10^5 Pa = 10^2 \frac{kJ}{m^3}$ $1atm = 1,013bar$ $1Torr = 1,333 \cdot 10^2 Pa$ $1mmWS = 9,81Pa$	$1J = 1Nm$ $1erg = 10^{-7} J$ $1mkp = 9,81J$ $1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$ $1kcal = 4,186 \cdot 10^3 J$
Leistung	Stoffmenge	Temperatur
$1W = 1 \frac{J}{s}$ $1PS = 0,7355kW$	$1m_n^3 \triangleq \frac{1}{22,4} kmol$	$\vartheta \text{ in } ^\circ C; T \text{ in } K$ $T = \vartheta + 273,15$

## 2. Massenbilanz

Änderung der Systemmasse = + zugeführte Masse  
- entzogene Masse

## 3. Energiebilanz (1. Hauptsatz)

Änderung der Systemenergie = + zugeführte Energie  
- entzogene Energie

$$dE_{sys} = dQ + dW + dE_m$$

1. Hauptsatz für Zustandsänderungen 1 → 2:

$$E_{sys,2} - E_{sys,1} = Q_{12} + W_{12} + \sum_j m_j \left( h_j + \frac{c_j^2}{2} + g z_j \right)$$

$$\text{mit } E_{sys} = m_{sys} \left( u + \frac{c^2}{2} + g z \right)$$

1. Hauptsatz für Fließprozesse:

$$\frac{dE_{sys}}{dt} = \dot{Q} + P + \sum_j \dot{m}_j \left( h_j + \frac{c_j^2}{2} + g z_j \right)$$

Sonderfall stationärer Prozess (hier: ein Zu- und ein Abstrom)

$$0 = \dot{Q} + P + \dot{m} \left( h_{zu} - h_{ab} + \frac{c_{zu}^2}{2} - \frac{c_{ab}^2}{2} + g(z_{zu} - z_{ab}) \right)$$

## 4. Entropiebilanz und Entropieerzeugung (2. Hauptsatz)

### Entropiebilanz

$$\begin{aligned} \text{Änderung der Systementropie} = & \quad + \text{zugeführte Entropie} \\ & - \text{entzogene Entropie} \\ & + \text{erzeugte Entropie} \end{aligned}$$

$$dS_{\text{sys}} = dS_Q + dS_m + dS_i \quad (\text{ruhender Beobachter})$$

$$Tds = dq + Tds_i \quad \begin{aligned} & (\text{bewegter Beobachter auf} \\ & \text{strömendem Massenelement}) \\ & \text{für stationäre Fließprozesse häufig} \\ & \text{besser geeignet!} \end{aligned}$$

### Entropiebilanz für Zustandsänderungen 1 → 2:

$$S_{\text{sys},2} - S_{\text{sys},1} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \sum_j m_j s_j + \int_1^2 dS_i \quad (\text{ruhender Beobachter})$$

### Entropiebilanz für Fließprozesse:

$$\frac{dS_{\text{sys}}}{dt} = \int_A \frac{d\dot{Q}}{T} + \sum_j \dot{m}_j s_j + \dot{S}_i \quad (\text{ruhender Beobachter})$$

## 5. Zustandsgrößen, -gleichungen und -änderungen

### Zustandsgrößen

- extensive Zustandsgrößen  $Z$
- intensive Zustandsgrößen  $z$
- spezifische Zustandsgrößen  $z = \frac{Z}{m}$  ( $m$  Masse)
- molare Zustandsgrößen  $\bar{z} = \frac{Z}{n}$  ( $n$  Molmenge)

	Definitionen (spez. Größen)
spez. Volumen [m³/kg]	$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$
Druck [Pa]	$p = \frac{F}{A}$
spez. Enthalpie [J/kg]	$h = u + pv$
spez. Entropie [J/kgK] (Gibbssche Fundamentalgl.)	$Tds = du + pdv$ $Tds = dh - vdp$
spez. Wärmekapazität [J/kgK]	$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$ ; $c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$

## Zustandsgleichungen, -tabellen und -diagramme

	Ideales Gas	Inkompressibler Stoff	Realer Stoff
	<i>Thermische Zustandsgleichung</i>		<i>Zustandsgrößen aus Tabellen, Diagrammen oder Gleichungen für reale Gase</i>
Druck, Vol., Temp.	$pv = R_i T$	$v = \text{const.}$	
	<i>Kalorische Zustandsgleichung</i>		
Innere Energie	$du = c_v dT$	$du = c dT$	
Enthalpie	$dh = c_p dT$	$dh = c dT + v dp$	
Entropie	$ds = c_v \frac{dT}{T} + R_i \frac{dv}{v}$ $ds = c_p \frac{dT}{T} - R_i \frac{dp}{p}$ $ds = c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{dv}{v}$	$ds = c \frac{dT}{T}$	

## Weitere Angaben über das ideale Gas

Formeln und Zahlenwerte für das ideale Gas			
allg. Gaskonstante: $\bar{R} = 8314 \frac{J}{\text{kmol} \cdot K} = R_m$			
Normmolvolumen: $\bar{V}_n = \bar{V}(0^\circ C; 1013 \text{ mbar}) = 22,4 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$			
$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$	$c_p - c_v = R_i$	$c_v = \frac{R_i}{\kappa - 1}$	$c_p = \frac{\kappa R_i}{\kappa - 1}$

## Zustandsänderungen idealer Gase

### Isentrope Zustandsänderungen ( $s = \text{const.}$ )

$$pv^\kappa = \text{const.}; \quad T v^{\kappa-1} = \text{const.}; \quad \frac{T}{p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \text{const.}$$

Polytrope Zustandsänderungen: In diesen Formeln für die isentropen Zustandsänderungen wird  $\kappa$  durch  $n$  ersetzt.

# Zustandsänderungen idealer Gase im offenen und geschlossenen System

	Isochore	Isobare	Isotherme	Adiabate	Polytrope
	$v = \text{const}$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$q_{12} = 0$	
$p$ $v$					
$p$ $v$					
$T$ $s$					
	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2}$	$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$	$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa$	$p_1 \cdot v_1^n = p_2 \cdot v_2^n$
$s_2 - s_1$	$= \bar{c}_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$ $= \bar{c}_v \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$	$= \bar{c}_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$ $= \bar{c}_p \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$	$= R_i \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$ $= R_i \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$	$= 0$ Isentrope	$= \bar{c}_v \cdot \frac{n-\kappa}{n-1} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$
$q_{12}$	$= u_2 - u_1$ $= \bar{c}_v \cdot (T_2 - T_1)$	$= h_2 - h_1$ $= \bar{c}_p \cdot (T_2 - T_1)$	$= -W_{v12}$	$= 0$	$= \bar{c}_v \cdot \frac{(n-\kappa)}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$
$W_{v12}$	$= - \int_1^2 p dv = 0$	$= - p \cdot (v_2 - v_1)$ $= - R_i (T_2 - T_1)$	$= - R_i \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$ $= - R_i \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$ $= - p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}$ $= - p_2 \cdot v_2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$	$= \bar{c}_v \cdot (T_2 - T_1)$ $= \bar{c}_v \cdot T_1 \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)$ $= \frac{R_i \cdot T_1}{\kappa-1} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)$	$= \frac{R_i}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$ $= \bar{c}_v \cdot \frac{\kappa-1}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$ $= \frac{p_1 \cdot v_1}{n-1} \cdot \left( \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} - 1 \right)$
$W_{t12}$	$= \int_1^2 v dp$ $= v \cdot (p_2 - p_1)$	$= 0$	$= W_{v12}$ $= - q_{12}$	$= \bar{c}_p \cdot (T_2 - T_1)$ $= \bar{c}_p \cdot T_1 \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right)$ $= \frac{\kappa \cdot R_i}{\kappa-1} \cdot (T_2 - T_1)$ $= \kappa \cdot l_{12}$	$= \frac{n \cdot R_i}{n-1} \cdot (T_2 - T_1)$ $= \frac{n}{n-1} \cdot p_1 \cdot v_1 \cdot \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right)$

## 6. Reversible und irreversible Prozesse

$$W_{t12} = \int_1^2 v dp = W_{12,rev} \quad \text{reversibel}$$

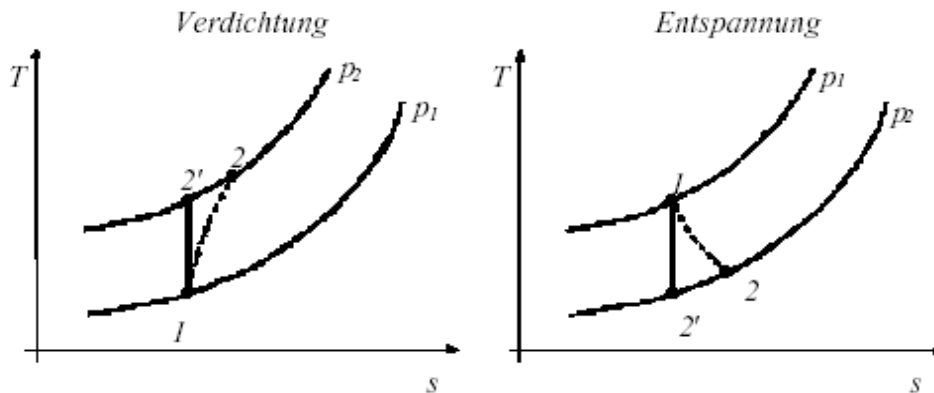
Gesamtarbeit am System (allgemein)

$$W_{12} = W_{12,rev} + W_{12,diss} \quad \text{reversibler + irreversibler Anteil}$$

Isentroper Wirkungsgrad bei Verdichtung und Entspannung

(kinetische u. potentielle Energie sind hier vernachlässigt)

1 – 2 irreversibler Prozess; 1 – 2' reversibler Prozess



Verdichter:

$$\eta_{sV} = \frac{W_{t12,rev}}{W_{t12}} = \frac{h_{2'} - h_1}{h_2 - h_1}$$

Turbine (Entspannung):

$$\eta_{sT} = \frac{W_{t12}}{W_{t12,rev}} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1}$$

## 7. Exergie und Anergie

$$Energie = Exergie + Anergie$$

Exergie eines Stoffstromes	$\dot{E}_{ex} = \dot{m} \left[ (h - h_0) - T_0 (s - s_0) \right]$
Exergie einer Wärme	$E_{ex} = Q \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right)$
Exergie eines geschl. Systems	$E_{ex} = m \left[ (u - u_0) - T_0 (s - s_0) + p_0 (v - v_0) \right]$

Index  $_0$ : Umgebung

Exergieverlust:  $dE_{ex,verl} = T_0 dS_i$

Exergetischer Wirkungsgrad:  $\eta_{ex} = \frac{dW_t}{dE_{ex}} = \frac{dW_{irr}}{dW_{rev}} = \frac{\eta_{th,irr}}{\eta_{th,rev}}$

## 8. Verdampfung und Kondensation

Masse der Flüssigkeit:  $m'$

Masse des Dampfes:  $m''$

Masse des Nassdampfes:  $m = m' + m''$

Dampfgehalt:  $x = \frac{m''}{m}$

Volumen des Nassdampfes:  $V = m v = m' v' + m'' v''$

Enthalpie des Nassdampfes:  $H = m h = m' h' + m'' h''$

Spezifische Größen des Nassdampfes:

$$v = (1 - x) v' + x v'' = v' + x (v'' - v')$$

$$u = (1 - x) u' + x u'' = u' + x (u'' - u')$$

$$h = (1 - x) h' + x h'' = h' + x (h'' - h')$$

$$s = (1 - x) s' + x s'' = s' + x (s'' - s')$$

Verdampfungsenthalpie:  $\Delta h_v = r = h'' - h' = T (s'' - s')$

Kritischer Punkt von Wasser:  $p_k = 221,15 \text{ bar}$   
 $\vartheta_k = 374,15 \text{ }^\circ\text{C}$

## 9. Kreisprozesse

### rechtsläufiger Prozess (Wärmekraftmaschine):

#### Thermischer Wirkungsgrad

- allgemein:  $\eta_{th} = \frac{|W_t|}{Q_{zu}} = 1 - \frac{|Q_{ab}|}{Q_{zu}} = 1 - \frac{T_{m,ab}}{T_{m,zu}}$

mit  $T_{m,ab}$  (mittl. Temp. Wärmeabfuhr),  
 $T_{m,zu}$  (mittl. Temp. Wärmezufuhr)

wobei  $T_{m,i} = \frac{Q_i}{\Delta S_i}$

- Carnot-Prozess:  $\eta_{th,C} = 1 - \frac{T_{KK}}{T_{HK}}$

mit  $T_{KK}$  (Temp. Kaltkörper),  $T_{HK}$  (Temp. Heißkörper)

#### Exergetischer Wirkungsgrad

$$\eta_{ex} = \frac{\eta_{th}}{\eta_{th,C}}$$

### linksläufiger Prozess (Kältemaschine K / Wärmepumpe W):

#### Leistungszahl

- allgemein:  $\varepsilon_K = \frac{Q_{zu}}{W_t} = \frac{Q_{zu}}{|Q_{ab}| - Q_{zu}} = \frac{T_{m,zu}}{T_{m,ab} - T_{m,zu}}$

$$\varepsilon_W = \frac{|Q_{ab}|}{W_t} = \frac{|Q_{ab}|}{|Q_{ab}| - Q_{zu}} = \frac{T_{m,ab}}{T_{m,ab} - T_{m,zu}}$$

- Carnot-Prozess:  $\varepsilon_{K,C} = \frac{T_{KK}}{T_{HK} - T_{KK}}$

$$\varepsilon_{W,C} = \frac{T_{HK}}{T_{HK} - T_{KK}}$$

## Vergleichsprozesse und deren therm. Wirkungsgrade

Prozess	Zustandsänderungen (Isolinien) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
Carnot	s - T - s - T
Joule	s - p - s - p
Ericson	T - p - T - p
Otto	s - v - s - v
Diesel	s - p - s - v
Stirling	T - v - T - v
Clausius-R.	s - p - s - p

Hierzu gehörende therm. Wirkungsgrade:

Einfacher Joule-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \left( \frac{p_{min}}{p_{max}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

Ericson-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = \eta_{th,C}$

Otto-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$   
( $\varepsilon$ : Verdichtungsverhältnis)

Diesel-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \frac{1}{\kappa \varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varphi - 1}$   
( $\varphi$ : Einspritzverhältnis)

Stirling-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = \eta_{th,C}$

Clausius-Rankine-Prozess  $\eta_{th} = 1 - \frac{T_{m,ab}}{T_{m,zu}}$

## Leistungszahlen von Kältemasch.- / Wärmepumpenprozessen

Kaltgasprozess (s - p - s - p)  $\varepsilon_K = \left[ \left( \frac{p_{max}}{p_{min}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]^{-1}$

$\varepsilon_W = \left[ 1 - \left( \frac{p_{min}}{p_{max}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]^{-1}$

Kaltdampfprozess (s - p - s - p)

- Prozess im Nassdampfgebiet  $\varepsilon_K = \varepsilon_{K,C}$

$$\varepsilon_W = \varepsilon_{W,C}$$

- Prozess mit überhitztem Dampf u. unterkühlter Flüssigkeit

$\varepsilon_K$  und  $\varepsilon_W$  aus Enthalpiedifferenzen