

Fan Wang

Dynamische Belastbarkeit von Energieaufbereitungseinheiten für die elektrische Energieversorgung

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich Elektrotechnik/Informatik der Universität Kassel als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Peter Zacharias
Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Weidemann

Tag der mündlichen Prüfung

12. Mai 2009

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Zugl.: Kassel, Univ., Diss. 2009
ISBN print: 978-3-89958-718-0
ISBN online: 978-3-89958-719-7
URN: urn:nbn:de:0002-7192

© 2008, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Printed in Germany

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit zwischen Juni 2005 und Mai 2009 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für elektrische Energietechnik im Fachgebiet Elektrische Energieversorgungssysteme (IEE-EVS) der Universität Kassel.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Zacharias, Leiter des Fachgebiets Elektrische Energieversorgungssysteme, für die Übernahme der Betreuung und die Unterstützung und Korrektur meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Weidemann, Leiter des Fachgebietes Elektrische Maschinen, danke ich als zweitem Gutachter für das Interesse an meiner Arbeit.

Meinen Kolleginnen, Kollegen und den Mitarbeitern am Institut für elektrische Energietechnik danke ich für die freundliche Zusammenarbeit und die Unterstützung, manchmal mit überdurchschnittlichem persönlichen Einsatz, der zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat. Insbesondere bedanke ich mich bei Frau Anja Clark-Carina, Herrn Dipl.-Ing. Werner Döring, Herrn Dipl.-Ing. Bernd Gruß, Herrn Dipl.-Ing. Michael Heeb und Herrn Dr.-Ing. Abdelbahi Tamzarti.

Ebenso möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Matthias Puchta herzlich für die textliche Korrektur meiner Arbeit bedanken und bei Herrn Volker Berge und Herrn Bernhard Siano für die Unterstützung bei den Versuchen im Labor.

Kassel, den 10.03.2009

Fan Wang

Zusammenfassung

In allen elektronischen Anlagen wird ein Teil der elektrischen Leistung in Wärmeleistung umgewandelt. Das führt zur Erwärmung und einer damit verbundenen thermischen Beanspruchung der Geräte. Das thermische Management elektronischer Bauteile gewinnt aufgrund der ständig zunehmenden Miniaturisierung der Größe und des damit verbundenen Anstieges der Verlustleistungsdichte mehr und mehr an Bedeutung.

Ausgehend von der formulierten Zielstellung behandelt diese Arbeit die Untersuchung der Temperaturabhängigkeit und des Prinzips der Wärme-Erzeugung von Leistungshalbleitern sowie die Bestimmung des thermischen Widerstandes von Kühlkörpern. Dazu wurde die analytische Ermittlung der Verlustleistung am Beispiel eines IGBT- Wechselrichters durchgeführt. Es wurde auch gezeigt, dass nicht nur Temperaturerhöhungen sondern auch die Temperaturschwankungen die Lebensdauer des Leistungsmoduls stark beeinflussen können. Da aufgrund der Kosten und der Zuverlässigkeit des Kühlsystems Kühlkörper mit Luftkühlung die häufig angewendete Kühltechnologie sind, konzentriert sich dieser Arbeit schwerpunktmäßig auf die Erfassung der Kenngröße R_{th} von Kühlkörpern mit beliebig platzierter Wärmequelle. Es wurde ein vereinfachtes zwei- dimensionales Wärmeüber-Tragungsmodell für Kühlplatten mit zentraler Wärmequelle entwickelt. Die analytische Lösung der Temperaturverteilung bzw. des Wärmewiderstands R_{th_max} wurde in geschlossener Form angegeben. Zur Festlegung der Berechnungs-Fehler bzw. der Anwendungsbereiche wurden die analytischen Ergebnisse mit den drei-dimensionalen Simulationsergebnissen aus der Software ANSYS verglichen. Das stationäre Temperaturfeld in einem geschlossenen Raum mit ungleichmäßig verteilten Wärmequellen kann mit Hilfe der Green'scher Funktion unter Berücksichtigung der Randbedingung analytisch ermittelt werden.

Zur praktischen Anwendung ist aber die analytische Lösung bei vielen komplexen Modellen nicht möglich oder ohne Bedeutung. Eine Modellierung der Verfahrenszusammenhänge aus empirischen Untersuchungsergebnissen ist eine Extraktion von Basisfunktionen aus Experimenten zur Darstellung komplexer physikalischer Vorgänge. In dieser Arbeit wurde diese Methode verwendet, um den Wärmewiderstand des Kühlkörpers R_{th_max} direkt durch dimensionslose Kenngrößen und Messergebnisse zu erhalten. Durch Ansatz eines optimierten Funktionssystems sowie die Approximation der Messdaten ergibt sich der mathematische Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Kenngrößen in objektivierter Form.

Abstract

In all electrical equipments, parts of the electrical power are converted into heat. This leads to the heating and the related thermal stress on the devices. The thermal management of electronic components has been more and more important due to the progressive miniaturization and the consequent increasing of power dissipation.

According to the objectives of this work, this thesis deals with the research of the temperature dependence, the principle of heat generation of power module as well as the determination of the thermal resistance of heat sink. It is also shown that not only temperature but also the temperature fluctuation can strongly influence the reliability of the power module. The emphasis of this paper concentrates on the acquisition of thermal resistance R_{th} of heat sink with an arbitrarily installed heat source, because the heat sink is used frequently in cooling system due to the good price/performance ratio. An analytical solution is proposed for calculating the thermal spreading resistance for a two-dimensional thermal model including the uniform heat source located on the centre of heat sink by using two separate mathematical models. The temperature distribution and the maximum dimensionless spreading resistance are obtained in closed form expression depending on three dimensionless parameters. To determine the error and the range of application, the results of analytical solutions are compared with numerical data from a commercial finite-element-analysis (FEA) programme. Furthermore, the static temperature distribution for a closed space which includes heat source distributed nonuniformly has been also presented by using Green's functions with the boundary conditions and initial conditions analytically.

Besides analytical solution, an adequate modelling from empirical methods provides another efficient method of description for a complex physical process. Dimension-analysis, experiment planning and approximation of experiment data with optimized function approach are effective tools to get the dependency among the components of a technical model. They offer a procedure, whereby the inner structure of a technology system can be described by experiment. In this work, the method of experiment is also used to obtain the thermal resistance of heat sink directly by using the dimensionless parameters and the measurements from the experiment. Through the approach of optimized function system and the approximation of experiment data, the mathematical expression of the dimensionless thermal resistance of the heat sink is given as a function of three dimensionless parameters.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	
1.1	Bedeutung der Belastbarkeit	1
1.2	Kühlung mit Kühlkörper	3
2	Erwärmung und Kühlung der elektrischen	
	Energieausbreitungseinheiten	5
2.1	Wärmequelle und Wärmewiderstand	5
2.2	Verlustleistungsermittlung am Beispiel IGBT- Wechselrichter	7
2.2.1	Analytische Ermittlung der Verluste.....	9
2.2.1.1	Statische Verluste.....	10
2.2.1.2	Dynamische Verluste.....	12
2.2.2	Berechnungsverfahren zur Verlustbestimmung eines IGBT- Wechselrichters.	13
2.3	Temperaturabhängige Betriebsverhalten und Lebensdauer des Leistungshalbleiter.....	19
2.3.1	Die Einfluss der Temperatur auf Leistungshalbleiter	20
2.3.2	Die Einfluss auf Lebensdauer von Temperaturschwankungen	22
2.4	Angewendete Kühlungstechnologien für Powermodulesowie deren weitere Entwicklung	26
2.4.1	Die Anforderungen an Packaging und Kühlungssysteme in leistungs-elektronischen Elementen.....	27
2.4.1.1	Packaging von Leistungshalbleiter-Elementen	27
2.4.1.2	Kühlssysteme	29
2.4.2	Die typische Technologie in Chipkühlung	31
2.4.2.1	Wärmeleitung und Wärmeausbreitung.....	31
2.4.2.2	Luftkühlung	32
2.4.2.3	Flüssigkeitskühlungen	33
3	Das Grundprinzip zur Wärmeabfuhr bei Leistungshalbleitern	37
3.1	Grundprinzip der Wärmeübertragung in der Elektronik.....	37
3.1.1	Wärmeübertragung durch Wärmeleitung	37
3.1.2	Wärmeübertragung durch Konvektion.....	39
3.1.3	Wärmeübertragung durch Strahlung	41

3.2	Das Übertragungsmodell zur Wärmeabfuhr	44
3.3	Berechnung der Chiptemperatur	46
3.3.1	Eindimensionale instationäre Wärmeleitung und transienter Wärmewiderstand	46
3.3.2	Thermische Ersatzschaltung	47
3.3.3	Transienter Wärmewiderstand bei periodischer Belastung.....	49
4	Statisches Temperaturfeld mit generalisierten Randbedingungen in Elektronik- Systemen	51
4.1	Statisches Wärmeübertragungsproblem in Elektroniksystemen.....	51
4.2	Thermische Modellierung mit zentraler Wärmequelle	52
4.2.1	Modellierung des Kühlungs-systems.....	52
4.2.2	Die Wärmeleitungsgleichungen.....	55
4.2.3	Die Lösungsmethode der DGL- System.....	60
4.2.4	Bestimmung des Widerstandes der Wärmespreizung	62
4.3	Numerische Lösung der Differentialgleichung.....	64
4.3.1	Thermischer Widerstand der Konvektion der Kühlplatte und des Kühlkörpers.....	65
4.3.2	Ermittlung der Wärmeübergangszahl	68
4.3.3	Umsetzung der DGL in MATLAB.....	71
4.4	Stationäres Temperaturfeld des Multi-Chip-Moduls	75
4.4.1	Einführung der Greenschen Funktion	75
4.4.2	Stationäres Wärmeübertragungsproblem mit einer nicht zentrierter Wärmequelle	76
4.4.3	Greensche Funktion mit Randbedingung.....	78
4.4.4	Konstruktion der Greenschen Funktion.....	81
4.4.5	Stationäres Wärmeübertragungsproblem mit mehreren Wärmequellen.....	82
5	Vergleich der analytischen Lösung des Spreizungswärmewiderstands mit den Simulationsergebnissen	85
5.1	Simulation des Thermomodells mit ANSYS	85
5.1.1	Aufbau und Modellierung des thermischen Modells in ANSYS87	
5.1.2	Bestimmung der thermischen Widerstände durch Simulations- ergebnisse	88

5.2	Diskussion des Spreizungswärmewiderstands	90
5.3	Anwendungsbereich	92
6	Empirische Gleichung des Wärmewiderstands	95
6.1	Dynamische Ähnlichkeit.....	96
6.1.1	Die Theorie der dynamischen Ähnlichkeit.....	96
6.1.2	Bestimmung der Kenngrößen durch Dimensionsanalyse	98
6.1.3	Anwendung.....	101
6.2	Versuchsplanung und Versuchsaufbau.....	103
6.2.1	Berechnung der Wärmeübertragung durch Kühlkörper	104
6.2.2	Messungsplanung nach π - Theorem	107
6.2.3	Versuchsaufbau und Temperaturmessung	109
6.3	Messdatenbearbeitung	112
6.3.1	Approximation von Messdaten	112
6.3.2	Optimierte Funktionssystem zur Beschreibung des thermischen Widerstandes des Kühlkörpers.....	114
6.3.3	Darstellung der Mathematischen Beziehung.....	118
6.3.4	Wärmewiderstand der Montagestelle	120
6.4	Zusammenfassung	123
7	Abschlussdiskussion.....	125
8	Mathematischer Anhang	129
8.1	Die Ermittlung der Wärmeübergangszahl für das Kühlsystem QLS200.18.....	129
8.2	Mathematischer Beweis des π - Theorems.....	132
8.3	Die Definitionen in Varianzanalyse (F- Test).....	133
8.4	Approximationsmethodik für eine optimale Beschreibung mit dem Messdatenansatz der Multiplikation	135
	Literaturverzeichnis.....	137

Wärmetechnische Größen

Symbol	Bedeutung	Einheit
α	Temperaturleitfähigkeit	m^2s^{-1}
Bi	Biot- Zahl	
θ	Temperaturerhöhung	$^{\circ}\text{C}$
δ	Grenzschichtdicke	m
η_0	Der gesamte therm. Wirkungsgrad des Kühlkörpers	
η_{fin}	Thermische Wirkungsgrad der Kühlkörperrippe	
C_{th}	Therm. Kapazität	Ws/K
E	Spezifische Ausstrahlung	W/m^2
E_s	Spezifische Ausstrahlung von Schwarzkörper	W/m^2
F	Therm. Beschleunigungsfaktor	
Gr	Grashof- Zahl	
g_m	Massegeschwindigkeit per Flächeneinheit	$\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$
h	Konvektionskoeffizient	$\text{W}/\text{K}/\text{m}^2$
h_{eff}	Effektive Wärmeübergangszahl der Rippe	$\text{W}/\text{K}/\text{m}^2$
h_m	Konvektionskoeffizient des therm. Modells	$\text{W}/\text{K}/\text{m}^2$
h_s	Wärmeübergangszahl durch Strahlung	$\text{W}/\text{K}/\text{m}^2$
M_s	Spez. Ausstrahlung	W/m^2
N_F	Zahl der Temperaturzyklen bis zum Ausfall	
Nu	Nusselt- Zahl	
NTU	Dimensionslose Übertragungsfähigkeit	
Pr	Prandl- Zahl	
P_V	Verlustleistung	W
Q	Wärmestrom	W
\dot{q}	Wärmestromdichte	W/m^2
\dot{q}_E	Spezifische Wärmequelle	W/kg
q_m	Massegeschwindigkeit	kg/s
Re	Reynolds- Zahl	
R_{th}	Therm. Widerstand	K/W
R_{thjc}	Therm. Widerstand, Sperrschicht zu Gehäuse	K/W
R_{thch}	Therm. Widerstand, Gehäuse zu Kühlkörper	K/W
R_{thha}	Therm. Widerstand, Kühlkörper zu Umgebung	K/W
R_{thja}	Therm. Widerstand, Sperrschicht zu Umgebung	K/W

V

R_{th_sp}	Spreizungswärmewiderstand	K/W
R_{th_conv}	Therm. Widerstand der Konvektion	K/W
R_{th_M}	Materialwärmewiderstand,	K/W
R_{thk_max}	Maximaltemperatur bezogene therm. Widerstand eines Kühlkörpers	K/W
T	Temperatur	K
T_{amb}	Temperatur, Umgebung	K
T_{max}	Maximaltemperatur	K
T_1	Eingangstemperatur von Fluid	K
T_2	Ausgangstemperatur von Fluid	K
T_k	Mittlere Temperatur der Kühlkörperbasis	K
Δt_m	Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz	K
T_J	Temperatur, Sperrschicht	K
Z_{th}	Transienter Wärmewiderstand	K/W
Z_{thja}	Tran. Wärmewiderstand; Sperrschicht zu Umgebung	K/W
τ_{jc}	Zeitkonstante; Sperrschicht zu Gehäuse	s
τ_{jc}	Zeitkonstante von Kühlkörper	s
Ψ_{sp_z}	Dimensionsloser Spreizungswärmewiderstand bei zentral gelegter Wärmequelle	
Ψ_z	Dimensionsloser Wärmewiderstand des Kühlkörpers mit zentral gelegter Wärmequelle	
Ψ_p	Dimensionsloser Wärmewiderstand der Montagestelle	

Materialgrößen

α	Absorptionsgrad	
β_σ	Verlustfaktor der optischen Strecke	
ε	Emissionsgrad	
μ	Dynamische Viskosität	N s/m ²
λ	Wärmeleitfähigkeit	W/m/K
ν	Kinematische Zähigkeit	m ² /s
ρ	Reflexionsgrad	
ρ	Dichte	kg/m ³
τ	Transmissionsgrad	
c_p	Isobare spez. Wärmekapazität	Ws/kg/K

Geometrische Größen

A_1	Fläche der Wärmequelle	m^2
A_2	Fläche der Kühlplattebasis	m^2
A_{base}	Fläche des Kühlkörpersubstrates	m^2
A_c	Querschnitt der Rippe	m^2
A_{fin}	Rippenfläche eines Kühlkörpers	m^2
A_R	Die gesamte an Konvektion beteiligte Fläche von Kühlkörper	m^2
b	Breite des Kühlkörpers	m
b_k	Bereite der Kühlkanal	m
b_f	Dicke der Rippe	m
d_e	Charakteristische Länge des Rippekanals	m
H	Dicke der Kühlkörperbasis	m
L	Länge des Kühlkörpers	m
U	Umfang der Rippe	m
r_1	Radius von der Fläche der Wärmquelle	m
r_2	Radius von der Fläche der Kühlplattensubstrat	m
S_1	Der Querschnitt des Kühlkanals per Flächeeinheit	m^2/m^2
S_2	Der Querschnitt des Kühlkanals per Bereiteinheit	m^2/m
t_f	Höhe der Rippe	m
γ	Dimensionsloser Radius	
τ	Dimensionslose Plattendicke	
Φ	Dimensionslose Kontaktfläche	

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Bedeutung der Belastbarkeit

Seitdem der integrierte Schaltkreis in den praktischen Einsatz gebracht wurde, hat sich der Integrationsgrad um mehrere Größenordnungen erhöht, damit nimmt die entstehende Wärme pro Chip auch drastisch zu. Die ständig zunehmende Leistung, Verlustleistung und Miniaturisierungen der Größe des Halbleiter-Moduls führen zu höherer Wärmeflussdichte (über 100Watt/cm^2 und immer höher) und engerem Spielraum der Abkühlungsbedingungen (erhöhte Umgebungstemperatur und verkleinerte Kühlungsfläche).

Der Begriff Belastbarkeit bezieht sich in erster Linie auf die thermischen Beanspruchungen der elektrischen Anlagen, welche im Bereich elektrischer Energieversorgung häufig anzutreffen sind: elektrische Maschine (Transformator, Generator usw.) und leistungselektronische Schaltungen zum Umformen und Steuern elektrischer Energie. Bekannt ist, dass die Lebensdauer der Anlage stark von thermischer Beanspruchung abhängt, nämlich von lastabhängiger Erwärmung der Anlage sowie Betriebstemperatur, periodischen und nicht periodischen Temperaturschwankungen. Eine dauerhafte Temperaturerhöhung und Temperaturschwankungen können die Lebensdauer oder Zuverlässigkeit des Bauteils sehr stark herabsetzen. Man bezeichnet das allgemein als „thermische Alterung“. Deshalb spielt das thermische Management eine immer wichtige Rolle. Das Grundziel des thermischen Managements ist Schutz der elektronischen Anlagen gegen thermische Zerstörung. Thermische Zerstörung wird definiert als Verschlechterung der maßgebenden Eigenschaften und Versagen der elektronischen Funktionen der elektronischen Anlagen direkt aus thermischen Gründen. Diese Defekte könnten durch Schmelzen oder Verdampfung der elektronischen Bauteile, aber auch am häufigsten durch thermische Zerstörung der mechanischen Stützelemente wie z.B. Materialermüdung durch Ausbildung von Mikrorissen sowie Ablösungen der Bonddrähte ausgelöst werden. Der Zusammenhang zwischen Lebensdauer der Isoliermaterialien, welche im Bereich elektrischer Maschinen verwendet werden, und Temperaturerhöhung kann durch die Regel von Montsinger erfasst werden.

Die Regel von Montsinger beschreibt die obige Beziehung von Isoliermaterialien der Klasse A.

$$D_T = A_0 \cdot 2^{-\frac{T}{\Delta T^0}} \quad (1.1)$$

mit
$$A_0 = 7 \cdot 2^{\frac{105}{8}} = 6,225 \cdot 10^4 \text{ Jahre} \quad (1.2)$$

Es bedeuten: D_T Lebensdauer in Jahren bei einer konstanten Temperatur von T° ; ΔT^0 konstanter Wert der Temperaturzunahme, für welchen die Lebensdauer halbiert wird; A_0 die Lebensdauer in Jahren entsprechend einer konstanten Temperatur von 0°C und werden bestimmt durch den empirisch gewonnenen Wert $D_{T=105} = 7$ Jahre sowie die durchschnittliche Temperaturerhöhung $\Delta T = 8^\circ$. Man erhält damit nach 1.1:

$$D_T = 7 \cdot 2^{\frac{105}{8} - \frac{T}{8}} = 7 \cdot 2^{-\frac{105-T}{8}} \quad (1.3)$$

Unter Gleichung 1.3 versteht man, dass, wenn ein Material der Isolationsklasse A bei einer konstant gehaltenen Temperatur von 105°C eine Lebensdauer von D_T Jahren hat, so sinkt diese Lebensdauer bei einer konstanten Temperaturerhöhung von 8° auf $1/2D_T$ Jahre. Die Regel von Montsinger ist nicht absolute Gültigkeit angestattet, dass dieses Material nach einem Dauereinsatz mit einer Betriebstemperatur von 105°C pünktlich nach 7 Jahren versagt. Sie gibt aber zumindest die durchschnittliche, relative Änderung der Lebensdauer bei einer bestimmten Temperaturerhöhung während einer bestimmten Zeit an.

Im Bereich Leistungselektronik ist die thermische Stabilität der Systeme durch steigende Anforderungen an Miniaturisierungen der Größe des Halbleiter-Moduls, Erhöhung der Systemfrequenz und der integrierten Chipanzahl der Kritikpunkt und sogar ein entscheidender Faktor des Designprozesses geworden. Heute werden mehr als 42 Millionen Transistoren allein in einem Pentium4-Chip integriert, während diese Anzahl für den ersten Chip in 1971 nur 2300 betrug. Nach dem berühmten Gesetz von Gordon Moore sollte die Anzahl der Transistoren in einem Chip sich in 24 Monaten verdoppeln. Das heißt, bis Jahr 2010 wird es über 1 Billion Bauelemente in einem einzelnen Chip integriert. Die ähnliche Situation ist auch im Bereich Chipleistung und Leistungsdichte zu erwarten. Die Verlustleistung eines Pentium4-2GHz-Chips beträgt schon 75W. Die Leistungsdichte hat mit der drastischen Entwicklung der MEMS (Micro Electro-Mechanical System)- Technologie den Wert $200\text{W}/\text{cm}^2$ überschritten. Die dadurch erfolgte hohe Betriebstemperatur und umgebungstemperaturbedingte

thermische Beanspruchung führen zu Herabsetzung der elektrischen Eigenschaften, Betriebsfrequenz, mechanischen Festigkeit und Zuverlässigkeit des Moduls. Andererseits reduziert sich die Zuverlässigkeit der elektronischen Bauelemente um etwa 5% für je 1 Grad Temperaturerhöhung, wenn die Bauelemente dauernd bei der Betriebstemperatur von 70 bis 80 Grad eingesetzt werden[25]. Aus diesen Gründen ist die Frage, wie die produzierte Wärme effizient abgeführt und die Modultemperatur in einem niedrigen Niveau angehalten werden kann, seit einigen Jahren vorangetrieben werden. Ein effizientes Kühlungssystem ist nicht nur für leistungselektronische Anlagen bedeutend sondern auch für Computerchips, Photovoltaische Bauelement, Biochips und mikro-mechanisches System unverlässlich.

1.2 Kühlung durch Kühlkörper

Mit der Erhöhung der Wärmeleistungsdichte in mikroelektronischen Geräten und der Verringerung der allgemeinen Formfaktoren ist thermische Management zu einem immer wichtigeren Phase des elektronischen Produktdesigns geworden. Sowohl die elektrischen Eigenschaften als auch die Lebensdauer elektronischer Geräte haben einen Bezug zur Temperatur der zugehörigen Komponente. Die Beziehung zwischen Zuverlässigkeit und Betriebstemperatur eines typischen Silizium Halbleiter-Geräte zeigt, dass die Absenkung der Temperatur einer exponentiellen Zunahme der Zuverlässigkeit des Gerätes entspricht. Daher können die lange Lebensdauer und stabile Zuverlässigkeit der Komponenten durch eine wirksame Steuerung der Betriebstemperatur innerhalb der zulässigen Grenzen erzielt werden. Ein wirksames und zuverlässiges Kühlsystem ist für die Zuverlässigkeit der Halbleitermodule von großer Bedeutung. Das Versagen des Kühlsystems wird direkt zum Ausfall des Bauelements führen. Es ist klar, dass die Bauelemente des Kühlsystems, welche die kürzeste Lebensdauer aufweisen, die Lebensdauer des ganzen Systems bestimmen. Aus diesem Grund sollte das Kühlsystem eine mögliche einfache Struktur besitzen, um eine verbesserte Zuverlässigkeit zu erreichen. Wegen der Anforderungen an die Eigenschaften des Kühlsystems, dass ein Kühlsystem nicht nur zur Wärmeabfuhr effizient sein sollte sondern auch durch einfache Struktur und gutes Preis-Leistungs-Verhältnis charakterisiert wird, sind Kühlkörper mit freier/forcierter Konvektion heute noch immer die häufigste verwendete Kühlungsmethode im Bereich der Leistungselektronik.

Kühlkörper sind Geräte, die zur Verbesserung der Wärmeabfuhr aus einer heißen Oberfläche, die in der Regel eine wärmeerzeugende Komponente ist, zur Umgebung verwendet werden. In den meisten Fällen ist die Wärmeübertragung über die Schnittstelle zwischen der festen Oberfläche und der Kühlmittel Luft die am wenigsten effiziente innerhalb des Systems. Die Festkörper-Luft-Schnittstelle stellt das größte Hindernis der Wärmeabfuhr dar. Ein Kühlkörper senkt diese Barriere vor allem durch die Vergrößerung der Fläche, die direkt mit den Kühlmedien kontaktiert ist. Dies erlaubt höheren Wärmestrom bei geringer Betriebstemperatur. Der primäre Zweck eines Kühlkörpers ist, die Elementtemperatur unter der vom Hersteller bestimmten zulässigen Maximaltemperatur zu halten. Da das Gehäuse des elektronischen Moduls elektrisch isoliert ist, können alle Module eines Systems auf einem Kühlkörper montiert werden. Bei diesem Fall ist Wärmewiderstand des Kühlkörpers stark von der Anzahl, der Kontaktfläche und den Montagepositionen der abzukühlenden Module abhängig. Somit könnte er auch eine deutliche Differenz von den von Herstellern angegebenen Werten aufweisen.

In dieser Dissertation wird die Kühlungstechnologie, die heutzutage an üblichen elektronischen Anlagen zur Energieversorgung verwendet wird, analysiert und verglichen. Schwerpunktmäßig werden in dieser Arbeit thermische Eigenschaften für leistungselektronische Wandler und deren Anforderungen an die thermische Auslegung hinsichtlich Modellbildung sowie Komponenten- und Dimensions-Analyse untersucht. Das Ziel ist, die analytischen Verfahren und experimentellen Versuche so weiter zu entwickeln, dass der Designer in der Lage ist, die tatsächlichen, praktischen Eigenschaften des Kühlkörpers je nach der praktischen Anwendung zu ermitteln.

Kapitel 2

Erwärmung und Kühlung der elektrischen Energieausbreitungseinheiten

2.1 Wärmequelle und Wärmewiderstand

In vielen industriellen Anwendungen werden die erwünschten Funktionen der elektrischen Anlagen durch Steuerung des Stroms in den Bauelementen erreicht. Sobald Strom über elektrischen Widerstand fließt, wird Wärme produziert. Nimmt der Strom oder Widerstand zu, werden die Anlagenbauteile mehr Wärme erzeugen. Fließt der Strom kontinuierlich, wird die Wärme andauernd erzeugt. Mit der Konzentration der elektrischen Wärme muss ein effizienter Weg für die Wärmeabfuhr gefunden werden. Wenn das nicht der Fall ist, wird die Temperatur bis zur Zerstörung des Bauelements steigen. Beim Systemdesign mit effizienter Wärmeabfuhr erhöhen sich die Temperaturen bis zu stabilen Arbeitspunkten, wo die von der Kühlungseinrichtung abgeführte Wärme und die durch fließenden Strom erzeugte Wärmeleistung gleich sind. Man nennt das dynamische Thermostabilität. Danach bleibt Temperatur konstant. Die Wärme wird ständig erzeugt, wenn elektrischer Strom durch elektronische Bauteile wie z.B. Dioden, Transistoren, IGBTs, MOSFETs oder Leistungshalbleiter- Module usw. fließt. Im Allgemeinen hat die thermische Beanspruchung elektronischer Anlagen drei Quellenbereichen:

1. Die elektrische Wärme, die von elektrischer Verlustleistung in die thermische Energie umgewandelt sind.
2. Die Umgebungswärme, die durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung in den Anlagen übertragen wird.
3. Die Erwärmungen durch Reibung, die durch relative Bewegung der Anlage in der atmosphärischen Umgebung entstanden sind.

Da die Wärme nur von einer Stelle hoher Temperatur zu einem Ort niedriger Temperatur übertragen werden kann und die elektronischen Einrichtungen für die Energiewandlung, die immer an einer Stelle mit höheren Betriebstemperaturen als in der Umgebung fest montiert, stellt die Wärme aus Verlustleistung überwiegende thermische Quelle der Anlage dar. Dieser Wärme muss durch

passende Wege mit möglichst niedrigem Wärmewiderstand in die Umgebung abgeführt werden.

Es ist anzumerken, dass Wärmeübertragung einer der Transferprozesse in der Natur ist. Sie weist die Ähnlichkeit mit anderen Transferprozessen der Natur wie z.B. Elektrizität, Impuls- und Masseübertragung auf. Das gemeinsame Prinzip der Transferprozesse kann zusammengefasst werden:

$$\text{transportierte Menge} = \frac{\text{Antrieb des Prozesses}}{\text{Widerstand des Prozesses}} \quad (2.1)$$

In der Elektrotechnik werden solche Prinzipien z.B durch das bekannte Ohmsche Gesetz beschrieben, nämlich: $I = \frac{U}{R}$. In der Wärmelehre hat die entsprechende

Beziehung folgende Darstellung:

$$\Phi = \frac{\Delta t}{R_{th}} \quad (2.2)$$

wobei der Wärmefluss Φ [W] die übertragende Menge, der Temperaturunterschied Δt [°C] den Antrieb der Übertragung und der Wärmewiderstand R_{th} [KW] das Hindernis der Übertragung darstellen. Der Wärmewiderstand ist somit ein Maß für das Wärmeleitvermögen. Mit diesem Begriff kann der gesamte Wärmewiderstand mittels Reihen- und Serieschaltung der einzelnen Wärmewiderstände wie bei elektrischer Schaltung ermittelt werden. Es gibt zwei Hauptprinzipien zur Verringerung des Wärmewiderstandes eines elektronischen Systems: nämlich das Herabsetzen des inneren Wärmewiderstandes von Bauelement und die Minimierung des äußeren Wärmewiderstandes des Bauteils oder des ganzen Systems. Bei den Leistungshalbleitern beschreibt der innere Wärmewiderstand des elektronischen Elements den thermischen Widerstand zwischen Sperrschicht, wo die Verlustleistung erzeugt wird, und Bauteilgehäuse. Sie werden normalerweise in den Datenblättern unter der Bezeichnung R_{thjc} angegeben. Die äußeren Wärmewiderstände umfassen den Kontaktübergangswiderstand R_{thch} zwischen Gehäuse und Kühlkörper und den Wärmewiderstand R_{thha} von Kühlkörper zur Umgebung.

Die Forschungen zur Verringerung innerer Wärmewiderstände orientieren sich an Entwicklung neuer Materials für elektronische Bauelemente, Verbesserung des Produktprozesses und sowie der Anwendung der Kühlungsmaßnahmen direkt an oder in hoch integrierten Leistungsmodulen.

Zur Minimierung äußerer Wärmewiderstände werden in Wesentlichen folgende Technologien verwendet.

1. Passive Wärmeabfuhr

Die elektronische Wärme wird durch freie- und erzwungene Konvektion mit Nutzung der Luft oder von Flüssigkeiten als Kühlmedien abtransportiert.

2. Aktive Kühlung

Durch Verwendung des Peltier Effekts werden die elektronischen Einrichtungen aktiv abgekühlt, damit eine niedrigere Betriebstemperatur als Umgebungstemperatur möglich ist.

3. Temperaturhaltung durch Phasenänderungswärme

Durch Verwendung der Wärmeabgabe und Wärmeabsorption eines Materials bei Phasenänderung kann der Temperaturwechsel des Systems innerhalb des gewünschten Bereichs eingestellt werden. Dabei bleibt das ganze System stabil, solange Material mit der Möglichkeit zur Phasenänderung vorhanden ist.

4. Wärmeübertragung durch Wärmerohr (Heat Pipe)

Durch Verwendung der Eigenschaft der effizienten Wärmeübertragung von Wärmerohr sind eine gleichmäßige Temperaturverteilung in der Umgebung mit großem Temperaturunterschied und eine gute Wärmeübertragung in geschlossenem Gehäuse realisierbar. Heat Pipes stellen eine spezielle Anwendung des Prinzips 3 dar und beruhen auf der Verdampfung von Flüssigkeiten und dem Transport der Wärme vom Bauelement zu einem entfernten gelegenen Kühlkörper.

2.2 Verlustleistungsermittlung am Beispiel IGBT- Wechselrichter

Im letzten Abschnitt wurde schon angedeutet, dass bei den leistungselektronischen Modulen die Verlustleistung die überwiegende Wärmequelle ist. Deshalb ist es notwendig, den Wert der Verlustleistung der Anlage präzise zu ermitteln. Die Verlustleistung bestimmt die Kühlungsmethode und wird dann die Chiptemperatur und Belastungsobergrenzen bestimmen. Die Zeitinvestition zur Berechnung genauer Verlustleistung lohnt sich immer, da die Zuverlässigkeit, Volumen, Gewicht und Kosten des Systems sich davon stark beeinflussen lassen.

Um die Verluste in den Halbleitern nicht einzeln ermitteln zu müssen, können die Gesamtverluste der Schaltung durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes aus der Differenz zwischen eingespeister und entnommener Energie gemäß Abb. 2.1 bestimmt werden.

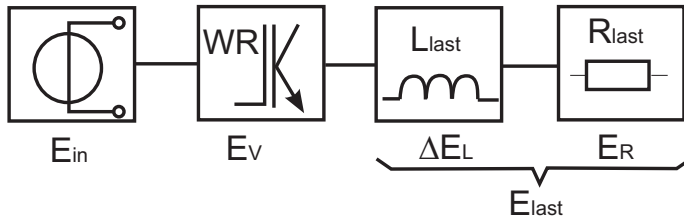


Abb.2.1 Das Modell zur Ermittlung der Inverterverlustleistung durch Anwendung des Energieerhaltungssatzes

Dieses Modell ist leicht mit MATLAB SIMULINK oder dem Simulator SIMPLORE zu realisieren und zu simulieren. Die Gesamtverlustleistung und Wirkungsgrad des Inverters lassen sich dann mit Gl. 2.3 und 2.4 zu berechnen.

$$E_V = E_{in} - E_{Last} \quad (2.3)$$

$$\eta_{Inverter} = \frac{E_{Last}}{E_{in}} = \frac{E_R + \Delta E_L}{E_{in}} \quad (2.4)$$

Mit Hilfe einfacher Beziehungen kann so die eingespeiste Energie:

$$E_{in}(t) = V_{CC} \int_0^t I_{DC} dt \quad (2.5)$$

und die in den Lastwiderständen der drei Phasen u, v, w umgesetzte Energie

$$E_R(t) = R_{Last} \int_0^t [i_u^2(t) + i_v^2(t) + i_w^2(t)] dt \quad (2.6)$$

berechnet werden. Für die angegebene Schaltung ist beim Aufstellen der Energiebilanz und der Berechnung des Wirkungsgrades zu berücksichtigen, dass sich nach Ablauf des Simulationszeitraumes t_i die in den Lastinduktivitäten gespeicherte Energie verändert haben kann. Dies ist immer dann der Fall, wenn sich das System zum Simulationsstart in einem nicht eingeschwungenen Zustand befand.

$$\begin{aligned}\Delta E_L &= E_L(t_1) - E_L(t_0) \\ &= \frac{L_{Last}}{2} [i_u^2(t_1) + i_v^2(t_1) + i_w^2(t_1)] - \frac{L_{Last}}{2} [i_u^2(t_0) + i_v^2(t_0) + i_w^2(t_0)]\end{aligned}\quad (2.7)$$

Es ist daher stets der stationäre Zustand zu betrachten. Die mit dieser Methode erfassten Verluste bzw. der Wirkungsgrad sind nur für einen Arbeitspunkt des Wechselrichters gültig (P_{Last} , f_{puls} , Ansteuerung). Für einen anderen Arbeitspunkt ist eine neue Simulation zu starten, der Pulsgenerator ist neu einzustellen und es sind neue Anfangswerte für die Ströme in den Lastinduktivitäten zu bestimmen. Dies kann bisweilen sehr aufwendig werden. Zur Verlustbestimmung über den gesamten Arbeitsbereich des Wechselrichters ist dann eine analytische Berechnung nötig. Sinnvoll ist, die simulierten Ergebnisse als Stützstelle mit analytischer Berechnung zu kombinieren, so dass die Unsicherheit der Berechnung minimiert werden können. Im folgenden Abschnitt wird eine Methode der Verlustbestimmung mit Hilfe einer analytischen Beschreibung der im Wechselrichter auftretenden Durchlass- und Schaltverluste angeführt.

2.2.1 Analytische Ermittlung der Verluste

Die Verlustleistung des Inverters setzt sich zusammen aus den Leitverlusten (statisch) und den Schaltverlusten (dynamisch) von 6 Dioden und 6 IGBT. Zur Berechnung der Verlustleistungsanteile wird von Bild 2.2 als einer vereinfachten Darstellung für einen 3-phasigen Pulswechselrichters ausgegangen [10].

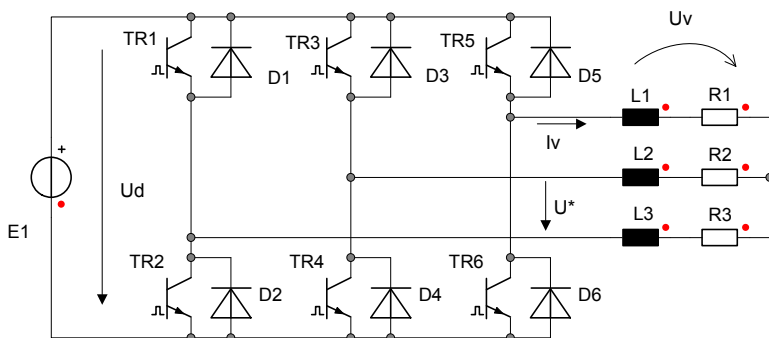


Abbildung 2.2: Prinzipdarstellung eines 3-phasigen Pulswechselrichters

2.2.1.1 Statische Verluste

Die statischen Verluste des Wechselrichters bestehen aus Durchlassverluste der Diode und der IGBTs. Wenn man die Durchlasskennlinie einer Diode oder eines IGBTs näherungsweise durch eine Gerade mit Schleusenspannung U_{T0} und dem Anstieg der Tangente der Kennlinie beschrieben werden, gilt für die Spannung im Durchlassbereich:

$$U_T(t) = U_{T0} + i_T(t) \cdot R_F \quad (2.7)$$

Bei periodischem Betrieb mit der Periodendauer T wird die Durchlassverlustleistung P_{V_stat} aus der Leistungsdefinition gewonnen:

$$P_{V_stat} = \frac{1}{T} \int_0^T u_T(t) \cdot i_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [(U_{T0} + i_T(t) R_F) \cdot i_T(t)] dt \quad (2.8)$$

Die Stromintegral $\frac{1}{T} \int_0^T i_T(t) dt$ und $\frac{1}{T} \int_0^T i_T^2(t) dt$ in Gleichung 2.8 sind nach der

Definitionen jeweils der arithmetische Mittelwert und der quadratische Mittelwert des Stroms. Somit lässt sich die Durchlassverlustleistung mit Hilfe des arithmetischen Mittelwertes und des Effektivwertes von Diode- Durchlassstrom oder von IGBT- Dauerstrom ausdrücken:

$$P_{V_stat} = U_T \cdot I_{AV} + R_F \cdot I_{RMS}^2 \quad (2.9)$$

Geht man von einer sternförmig geschalteten, symmetrischen Last aus, so gelten für die in Bild 2.2 eingezeichneten Größen die Beziehungen:

$$U^* = \sqrt{3} \cdot U_V$$

$$S = \sqrt{3} \cdot I_V \cdot U^* = 3 \cdot U_V \cdot I_V$$

Durch die Pulsweitenmodulation erhält man für die Momentanwerte der Spannung $u_v(t)$ eine Beziehung zwischen der Einschaltzeit des mit $+U_d$ verbundenen Schalters zu

$$u_v(t) = \sqrt{2} \cdot U_V \cdot \sin(\omega t) = \left(\frac{t_p}{T} - \frac{1}{2}\right) \cdot U_d \quad (2.10)$$

$$\frac{t_p}{T} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot U_V}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \frac{\sqrt{2} \cdot U_V}{U_d} \leq 0,5. \quad (2.11)$$

Die Zeit t_p ist dabei die Zeit, in der der obere Schalter des Halbbrücken-zweiges leitend ist. Dann lässt sich die Zeit, in der der oberen Diode des Halbbrücken-zweiges leitend ist, mit folgender Formel berechnen.

$$\frac{t_d}{T} = \frac{T - t_p}{T} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \right) \quad (2.12)$$

Bei positivem Strom (vom Inverter zur Last) von

$$i_v(t) = \sqrt{2} \cdot I_v \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.13)$$

lässt sich arithmetischer und quadratischer Mittelstrom mit der entsprechenden Schaltdauer nach der Definition ermitteln.

Für den arithmetischen Mittelwert des IGBT- Stroms gilt

$$I_{IGBT_AV} = \frac{1}{T} \cdot \int_{\omega t = \varphi}^{\omega t = \pi + \varphi} i_v(t) \cdot \frac{t_p}{T} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\varphi}^{\pi + \varphi} \sqrt{2} \cdot I_v \cdot \sin(\omega t - \varphi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot d(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad I_{IGBT_AV} = \frac{\sqrt{2} \cdot I_v}{2\pi} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_v}{2 \cdot U_d} \cdot \cos \varphi \right) \quad (2.14)$$

Für den arithmetischen Mittelwert des zugehörigen Dioden-Stroms gilt

$$I_{Diode_AV} = \frac{1}{T} \cdot \int_{\omega t = \varphi}^{\omega t = \pi + \varphi} i_v(t) \cdot \frac{t_d}{T} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\varphi}^{\pi + \varphi} \sqrt{2} \cdot I_v \cdot \sin(\omega t - \varphi) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot d(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad I_{Diode_AV} = \frac{\sqrt{2} \cdot I_v}{2\pi} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_v}{2 \cdot U_d} \cdot \cos \varphi \right) \quad (2.15)$$

Für den Effektivwert des IGBT- Stroms gilt

$$(I_{IGBT_RMS})^2 = \frac{1}{T} \int_{\omega t = \varphi}^{\omega t = \pi + \varphi} i_v^2(t) \cdot \frac{t_p}{T} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\varphi}^{\pi + \varphi} I_v^2 \cdot \sin^2(\omega t - \varphi) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot d(\omega t)$$

$$(I_{IGBT_RMS})^2 = \frac{I_v^2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot dx + \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot dx \right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{IGBT_RMS} = I_v \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \cos \varphi \right)} \quad (2.16)$$

Für den Effektivwert des zugehörigen Dioden- Stroms gilt

$$(I_{Diode_RMS})^2 = \frac{1}{T} \int_{\omega t = \varphi}^{\omega t = \pi + \varphi} i_v^2(t) \cdot \frac{t_d}{T} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\varphi}^{\pi + \varphi} I_v^2 \cdot \sin^2(\omega t - \varphi) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot d(\omega t)$$

$$(I_{Diode_RMS})^2 = \frac{I_v^2}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x \cdot dx - \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot dx \right)$$

$$\Rightarrow \underline{I_{Diode_RMS} = I_v \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \cdot \cos \varphi \right)}} \quad (2.17)$$

Mit obigen hergeleiteten Strömen ergibt sich die statische Verlustleistung des Wechselrichters in Abhängigkeit von Lastspannung aus Gl. 2.8:

$$P_{V_stat} = 6 \cdot (U_{T_IGBT} \cdot I_{IGBT_AV} + R_{F_IGBT} \cdot I_{IGBT_RMS}^2 + U_{T_Diode} \cdot I_{Diode_AV} + R_{F_Diode} \cdot I_{Diode_RMS}^2) \quad (2.18)$$

Man sieht, dass wegen der Abhängigkeit des arithmetischen Mittelwert und Effektivwerts des IGBT- und Diodestroms von dem elektrischen Lastwinkel φ die Durchlassverluste auch von dem Lastwinkel abhängig sind.

2.2.1.2 Dynamische Verluste

Die dynamischen Verluste des Wechselrichters bestehen aus Einschalt- und Ausschaltverlusten von IGBTs und Dioden. Zur Bestimmung der dynamischen Verluste benötigt man die Zeitverläufe von Strom und Spannung während des Schaltvorgangs, den Einschalt- und Ausschaltdauer sowie die Wiederholfrequenz des Schaltvorgangs.

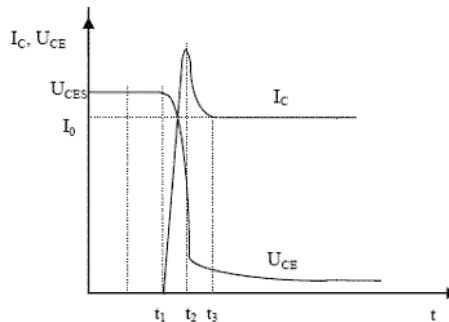


Abb.2.3 Einschaltensvorgang eines IGBTs

In Bild 2.3 wird das Einschalten eines Schaltelementes gezeigt, wenn als Beispiel ein IGBT gewählt wird. Die Einschaltverluste sind dann durch Multiplikation des zeitlichen Verlaufs von $i_c(t)$ und $u_{ce}(t)$ zu berechnen:

$$P_{V_dyn_on} = \int_{t_1}^{t_3} u_{ce}(t) \cdot i_c(t) dt \quad (2.19)$$

In der gleichen Weise können aus den Zeitverläufen $i_c(t)$ und $u_{ce}(t)$ während des Ausschaltens die Ausschaltverluste $P_{V_dyn_off}$ abgeschätzt werden. Wird der Begriff von Mittelwert des zu schaltenden Stromes $\overline{I_{C_S}}$ eingeführt, so kann die gesamten Schaltverluste des Halbleiterelements bei einer festen Schaltfrequenz f_{puls} und variablem abzuschaltenden Strom durch eine Näherung mit linearem Zusammenhang der Form $E^*(I_C) = k^* \cdot I_C$ als mittlere Schaltverlustleistung berechnet werden.

$$P_{V_dyn} = k^* \cdot f_{puls} \cdot \overline{I_{C_S}} \cdot \frac{U_K}{U_{ref}}, \quad (2.20)$$

wobei U_K die Kommutierungsspannung ist. Der Proportionalitätskoeffizient K^* kann beispielsweise durch die Angabe der jeweiligen Schaltverluste E_{on} und E_{off} für IGBT und Diode in Datenblatte des Herstellers ermittelt werden. Im nächsten Abschnitt werden die Ermittlung von K^* -Werten anhand eines Berechnungsverfahrens der Wechselrichterverluste detailliert vorgestellt. Der mittlere zu schaltende Strom eines Halbleiterelements bei fester Schaltfrequenz ergibt sich zu:

$$\overline{I_{C_S}} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \sqrt{2} \cdot I_v \cdot \sin(\omega t - \varphi) \cdot d(\omega t) = \frac{\sqrt{2} \cdot I_v}{\pi} \quad (2.21)$$

Die dynamischen Verluste sind Lastwinkel unabhängig.

2.2.2 Berechnungsverfahren der Verlustbestimmung eines IGBT-Wechselrichters

Im letzten Abschnitt werden die Verluste eines 3-phasigen Pulswechselrichters analytisch ermittelt. Durch die zusammengefasste Formel der statischen und dynamischen Verluste ist man in der Lage, die gesamten Verluste eines Leistungsmoduls anhand des Datenblatts des Herstellers zu bestimmen. Gewählt wurde ein der PWM-Wechselrichter mit 3 parallel geschalteten EUPEC-IGBT-

Modulen BSM200GB120DLC, welcher besteht aus 6 IGBTs und dazu antiparallel geschalteten Dioden. Folgende Daten aus dem Datenblatt für das Modul BSM200GB120DLC sind zur Ermittlung der Verluste benötig:

Typ	BSM200GB120DLC	Einheit
Nennstrom	200	A
Nennspannung	1200	V
Kennwerte bei 125°C		
Durchlasskennlinie IGBT		
U_{ce} bei 50% I_n	1,777	V
U_{ce} bei 100% I_n	2,4	V
U_{ce} bei 200% I_n	3,46	V
U_{cemax} bei 100% I_n	2,9	V
Einschaltverluste IGBT		
bei	600	V
E_{on} bei 50% I_n	10,5	mWs
E_{on} bei 100% I_n	22,0	mWs
E_{on} bei 200% I_n	63,0	mWs
Ausschaltverluste IGBT		
bei	600	V
E_{off} bei 50% I_n	14,0	mWs
E_{off} bei 100% I_n	23,0	mWs
E_{off} bei 200% I_n	44,0	mWs
Durchlasskennlinie Diode		
U_f bei 50% I_n	1,303	V
U_f bei 100% I_n	1,7	V
U_f bei 200% I_n	2,32	V
U_{fmax} bei 100% I_n	2,2	V
Recovery-Verluste Diode bei		
bei	600	V
E_{rec} bei 50% I_n	10,2	mWs
E_{rec} bei 100% I_n	14,0	mWs
E_{rec} bei 200% I_n	18,0	mWs

Tabelle 2.1 Technische Daten des IGBT-Moduls BSM200GB120DLC

Um die statischen Verluste mit der Gleichung 2.9 berechnen zu können, muss zuerst die Durchlasskennlinie von IGBT und Diode ermittelt werden. Die Durchlasskennlinie von IGBT ergibt sich durch

$$U_{ce} = U_T \cdot \ln\left(\frac{I_c}{I_s} + 1\right) + I_c \cdot R_F,$$

wobei die Parameter Temperaturspannung U_T , Sperrstrom I_s und dynamischer Widerstand R_F durch die drei Angaben von U_{ce} bei 50%, 100% und 200% des Nennstroms im Angabebereich „Durchlasskennlinie IGBT“ in Tabelle 2.1 zu bestimmen sind. Das nicht lineare Gleichungssystem

$$1,777V = U_T \cdot \ln\left(\frac{50\% I_n}{I_s} + 1\right) + 50\% I_n \cdot R_F$$

$$2,4V = U_T \cdot \ln\left(\frac{100\% I_n}{I_s} + 1\right) + 100\% I_n \cdot R_F$$

$$3,46V = U_T \cdot \ln\left(\frac{200\% I_n}{I_s} + 1\right) + 200\% I_n \cdot R_F$$

kann laut der Datenangaben der Tabelle erstellt werden. Die Lösungen des Gleichungssystems ergeben die gesuchten Parameter:

$$U_T = 0,2677V; \quad I_s = 0,6781A; \quad R_F = 0,0044\Omega$$

Die Durchlasskennlinie der zugehörigen Diode ist in gleicher Weise zu ermitteln.

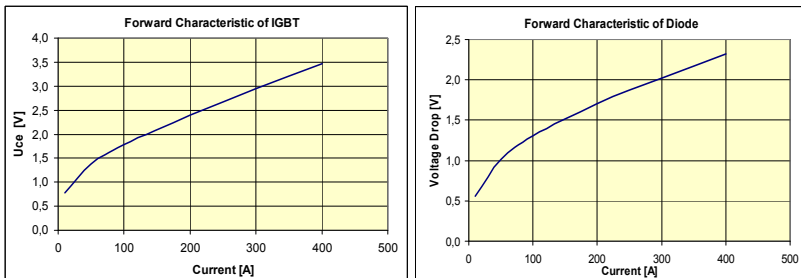


Abbildung 2.4 Ermittelte Durchlasskennlinien von IGBT (links) und Diode (rechts)

Nun können die statischen Verluste von IGBT und Diode mit der Gleichung 2.9 sowie mit Hilfe des arithmetischen Mittelwertes und des Effektivwertes von IGBT-Dauerstrom oder von Diode- Durchlassstrom in den Gleichung 2.14 bis 2.17 bestimmt werden.

DC link voltage	U_d	800	V
Phase Voltage	U_v	460	V
Phase Current	I_v	534	A

Switching Frequency	f_{puls}	8	kHz
IGBT's parallel	N	3	-
Reference Voltage	U_{ref}	600	V
lead resistance	R_{cu}	0,6	mOhm

Tabelle 2.2 Technische Daten des PWM- Wechselrichters

Werden die Daten aus Tabelle 2.2 in die entsprechende Gleichungen eingesetzt, so ergeben sich die Durchlassverluste bei dem Lastwinkel $\varphi_{\text{el}} = 0$

$$P_{\text{igbt.stat}} = 0,2677V \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I_v}{2\pi \cdot N} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_v}{2 \cdot U_d} \right) + 0,0044\Omega \cdot \left(\frac{I_v}{N} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \right)$$

$$= 167,8W$$

$$P_{\text{diode.stat}} = 0,2677V \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I_v}{2\pi \cdot N} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot U_v}{2 \cdot U_d} \right) + 0,0044\Omega \cdot \left(\frac{I_v}{N} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U_v}{U_d} \right)$$

$$= 15,7W$$

Zur Berechnung dynamischer Verluste ist die Gleichung 2.20 anzuwenden. Um die dynamischen Verluste mit dem Mittelwert des zu schaltenden Stromes $\overline{I_{C_s}}$, welcher in Gleichung 2.21 angegeben wird, berechnen zu können, wird der lineare Zusammenhang der Form $E^*(I_C) = k^* \cdot I_C$ als mittlere Schaltverlustleistung eingesetzt. Der lineare Zusammenhang zwischen Einschaltverlustenergie und durchfließendem Strom kann durch einen Polynom angenähert werden. Mit den 3 Datenangaben unter dem Angabebereich „Einschaltverluste IGBT bei 600V“ in Tabelle 2.1 kann ein lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten erstellt werden:

$$10,5mWs = A50\% I_n + B(50\% I_n)^2 + C(50\% I_n)^3$$

$$22,0mWs = A100\% I_n + B(100\% I_n)^2 + C(100\% I_n)^3$$

$$63,0mWs = A200\% I_n + B(200\% I_n)^2 + C(200\% I_n)^3$$

Mit den ermittelten Polynomkoeffizienten A, B und C lassen sich die Einschaltverlustenergie von IGBT darstellen:

$$E_{\text{on_igbt}}(I_C) = A \cdot I_C + B \cdot I_C^2 + C \cdot I_C^3$$

Die Polynomkoeffizienten für Ausschalt- und Gesamtschaltverlustenergie von IGBT sowie die Recovery-Verlustenergie von Diode sind mit gleicher Vorgehensweise zu bestimmen. In Tabelle 2.3 sind die berechneten Polynomkoeffizienten gelistet.

	$E_{on\ igbt}$	$E_{off\ igbt}$	$E_{ges\ igbt}$	$E_{rec\ diode}$
A:	0,1125	0,18	0,2925	0,147
B:	-0,0001375	-0,000475	-0,0006125	-0,000515
C:	6,25E-07	7,5E-07	0,000001375	6,5E-07

Tabelle 2.3 Polynomkoeffizienten für Ermittlung dynamischer Verluste

Nach der Ermittlung der Polynomkoeffizienten können die linearen Abhängigkeiten zwischen den Strom und Einschalt-, Ausschalt- und Gesamtverlustenergie erstellt werden.

Switching Losses

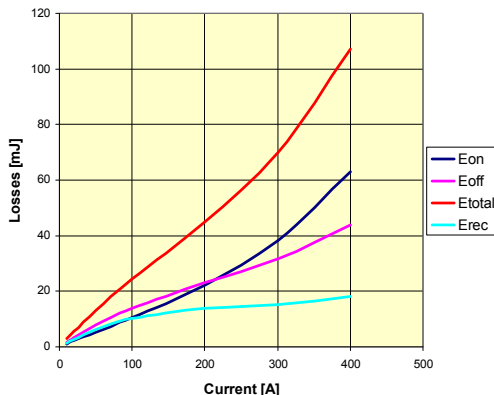


Abbildung 2.5 Grafische Darstellung der Verlustenergie in Abhängigkeit von den Strom

Die dynamischen Verluste von IGBT und Recovery-Verluste der zugehörigen Einzeldiode können dann nach Gleichung 2.20 und 2.21 wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 P_{igbt.dyn} &= \frac{1}{T} f_{puls} \cdot \frac{U_K}{U_{ref}} \int_t^{t+T} E_{ges_igbt}(i_v(t)) dt \\
 &= f_{puls} \cdot \frac{U_K}{U_{ref}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} [0,2925 \cdot \sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi) + 0,00061 \cdot (\sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi))^2 \\
 &\quad + 0,00000138 \cdot (\sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi))^3] = 196W
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{diode.dyn} &= \frac{1}{T} f_{puls} \cdot \frac{U_K}{U_{ref}} \int_t^{t+T} E_{rec_diode}(i_v(t)) dt \\
 &= f_{puls} \cdot \frac{U_K}{U_{ref}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} [0,147 \cdot \sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi) - 0,000515 \cdot (\sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi))^2 \\
 &\quad + (6,5E-0,7) \cdot (\sqrt{2} I_v \sin(\omega t - \varphi))^3] = 68W
 \end{aligned}$$

Die oben berechneten Verluste sind die Verluste einzelnen Halbleiterelementen. Die gesamten Verluste des Wechselrichters sind die Summe der Verluste aller Bauelemente. Mit der Berücksichtigung der Leitungswiderstand R_{cu} innerhalb des Moduls, dessen Wert in Tabelle 2.2 auch angegeben ist, ergeben sich die gesamten Verluste:

$$P_{V_ges} = (P_{igbt.stat} + P_{igbt.dyn} + P_{diode.stat} + P_{diode.dyn}) \cdot 2 \cdot N + P_{V_cu}$$

wobei $P_{V_cu} = \left(\frac{I_v}{N}\right)^2 \cdot R_{cu} \cdot N$ die Leitungsverlust des Wechselrichters darstellt.

Damit betragen die gesamten Verluste des Wechselrichters bei Nennbetrieb und Lastwinkel $\varphi_{el} = 0$

$$P_{V_ges} = (167,8W + 196W + 15,7W + 62W) \cdot 2 \cdot 3 + 57W = 2706W$$

In Abbildung 2.6 werden die Verlustleistungen des Wechselrichters bei verschiedenen Lastwinkel und Betriebszuständen grafisch dargestellt. Das Maximum der Verluste tritt bei der Überlast von 125% ein, da bei der Überlast von 150% in diesem Fall die halbierte Schaltfrequenz von 4kHz eingestellt wird.

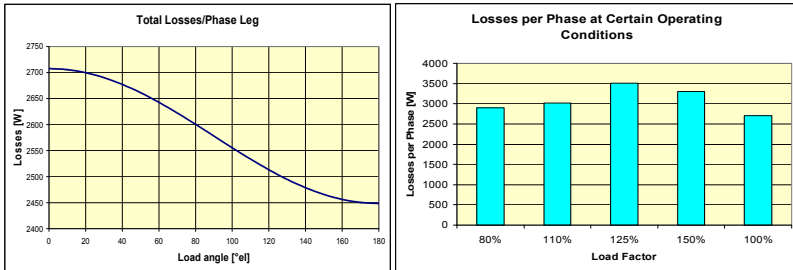


Abb. 2.6 Verlustleistung des Wechselrichters bei verschiedenen Lastwinkel(links) und Betriebszuständen(rechts)

2.3 Temperaturabhängige Betriebsverhalten und Lebensdauer des Leistungshalbleiters

Die elektrischen Eigenschaften eines leistungselektrischen Bauelements sind in einige Masse von Temperatur abhängig. Die Änderung der Temperatur kann eine unterschiedliche Auswirkung der bei elektrischen Parametern und Durchlass-Eigenschaften bei verschiedenen Typen von Bauelementen auswirken. Sowie die Schaltzeiten als auch die Schaltverlust des IGBTs und MOSFETs erhöhen sich mit zunehmender Temperatur. Die Erfahrung mit elektronischen Anlagen oder Systemen hat gezeigt, dass die Ausfallsrate der Elemente sich mit erhöhter Temperatur nach exponentiell steigt, sodass die Zuverlässigkeit des Systems auf unterschiedlicher Masse beeinträchtigt wird. Ebenso setzt Temperaturwechsel Zuverlässigkeit elektronischer Bauteile und mechanischer Teile herab. Das Ausfallverhältnis F lässt sich mit dem Arrhenius Gesetz als Funktion der Sperrschichttemperatur darstellen:

$$F = \frac{\text{Ausfallsrate}(T_1)}{\text{Ausfallsrate}(T_0)} = e^{\frac{E_G}{k_B} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right)} \quad (2.22)$$

T_0 Bezugstemperatur

E_G Bandabstand

k_B Boltzmann- Konstante

In manchen Literaturangaben wird das Ausfallverhältnis auch thermischer Beschleunigungs-Faktor genannt.

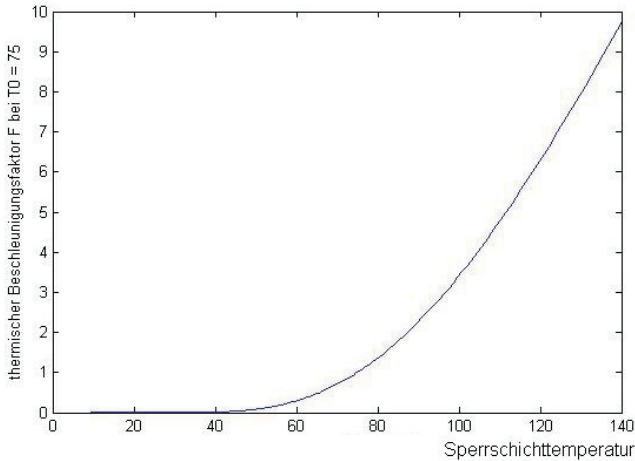


Abb. 2.7 thermischer Beschleunigungsfaktor als Funktion der Sperrschichttemperatur

Abbildung 2.7 zeigt den Verlauf von F in Abhängigkeit von der Sperrschichttemperatur bei der Referenztemperatur $T_0 = 75^\circ$ für Silizium mit dem Bandabstand $E_G = 1,11\text{eV}$. In dieser Grafik ist zu erkennen, dass sich die Ausfallrate elektrischer Bauelemente bei einer Sperrschichttemperatur von 85°C verdoppelt gegenüber 75°C . Bei 120°C ist die Fehlerrate 6-Fach höher als bei 75°C . Mit anderem Wort: im Vergleich mit dem Bauteil mit einer Sperrschichttemperatur von 75°C hat sich die Zuverlässigkeit eines Bauteils bei 85°C um 50% verringert. Deshalb müssen effiziente Maßnahmen zur Begrenzung der Temperaturerhöhung in elektronischen Anlagen eingesetzt werden, um die Zuverlässigkeit des Systems zu sichern.

2.3.1 Die Einfluss der Temperatur auf Leistungshalbleiter

Prinzipiell kann man davon ausgehen, dass alle äußeren Parameter von Halbleiterbauelementen eine Funktion der Temperatur sind. Höhere Temperaturen beeinträchtigen die Leistungsdaten von Leistungshalbleitern. Bei Betrachtung der Beziehungen für Ströme und Spannungen am IGBT existieren im Wesentlichen 3 temperaturabhängige Halbleitergrößen:

1. Eigenleitungsdichte

$$n_i = n_i(g_0) \left(\frac{g}{g_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2k} \frac{W_g}{g_0} \left(\frac{1}{g_0} - \frac{1}{g}\right)} \quad (2.23)$$

$$2. \text{ Ladungsträgerbeweglichkeit} \quad \mu = \mu(\vartheta_0) \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{-T_{k1}} \quad (2.24)$$

$$3. \text{ Ladungsträgerlebensdauer} \quad \tau = \tau(\vartheta_0) \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{T_{k2}} \quad (2.25)$$

Die Faktoren T_{k1} in Gleichung 2.24 und T_{k2} in Gleichung 2.25 sind jeweils zwischen 1,5~2,5 sowie 2~2,5. Mit steigender Temperatur steigt die Eigenleitungsdichte durch thermische Generation, während der Beweglichkeit aufgrund der zunehmenden Gitterschwingungen und Ladungsdichte sinkt. Der Ladungsträgerlebensdauer ist auf die Rekombination von Ladungsträgern zurückzuführen. Mit steigender Temperatur werden mehr Ladungsträger thermisch generiert und somit nimmt die Nettorekombinationsrate ab, so dass die Lebensdauern der Ladungsträger länger werden. In vielen Fällen ist der Temperatureinfluss von Halbleiterparametern- und Struktur abhängig und führt zu unterschiedlichem Verhalten. Das generelle Aussagen zum temperaturabhängigen Verhalten ist näher zu unmöglich.

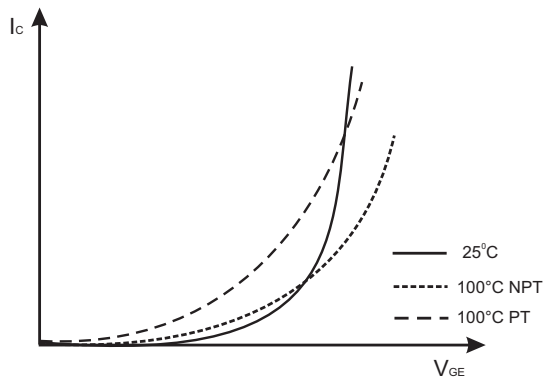


Abb. 2.8 Temperaturabhängigkeit der Sättigungskennlinien für unterschiedliche IGBT-Typen

Bei PT-IGBTs (Punch Through), sinkt z.B. die Sättigungsspannung $U_{CE(sat)}$ mit zunehmender Temperatur. Der Temperaturkoeffizient ist zunächst negativ und geht dann mit zunehmendem Strom in den positiven Bereich über. Der Schnittpunkt liegt meist weit oberhalb des Nennstroms bei PT-IGBTs, während der NPT- IGBT (Non Punch Through) schon bei sehr geringen Strömen einen positiven Temperaturkoeffizient aufweist. Die Temperaturabhängigkeit der Transferkennlinien mit Schwellspannung für Beginnen des Kollektorstroms entsteht durch die Eigenleitungsdichte, den Abstand W_g zwischen Eigenleitungs-

und Fermienergie sowie für die Transferkennlinie über die Ladungsträgerbeweglichkeit.

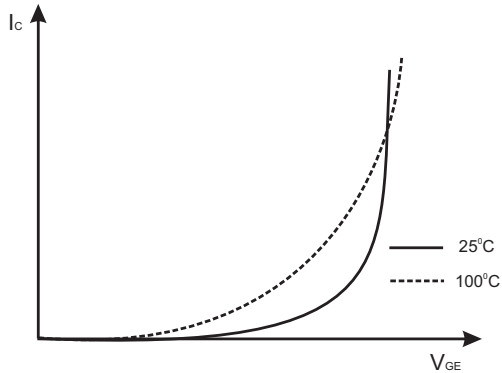


Abbildung. 2.9 Temperaturabhängigkeiten der Transferlinien

In Abb.2.9 dargestellte temperaturabhängige Transferlinien sind zu kennen, dass die Schwellspannung mit steigender Temperatur absinkt und die Kennlinien im Bereich größerer Spannung einen positiven Koeffizienten besetzt. Im Bereich größerer Gatespannung nimmt die Beweglichkeit der Ladungsträger stark ab, so dass die Transferkennlinie einen positiven Temperaturkoeffizienten aufweist. Auch die Verzögerungszeit von PT-IGBT steigt stark mit der Temperatur, während für NPT-IGBT die Temperatur kaum Einfluss auf die Schaltzeit hat. Aber für beide IGBT-Typen sind die erhöhten Einschaltverluste zu erwarten, welche auf verschlechtertem Schaltverhalten der Freilaufdiode zurückzuführen sind. Bei PIN-Dioden (Positive Intrinsic Negative carrier zone) sinkt die Durchlassspannung mit steigender Temperatur während die Sperrverzögerungsladung Q_{rr} und t_{rr} mit zunehmender Temperatur steigen. Erhöhen sich die Schaltzeiten bei der Ansteuerung induktiver Lasten, nehmen sich die Leckströme exponentiell mit zunehmender Temperatur zu und somit steigt die Drain-Source-Durchbruchspannung. Bei MOSFETs steigt der Drain-Source-Durchlasswiderstand $R_{DS(on)}$ mit zunehmender Temperatur, was wiederum eine höhere Verlustleistung verursacht. Mit zunehmender Temperatur steigen die Drain-Source-Durchbruchspannung $U_{DS(br)}$, aber auch die Leckströme des Bauteils, wobei letztere exponentiell zunehmen. Gleichzeitig sinkt die Schwellspannung mit zunehmender Temperatur ab.

2.3.2 Die Beeinflussung an das Lebensdauer von Temperaturschwankungen

Bei der Anwendung von Leistungshalbleitern hat man oft pulsierende Durchlassströme, und damit pulsierende Verlustleistungen vorliegen. Es kommt zu einer periodischen Aufheizung der Silizium-Chips. Da die Masse von Bauelement und Modulgehäuse in der Regel klein gegen die Masse der Modulbodenplatte ist, sind die Temperaturhübe der Chips wesentlich größer als die der Modulbodenplatten. Die Bonddrähte nehmen die selbe Temperatur an und dehnen sich dabei aus. Bei einer entsprechenden Fixierung der Enden der Bonddrähte ergibt sich durch die Ausdehnung eine periodische Durchbiegung. Für solche Wechsellasten kann der Temperaturanstieg aus der Gesamtverlustleistung P_v und dem transienten Wärmewiderstand Sperrschicht-Gehäuse Z_{thjc} berechnet werden.

$$\Delta T(t) = P_v \cdot Z_{thjc} = P_v \sum_{i=1}^n R_i [1 - e^{-t/\tau_i}] \quad (2.26)$$

Die Ausfallursache der IGBT- Standardmodule ist das Versagen der Bondverbindung infolge von Materialermüdung, was zu einem Abheben (lift off) des Bonddrahtes vom Chip oder Bondbruch (crack) führt (Abb.2.10).

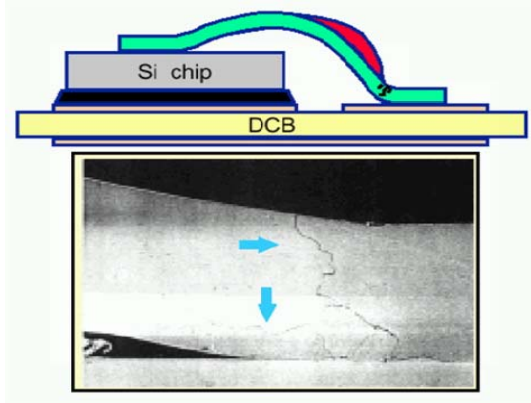


Bild 2.10 Typische Versagen von Bonddrähten beim „Power Cycling“ (nach H. Berg [15])

Die thermomechanischen Wechsellasten führen zur Ausbildung und zum Wachstum von Mikrorissen im Bereich der Ultraschall-Schweißverbindung, die schließlich in die Ablösung des Bonddrahtes mündet. Zur Beschreibung des

Materialversagens durch Risswachstum infolge von Temperaturwechselbeanspruchung wird das Coffin-Manson-Modell eingesetzt [12]:

$$N_F = \left(\frac{T_0}{T_{j\max} - T_{j\min}} \right)^\alpha = \left(\frac{T_0}{\Delta T} \right)^\alpha \quad (2.27)$$

mit N_F : Zahl der Temperaturzyklen bis zum Ausfall
 T_0 : empirisch gewonnene Referenztemperatur
 α : empirisch gewonnener Exponent.

Bei geringen Temperaturschwankungen und $T_{j\max}=125^\circ$ folgt der Verlauf der Funktion

$$N_{F1} = \left(\frac{A_1}{T_{j\max} - T_{j\min}} \right)^{B_1},$$

während bei größeren Schwankungen näherungsweise ein Verlauf von

$$N_{F2} = \left(\frac{A_2}{T_{j\max} - T_{j\min}} \right)^{B_2}$$

eingenommen wird. Die Addition von beiden Funktionen ergibt den in Bild 2.11 eingezeichneten Kurvenverlauf.

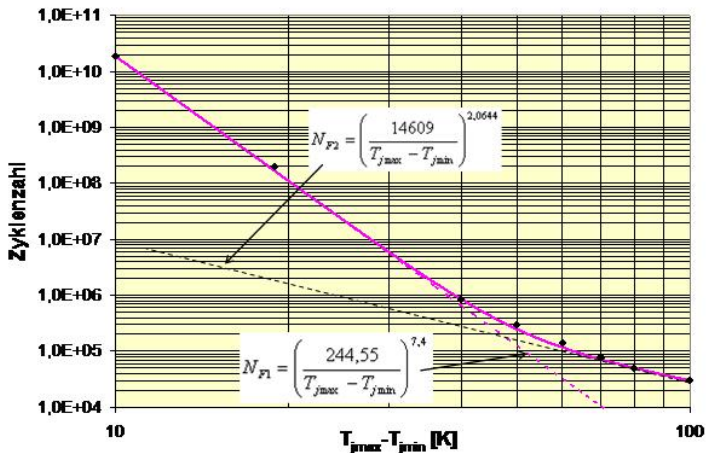


Bild 2.11 Maximale Zyklenzahl für IGBT-Standardmodule bei $T_{j\max}=125^\circ\text{C}$ [16]

Das heißt, die Messdaten lassen sich durch einen analytischen Ausdruck darstellen:

$$N_F = \left(\frac{A_1}{T_{j_{\max}} - T_{j_{\min}}} \right)^{B_1} + \left(\frac{A_2}{T_{j_{\max}} - T_{j_{\min}}} \right)^{B_2}$$

Werden die Auswirkungen von Temperaturwechseln bei verschiedenen Temperaturniveaus untersucht, wird dies durch die Einführung des Arrhenius-Faktors berücksichtigt [12, 13]:

$$N_F = \left(\frac{T_0}{\Delta T} \right)^{\alpha_1} \cdot \exp \left(T_1 \cdot \left(\frac{1}{T_{j_{\max}}} - \frac{1}{T_{j_{\max,ref}}} \right) \right) \quad (2.28)$$

Der Arrhenius-Faktor berücksichtigt, dass bei höheren Temperaturen durch die stärkeren Gitterschwingungen eine Art „Aktivierungsenergie“ zur Verfügung steht, die das Risswachstum erleichtert. Der Arrheniusfaktor ist somit auch als „Beschleunigungsfaktor“ der Bondermüdung bei Temperaturerhöhung bezeichnet. Diese Betrachtungsweise aus dem Bereich der chemischen Reaktionskinetik wird somit auf den hier vorliegenden thermo-mechanischen Wirkungsmechanismus übertragen. Es wird darauf hingewiesen, dass der Arrheniusfaktor nicht in jedem Fall die Veränderungen der experimentellen Daten mit dem Temperaturniveau adäquat beschreibt und auch die Einführung anderer funktionaler Zusammenhänge zweckmäßig sein kann. Die Funktion zur Interpolation zwischen der Charakteristik für $T_{j_{\max}} = \text{const.}$ und $T_{j_{\min}} = \text{const.}$ muss folglich anhand der Primärdaten so gewählt werden, dass deren Eigenschaften möglichst adäquat wiedergespiegelt werden. Betrachtet man das Verhältnis der maximalen Zyklenzahlen bei unterschiedlichen maximalen Chiptemperaturen und gleichem Temperaturhub in Bild 2.12, so erhält man den in Bild 2.13 gezeigten Verlauf.

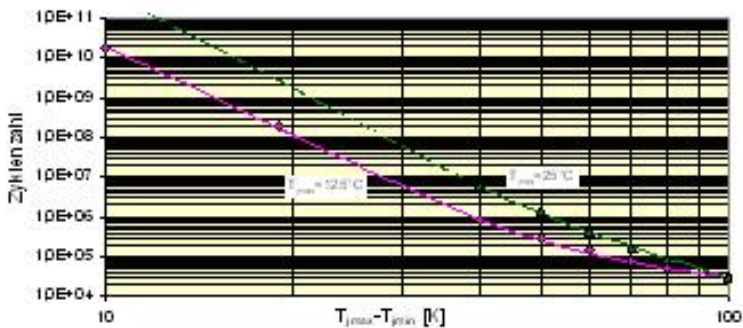


Bild 2.12 Maximale Zyklenzahl bei IGBT-Standardmodulen für $T_{j_{\max}} = 125^\circ\text{C}$ und $T_{j_{\min}} = 25^\circ\text{C}$ (Datenbasis aus [16])

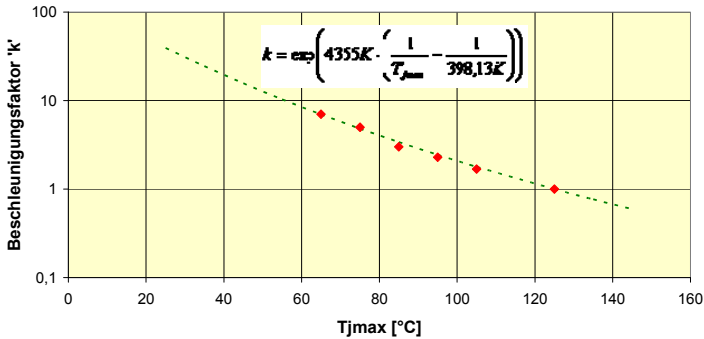


Bild 2.13 Beschleunigungsfaktoren für die Ermüdung der Bonddrähte bei Erhöhung der Chip-temperatur im Vergleich mit einer gefitteten Arrhenius- Funktion

Man erhält aus einer Approximation für den Verlauf die Gleichung:

$$k = \exp\left(T_1 \cdot \left(\frac{1}{T_{jmax}} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad (2.29)$$

Die vollständige Abhängigkeit lautet dann:

$$N_{F.Traction} = \left[\left(\frac{A_1}{T_{jmax} - T_{jmin}}\right)^{B_1} + \left(\frac{A_2}{T_{jmax} - T_{jmin}}\right)^{B_2} \right] \cdot \exp\left(T_1 \cdot \left(\frac{1}{T_{jmax}} - \frac{1}{T_{ref}}\right)\right) \quad (2.30)$$

Es wird häufig darüber hinaus noch eine Proportionalität der Art $\sim f^\beta$ (f...Lastwechselfrequenz) angegeben, da Rissentstehung und– Ausbreitung stochastische Vorgänge mit charakteristischen Zeitkonstanten sind. Die Größe von β wird dabei mit ca. 1/3 angegeben. Zu den relevanten Bondverbindungen liegen keine derartigen Werte vor, so dass sie nachfolgend nicht berücksichtigt werden können. Die getroffene generelle Aussage ist, dass mit steigender Frequenz auch die Zyklenzahl bis zum Versagen ansteigt.

2.4 Angewendete Kühlungstechnologien für Powermodule sowie deren weitere Entwicklung

Die Entwicklung der Leistungselektroniksysteme geht in Richtung höhere Leistungsdichten. Dies erfordert effizientere Kühlungssysteme. Die Forderungen nach höherer Leistungsdichte, kleinerer Modulabmessung und niedrigerer

Betriebstemperatur haben eine Eskalation der Verlustleistungsdichte sowie Wärmeflussdichte zur Folge. Thermisches Design kann nicht mehr vom Gesamtsystem getrennt behandelt werden. Da das thermische Problem eine immer wichtigere, sogar bei manchen Fällen entscheidende, Rolle spielt, sind thermisches Management und Wärmeabfuhr eine herausfordernde Aufgabe des Systementwurfs geworden. Zur Minimierung thermischer Widerstände sind neue Materialien, verbesserte Gehäusetechnologien und effizientere Kühlkörper erforderlich. Dabei hat sich die Technologie der Verkapselung mit der Entwicklung der Technologie von integrierten Schaltkreisen(IC's) gleichfalls schnell entwickelt.

2.4.1 Die Anforderungen an Packaging und Kühlungssystem in leistungs-elektronischen Elementen

2.4.1.1 Packaging von Leistungshalbleiter-Element

Beim thermischen Management ist als Wichtigstes zu betrachten, dass die Entwicklungen und Verbesserungen des Packaging den höheren Wärmefluss in immer kleineren Packagingsvolumen ermöglichen. In fast jedem Gehäusedesign sollen die Kosten für das thermische Management im Vergleich mit dem Gesamtsystem gering sein. Bild 2.14 zeigt den Trend der Technologie von Power Electronic Packaging in den letzten 30 Jahren.

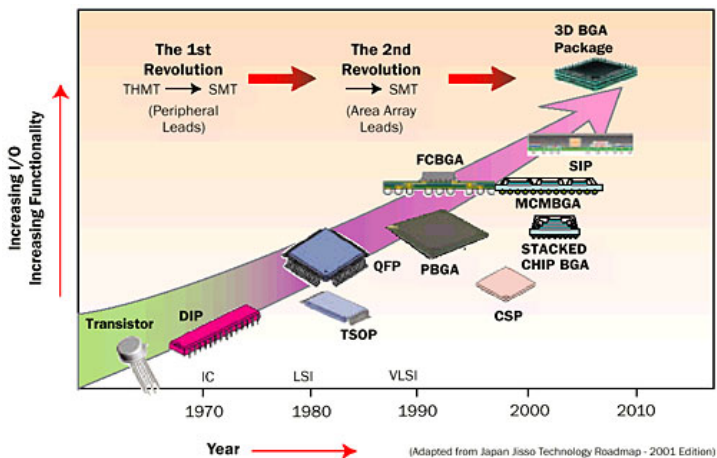


Abbildung 2.14 Der Trend der Verkapselungstechnologie

In diesem Bild kann man sehen, dass im Jahr 1995 die Oberflächen-Montagetechnik SMT (Surface Mount Technology) durch so genannte Durchsteckmontagetechnik THMT (Through-Hole Mounting Technology) in meisten Anwendungsbereichen ersetzt wurden. Die viereckige Verkapselung kann dabei bis zu 300 Anschlüsse zur Peripherie haben. Mit der steigenden Forderung an die Anzahl der I/O- Verbindung wurde die Packagingtechnik mit Anordnung in der Fläche vorangetrieben. Die Kugelgitter- Anordnung BGA (Ball Grid Array) mit PCB(printed circuit boards)- Substrat als Medium der elektrischen Verteilung wurde in den Markt eingeführt. Dies ermöglicht das rasche Anwachsen der Varianzen sowie die flexible Herstellung (wie z.B. Multichip-Packet(MCM)) und die Verkapselung von Multichips und passiven Komponenten (System-in-Package) ermöglicht. Das System- Substrat wird zur Wärmespreizung genutzt, um den Wärmefluss zur Umgebung zu verstärken. Zur Verstärkung des Wärmeflusses durch die Dicke von den Verkapselungsschichten und von dem Substrat werden die Durchgangslöcher für Wärmeabfuhr angefügt. (siehe Abb. 2.15)

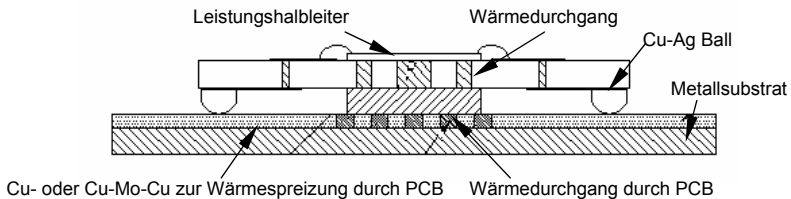


Abbildung 2.15 Wärmedurchgang in elektronischer Verkapselung (nach Guenin, B. [21])

Ist die Anzahl der Verbindungen mehr als 500, wird die so genannte Wende Montage- Technik(flip chip technologie) verwendet, wobei die Montage des Chips und die Kontaktierung gleichzeitig erfolgt.

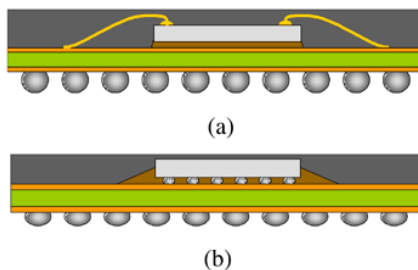


Abbildung 2.16 Schematische Darstellung von (a) Drahtbond und (b) Flip Chip Technologie
(nach Guenin, B. [21])

Der Chip wird dabei direkt auf den Anschlusspad des Substrates gelötet oder geklebt. Mit dieser Technik können die Elektronen und die Wärme effizient ausgekoppelt und jeweils getrennt nach unten zum Moduls substrat und nach oben zum Kühlkörper geleitet werden. Weitere Maßnahmen zur Verbesserung der thermischen Eigenschaften des Systems bei einem Leistungsniveau über 100W sind Nutzung von Verbundstoffen und „thermal interface materials“ (TIM), die eine hohe Wärmeleitfähigkeit und den gleichen Wärmeausdehnungsfaktor wie Silizium besitzen.

2.4.1.2 Kühlsysteme

Hochleistungsmodul produzieren hohe Verlustleistungen und damit Wärme während der Betriebszeiten. Diese Wärme hat die Erhöhung der Sperrschichttemperatur zur Folge. Ohne weitere Maßnahmen würde die Temperatur der Leistungsbauteile die maximale zulässige Grenze überschreiten, so dass das Leistungsmodul thermisch versagen würde. Deshalb ist das Kühlsystem eine wichtige Komponente für die Zuverlässigkeit des Gesamtsystems.

Um das Leistungsmodul thermisch stabilisieren zu können, muss folgende Bedingung erfüllt werden:

$$P_V = Q / A \quad (P_V = nE \cdot f)$$

mit	P_V :	Verlustleistung eines Bauelements
	Q :	Leistung des Kühlsystems
	A :	Kühlungsfläche des Leistungsmoduls
	n :	Anzahl des Leistungshalbleiters
	E :	Verlustleistung in einer Schaltperiode
	f :	Schaltfrequenz

Diese Bedingung weist darauf hin, dass die maximale Schaltfrequenz von der Kühlleistung begrenzt ist. Andererseits, gilt die Regel, dass die Zuverlässigkeit der elektronischen Bauelemente für jede Temperaturerhöhung um 1 Grad um 25% sinkt, wenn sie dauernd bei einer Betriebstemperatur im Bereich von 70°C bis 80°C eingesetzt sind. Alle dieser Eigenschaften von Leistungshalbleitern fordern eine schnelle und effiziente Wärmeabfuhr zur Haltung der Sperrschichttemperatur.

Die Zuverlässigkeit des Kühlsystems ist selbst auch ein wichtiger Aspekt, da das Versagen des Kühlsystems direkt zum thermischen Versagen der Bauteile führt. Die Temperatur des Bauteils kann zwar durch Einsatz von Temperatursensoren überwacht werden, aber die Chips könnten immer noch aufgrund der höheren Zeitkonstanten der Interfaces thermisch zerstört werden. Es wird deutlich, dass die Lebensdauer des Gesamtsystems von denjenigen Komponenten festgelegt wird, die kürzeste Lebensdauer im Kühlungssystem haben. Davon ausgehend muss das Kühlsystem möglichst eine einfache Struktur haben, um die Zuverlässigkeit und Lebensdauer zu erhöhen.

Ein anderer wichtiger Aspekt des Kühlsystems ist das Preis- Leistungs-Verhältnis. Es ist wesentlich für ein System, welches vom Markt akzeptiert wird. Zum Beispiel sind im Vergleich mit Wasserkühlung die Kosten bei Luftkühlung niedriger. Obwohl Luftkühlung die Nachteile von niedrigem Kühlungswirkungsgrad und höherem Geräuschpegel hat, wird sie daher immer als erste Wahl zur Kühlung eingesetzt, sobald die Kühlungsanforderungen abgedeckt werden können. Aber mit der Steigerung der Verlustleistung des Chips werden immer vielfältigen Kühlungskonzepten auch mit Wasserkühlung angewendet.

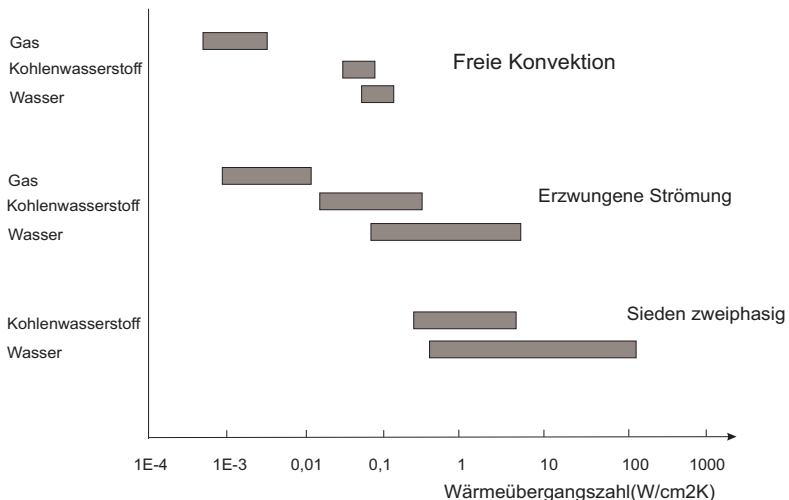


Abbildung 2.17 Vergleich der Wärmeübergangszahl zwischen Luft- und Wasserkühlung (nach Li Tena and Liu Jing [25])

Die Wasserkühlung besitzt eine deutliche höhere Wärmeübergangszahl gegenüber Luftkühlung (siehe Abb. 2.17). Aber das System mit Wasserkühlung

ist komplizierter und enthält einige, die Strömung steuernden Bauteile wie z.B. Ventile und Pumpe, deren Lebensdauer die Lebensdauer des Gesamtsystems begrenzen. Weitere Probleme sind Korrosion und Verschmutzung als Folge. Dadurch ist die Zuverlässigkeit des Wasserkühlungssystems beeinträchtigt.

2.4.2 Die typische Technologie in Chipkühlung

2.4.2.1 Wärmeleitung und Wärmeausbreitung

In allen Anwendungen muss die Wärme aus den Wärmequellen erst durch Wärmeleitung an die Oberflächen geleitet werden, welche mit dem Kühlmedium Kontakt haben, bevor sie durch das Kühlmittel abtransportiert werden kann.

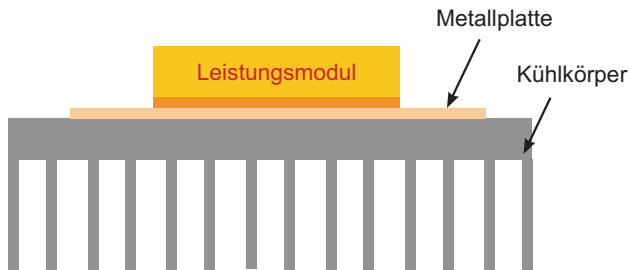


Abbildung 2.18 Wärmeabfuhr durch Wärmeleitung ins Kühlkörper

Zum Beispiel muss, wie in Abbildung 2.18 gezeigt, Wärme aus dem Modul zuerst durch Wärmeleitung in den Kühlkörper geleitet werden, bevor sie von strömender Luft abtransportiert werden. In vielen Fällen wird eine Metallplatte mit guter Wärmeleitfähigkeit zwischen Modul und Kühlkörper eingebracht zur Spreizung der des Wärmestroms. Auch Heat Pipes werden verwendet, um die Wärme aus einem konzentrierten Lager wie Chip oder Modul zu einer größeren Fläche eines Kühlkörpers zu transportieren und gleichmäßig zu verteilen. Dieses Phänomen der Verbreitung des Wärmestroms wird Wärmespreizung genannt. Sie ist ein sehr wirksames Mittel für anspruchsvolle Kühlungsaufgaben zur Milderung der hohen Wärmeflussdichte. Wärmespreizung ist ein komplizierter Vorgang, welcher sich von der Geometrie des Kühlkörpers, der Montagestelle der Wärmequelle und durch Randbedingung beeinflussen lässt. Eine ausführliche Analyse und Diskussion über Wärmespreizung ist im Kapitel 4 durchgeführt. Für Hochleistungsanwendungen spielt der thermische Übergangswiderstand an der Montagestelle auch eine wichtige Rolle. Dabei werden neue Materialien verwendet. Es wurde sogar eine effektive Wärmeübergangszahl von Diamond-

gefülltem Fett als thermisches Übergangs-material von $30\text{W/m}^2\text{K}$ berichtet. Noch interessanter ist eine nano- strukturierte Folie, die eine sehr schnelle exotherme Reaktion zu einer Lötverbindung nahezu bei Raumtemperatur aufweist.

2.4.2.2 Luftkühlung

Luftkühlung unterteilt sich in die Kühlung mit freier- und erzwungener Konvektion. Es ist allgemein anerkannt, dass die traditionellen Techniken der Luftkühlung für die Kühlung von Hochleistungsanwendungen die Grenzen schon nahezu erreicht haben. Mit Standard-Fans erreicht der maximale Wärmeübertragungskoeffizient mit akzeptablem Lärmpegel den Wert von etwa $150\text{ W/m}^2\text{K}$, welche bei einer Flussdichte von 1W/cm^2 einen Temperaturunterschied zur Umgebung von etwa 60°C gewährleistet. Mit einem so genannten 'macrojet' mit Luftaufprall können theoretisch $900\text{W/m}^2\text{K}$ erreicht werden, aber der dadurch entstehende Lärmpegel ist kaum hinnehmbar. Bei einem Nicht-Standard-Ventilator, welcher mit dem Kühlsystem für die CPU-Kühlung kombiniert ist, kann ein maximaler Wärmefluss bis zu rund 50W/cm^2 erreicht werden, welcher um den Faktor 10 höher ist als der vor 15 Jahren. Außerdem sind einige neue Initiativen wie z.B. Piezo-Ventilator oder synthetische Mikrodüsen-Kühlung zur Erweiterung des Anwendungsbereichs der Luftkühlung entstanden.

Synthetische Düsen- Kühlung

Der Einsatz von synthetischer Mikrodüsen- Kühlung wurde zunächst vom Georgia Institut für Technologie untersucht und entwickelt. Das Arbeitsprinzip ist in Abbildung 2.19 gezeigt.

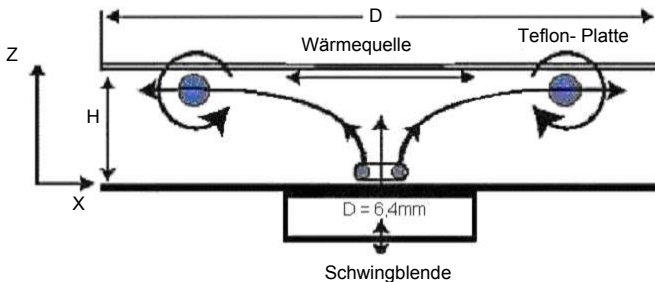


Abbildung 2.19 Arbeitsprinzip von synthetischer Jet- Kühlung (nach Robert E. Simons [19])

Die kühle Luft wird von einer synthetischen Düse von außen eingeblasen und trifft die heiße Oberfläche. Die erwärmte Luft zirkuliert durch die Kanten der Platte in die Umgebung zurück. Aufgrund des pulsierenden Charakters der Strömung weisen synthetische Jets bei der gleichen Reynolds-Zahl eine stärkere Transportfähigkeit der Wärme auf als konventioneller Ventilator. Die Grenzschicht der Wärmeströmung wird dabei effektiv zerstört, so dass eine verbesserte Vermischung zwischen der Grenzschicht und dem Rest der Strömung die Folge ist.

Piezo-Ventilator

Bei Piezoelektrischen Ventilator wird eine piezokeramische Scheibe auf dünnen, flexiblen Nieder-Frequenz-Membran verklebt, um den Lüfter auf seine Resonanzfrequenz zu bringen. Die Membran wird sich nicht als normaler Ventilator rotieren sondern nach links und rechts bewegen. Dabei erzeugt die Nieder-Frequenz-Membran eine kontinuierliche Luftströmung, die sich direkt auf die Elektronik-Komponenten richtet. Das Kühlungsprinzip ist wieder auf eine verstärkte Wärmeübertragung durch Zerstörung der laminarer Grenzschicht der Wärmeströmung zurückzuführen. Eine Verbesserung der Wärmeübertragung bis zu 100% gegenüber natürlicher Konvektion wurde schon berichtet[20].

2.4.2.3 Flüssigkeitskühlungen

Bei Flüssigkeitskühlung kann die Wärmeim Medium um bis zu 2 Größenordnungen pro Volumen mehr als bei Luftkühlung abtransportiert werden. Flüssigkeitskühlung in der Anwendung der Elektronik wird in der Regel in zwei Hauptkategorien von indirekten- und direkten Flüssigkeitskühlungen gegliedert. Die indirekte Flüssigkeits- kühlung ist eine Kühlmethode, bei der die Flüssigkeit die Komponenten nicht direkt berührt, während bei direkter Flüssigkeitskühlung das flüssige Kühlmittel in direkten Kontakt mit den Komponenten gebracht wird. Im Folgenden wird indirekte Flüssigkeitskühlung in Form von Kühlplatten und Wärmerohre (heat pipes) sowie der direkten Flüssigkeitskühlung in Form von Tauch-Kühlung (immersion cooling) und Prall-Strahl- Kühlung(jet impingement) dargestellt.

Kühlplatte(cold plate)

Wassergekühlte Kühlplatten haben ähnliche Funktionen wie luftgekühlte Kühlkörper, wobei als wirksames Mittel zur Wärmeübertragung aus der Komponente eine Flüssigkeit genutzt wird. Die Strömung der Flüssigkeit in der

Kühlplatte erfolgt durch die Wirkung einer Pumpe. Seit vielen Jahren wurden wassergekühlte Kühlplatten in Computertechnik zur Kühlung von Hochleistungs-Multi-Chip-Modulen verwendet. Im Jahr 1981 haben Tuckerman und Pease gezeigt, dass ein flüssigkeitsgekühlter Mikrokanal-Kühlkörper die Wärme mit einer Wärmeflussdichte von $790\text{W}/\text{cm}^2$ bei einer Temperaturdifferenz von 71°C , einem Volumenstrom von $600\text{ml}/\text{min}$ und einer Druckverlust von 207kPa abtransportieren kann. Als Folge des steigenden Wärmestroms aus der Chipebene bekommen Mikrokanal-Kühlplatten immer mehr Aufmerksamkeit.

Wärmerohre (Heat Pipes)

Das Prinzip des Wärmerohrs basiert auf dem Phänomen, dass bei der Phaseänderung eine Wärmemenge gespeichert bzw. freigegeben wird. Das Wärmerohr ist verschlossen und evakuiert sowie teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt. Die Innenwände der Rohre sind mit einem porösen Medium ausgekleidet, das als passive Kapillar-Pumpe genutzt wird. Bei Erhitzung beginnt die Flüssigkeit auf einer Seite des Rohres zu verdunsten. Ein Druckunterschied entsteht, der den Dampf zu kühleren Regionen strömen lässt. Der Dampf kondensiert in den kühleren Regionen und die dabei entstehende Flüssigkeit wird wieder von den Kapillar-Struktur zu der anderen Seite transportiert, so dass der Kreislauf des Kühlmediums geschlossen ist. Das Wärmerohr ist ein verstärktes Mittel für die Beförderung von Wärme aus einer Quelle zu einem Kühlkörper, wo die Wärme durch natürliche oder erzwungene Konvektion mit einer größeren Kühlungsfläche abgeführt werden kann. Die effektive Wärmeleitfähigkeit eines Wärmerohrs kann den Werte von 50000 bis $200000\text{W}/\text{mK}$ [22] erreichen, ist aber oft sehr viel niedriger in der Praxis wegen zusätzlicher thermischer Kontaktwiderstände. Die Wärmestromdichte von Wärmerohre liegt im Bereich von $10\text{W}/\text{cm}^2$ bis über $300\text{W}/\text{cm}^2$. Ein einfaches Wasser-Kupfer-Wärmerohr hat im Durchschnitt eine Wärmeübertragungskapazität von $100\text{W}/\text{cm}^2$. Da der Kreislauf der Flüssigkeit in Wärmerohre keine extra Antriebe benötigt, wird dieser Art von Wärmerohr auch Kapillar-Pump-Wärmerohr (CHP) genannt.

Ein anderes Wärmerohr, das auch keine extra Antriebsenergie braucht, ist ein so genanntes pulsierendes Wärmerohr(PHP). Die experimentelle Untersuchung hat gezeigt, dass die Wärmeübertragungsfähigkeit von PHPs etwa 5mal größer als die von CHP ist.

Eintauchen-Kühlung (immersion cooling)

Bei der Eintauch- Kühlung sind die Systemkomponenten in eine nicht leitfähige Flüssigkeit eingetaucht. Die Flüssigkeit wird in der Regel mit einer Pumpe beim Umlauf innerhalb und auch außerhalb der Kapselung zur Kühlung angetrieben. Theoretisch ist diese Methode vermutlich die beste Kühlungstechnik, weil die Wärmequelle das Kühlmittel mit hoher Wärmekapazität direkt kontaktiert. In diesem System könnte ein Siedenvorgang in Abhängigkeit von der Wahl des Kühlmittels auftreten, welches in den praktischen Anwendungen zu verhindern ist. Direkte Flüssigkeit-Eintauchen-Kühlung bietet einen hohen Wärmeübergangskoeffizient und vermindert den Temperaturanstieg der Chip-Oberfläche über die Kühlmittel-temperatur. Innerhalb des Gehäuses könnte die Kühlung von spezifischen Komponenten verstärkt werden, indem die frisch gekühlte Flüssigkeit aus Düsen direkt auf die heißen Punkte geströmt wird. Ein Nachteil dieser Technik ist die begrenzte Auswahl der Flüssigkeit. Wasser könnte hier formal auf Grund der chemischen und elektrischen Eigenschaften gut verwendet werden, verändert aber schnell seinen Zustand beim Aussetzen in einem elektrischen Strömungsfeld.

Düsen-Aufprall- und Sprühkühlung (jet impingement and spray cooling)

Flüssigkeitsaufprall- und Sprühkühlung (siehe Abb.2.20) werden häufig als konkurrierende Optionen der elektronischen Kühlung dargestellt.

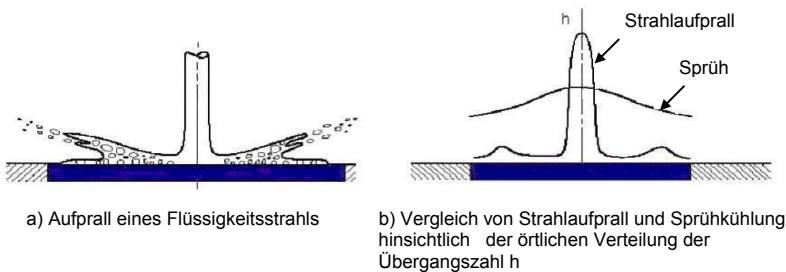


Abbildung 2.20 Die Veranschaulichung der Flüssigkeitsprall- und Einspritzekühlung (nach Robert E. Simons [19])

Bei Aufprall- und Sprühkühlung wird die Flüssigkeit in feinen Tröpfchen individuell auf die beheizte Ebene gespritzt. Die Kühlung der Oberfläche erfolgt durch Wärmeleitung im Fall von einphasiger Flüssigkeitskühlung oder durch die Kombination von Wärmeleitung und Verdampfen der Flüssigkeit im Fall von zweiphasiger Flüssigkeitskühlung. Bei zweiphasiger Flüssigkeitskühlung erhöht

der Tröpfchenaufprall einerseits die Gleichmäßigkeit der räumlichen Wärmeabfuhr und verzögert andererseits die Trennung der Flüssigkeit von der erwärmten Oberfläche bei hartem Siedens. Zweiphasige Sprühkühlung mit Fluorid als Kühlmittel wird zur Erhaltung der Sperrschichttemperaturen von ASICs in MCMs in den Cray SV2 System zwischen 70 und 85°C bei den Wärmeflusse von 15 bis 55 W/cm² verwendet[24]. Laut der Forschungsberichte von UCLA wurde eine maximale Wärmeflussdichte von 160W/cm² bei Leistungsverstärkern mit Anwendung der Sprühkühlung gemessen. Bei der Kühlung mit Strahlauflprallkühlung wurde eine Wärmeflussdichte von 180W/cm² bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 0,3l/min erreicht. In der Regel reduziert die Sprühkühlung im Vergleich mit dem Strahlauflprall die Anforderungen an den Volumenstrom und erfordert einen höheren Düsendruck.

Kapitel 3

Das Grundprinzip zur Wärmeabfuhr bei Leistungshalbleitern

3.1 Grundprinzip der Wärmeübertragung in der Elektronik

Alle Halbleiter sind im Betrieb von der maximal zulässigen Spitztemperatur begrenzt. Da die Verlustleistung mit der zunehmenden Integration und Schaltfrequenz zunimmt, hat die Wärmeabfuhr in der modernen Elektronik eine zentrale Bedeutung.

Es gibt grundsätzlich drei Arten von Wärmeübertragung

- Leitung
- Konvektion
- Strahlung

3.1.1 Wärmeübertragung durch Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung erfolgt der Wärmeaustausch durch die thermische Bewegung zwischen benachbarten Atomen, Molekülen und freien Elektronen. Das Prinzip des Wärmetransports in Gasen, Flüssigkeiten und elektrisch leitenden- und isolierenden Festkörpern ist unterschiedlich. Beim Gas ist Wärmeleitung die Konsequenz des Aufpralls der Gasmoleküle durch thermische Bewegung. Je höher die Gastemperatur ist, desto mehr kinetische Energie besitzen die Moleküle. Durch die Aufpralle zwischen den Molekülen mit unterschiedlichem Energieniveau lässt sich die Wärme von der Ebene hoher Temperatur zu der Ebene niedriger Temperatur übertragen. Bei elektrisch leitendem Festkörper wird die Wärme hauptsächlich durch die Bewegung der freien Elektronen übertragen. Bei elektrisch isolierendem Festkörper erfolgt die Wärmeleitung durch die Schwingung der Atome und Moleküle um ihren Stammgitterplatz. Die Übertragung durch die Schwingungen der Gitterstruktur wird auch „elastische Welle“ genannt. Das Prinzip der Wärmeleitung bei Flüssigkeiten ist noch zu diskutieren. Einige Gesichtspunkte sind ähnlich dem Prinzip wie bei Gas während andere zur „elastischen Welle“ tendieren.

Den Zusammenhang zwischen Wärmestromdichte \dot{q} [W/m²] und Temperatur T[K] beschreibt das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung

$$\dot{q} = -\lambda \text{grad}T \quad (3.1)$$

Im mehrdimensionalen Fall kann das Temperaturfeld $T=f(x,y,z,t)$ im definierten Gebiet Ω (Bild 3.1) durch die transiente Wärmeleitungsdifferentialgleichung

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_E \quad (3.2)$$

und im Zylinderkoordinatensystem

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_E \quad (3.3)$$

mathematisch beschrieben werden, wobei c spezifische Wärmekapazität [Ws/kg/K], ρ Dichte [kg/m³] und \dot{q}_E [W/kg] spezifische Wärmequelle im Gebiet Ω sind.

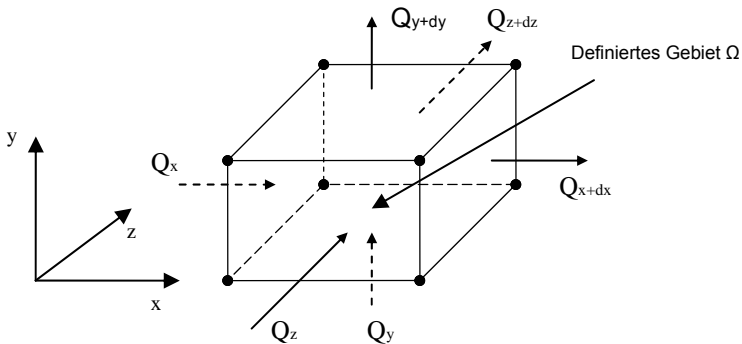


Abbildung 3.1 Wärmeleitung im Gebiet Ω

Ist das Material homogen und es im Gebiet Quellefrei, führt die Gleichung 3.2 zu der vereinfachten Darstellung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

Der Koeffizient $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ in Gleichung 3.3 ist die Temperaturleitfähigkeit des Materials. Je größer der Koeffizient a ist, desto schneller breitet sich die Wärme in den Material aus. Bei stationärer Wärmeleitung lässt sich die Gleichung 3.4 weiter zur Laplace- Gleichung vereinfachen

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.5)$$

Zur eindeutigen Lösung der Wärmeleitungsgleichung 3.3 benötigt man zusätzlich noch die Anfangs- und Randbedingungen, wobei zwischen der Diriclet-, der Neumann- und der Robin- Randbedingung unterschieden wird. Die ausführliche Spezifikation über Rangbedingungen ist in [4] beschrieben werden.

3.1.2 Wärmeübertragung durch Konvektion

Konvektion ist ein Prozess der Wärmeübertragung, welcher durch relative Bewegung und Mischung zwischen strömenden Medienteilen mit unterschiedlichen Temperaturen hervorgebracht wird. Da in Flüssigkeiten gleichzeitig die thermische Eigenbewegung der Moleküle existiert, ist Konvektion auch ein Phänomen der Mischung von Wärmeleitung und Energietransport durch das strömende Medium. Nach dem Entstehungsprinzip kann bei Konvektion zwischen freier oder forcierter Konvektion unterschieden werden. Wird die Strömung durch Dichteunterschied in einem Gravitationsfeld hervorgerufen, so handelt es sich um freie Konvektion. Wird das Strömungsfeld durch Pumpen, Ventilatoren und ähnliche Effekte mit Druckunterschied angetrieben, so wird der Wärmeübertragung als erzwungene Konvektion bezeichnet. Die Basisgleichung zur Beschreibung der Wärmeübertragung durch Konvektion ist die Newtonsche Formel

$$\dot{q} = h \cdot (T_w - T_\infty) \quad (3.6)$$

T_w	Wandtemperatur
T_∞	Temperatur des Mediums
h	Wärmeübergangskoeffizient[W/m ² K]

Der Wärmeübergangskoeffizient ist von vielen Faktoren der Wärmeübertragung abhängig. In der Gleichung 3.6 ist zwar die Definition von Wärmeübergangskoeffizienten gegeben, allerdings werden die Zusammenhänge zu weiteren Einflussfaktoren nicht aufgezeigt. Die Ermittlung von h- Werten bei unterschiedlichen Anwendungen ist das Kern der Forschung der Konvektion, wobei die Theorie der Grenzschichten eine große Rolle spielt.

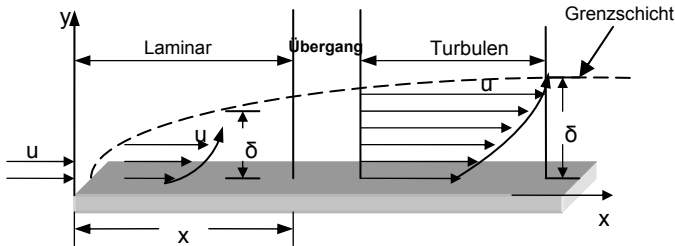


Abbildung 3.2 Grenzschicht der Strömung über einer Wand

In der Grenzschicht δ ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit, die parallel zur gekühlten Wand gerichtet ist, vom Wert Null an rasch auf den Maximalwert u_∞ . Diese Schicht wird auch Strömungsgrenzschicht genannt und hat im Vergleich mit der Wandlänge sehr kleine Werte. Die Strömung innerhalb der Grenzschicht entwickelt sich wie in Abb. 3.2 gezeigt von laminar zu turbulent. Die Länge x_c , wo die Strömung von laminar zu turbulent übergeht, kann durch die marginale Reynolds-Zahl

$$Re_c = \frac{u_\infty x_c}{\nu}$$

bestimmt werden. Analog zur Strömungsgrenzschicht kann man die Temperaturgrenzschicht, wo 99% der Temperaturänderung stattfindet, definieren. Außerhalb der Temperaturgrenzschicht ist der Gradient der Temperatur Null. Das Verhältnis der Dicke von Strömungs- und Temperaturgrenzschicht ergibt die Prandtl-Zahl Pr . Der örtliche Wärmeübergangskoeffizient kann dann durch die folgende charakteristische Gleichung ermittelt werden:

$$Nu_x = f(Re_x, Pr) \quad (3.7)$$

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda_F}$$

Nusselt-Zahl an der Orts-Koordinate x als charakteristische Länge

$$Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu}$$

Reynolds-Zahl mit der örtlichen Koordinate x als charakteristische Länge

λ_F

Wärmeleitfähigkeit des Fließmediums

h_x

örtlicher Wärmeübergangskoeffizient

Der durchschnittliche Wärmeübergangskoeffizient h ist mit der charakteristischen Gleichung

$$Nu = \frac{h \cdot l}{\lambda_F} = f(Re, Pr) \quad (3.8)$$

zu ermitteln, wobei die ganze Länge der Wand l als charakteristische Länge zur Bestimmung von Nu und Re genommen wird. Bei freier Konvektion lässt sich die Wärmeübertragung beschreiben durch:

$$Nu = \frac{h \cdot l}{\lambda_F} = f(Gr, Pr) \quad (3.9)$$

$$Gr = \frac{l^3 g_0 \alpha_p \Delta T}{\nu^2} \quad \text{Grashof-Zahl}$$

α_p Dehnungskoeffizient des Fluids

g_0 Örtliche Fallbeschleunigung

ΔT Temperaturdifferenz zwischen der Wand und des Fluids

Bei der Verwendung von Gleichung 3.8 und 3.9 muss noch berücksichtigt werden, dass eine Referenztemperatur zur Festlegung der Materialeigenschaften des Fließmediums festgelegt werden muss, da die Temperaturdifferenz $T_w - T_\infty$ entlang der Wand in Gleichung 3.6 als Konstanten genommen wird. In den meisten Fällen ist die genaue Darstellung der Gleichungen 3.8 und 3.9 nur durch ein Experiment empirisch zu ermitteln.

3.1.3 Wärmeübertragung durch Strahlung

Der Energietransport durch elektro-magnetische Wellen wird Strahlung genannt. Wärmestrahlung ist auch einer Art von elektro-magnetischer Welle, welche durch die thermische Bewegung der Teilchen erregt wird. Alle Körper in der Nature können Wärme ausstrahlen und absorbieren, sobald die Temperatur über den absoluten Nullpunkt liegt. Der stationäre Wärmezustand des Körpers entspricht der dynamischen Balance beider Vorgänge. Bei der Wärmeübertragung durch Strahlung wird im Vergleich mit Wärmeleitung und Konvektion nicht nur Energie transportiert sondern es findet auch eine Energieumwandlung statt. Die Wärmeenergie wird bei Ausstrahlung in Strahlungsenergie und die Strahlungsenergie bei Absorption in Wärmeenergie umgewandelt. Eine andere

Charakteristik der Wärmestrahlung ist die Wärmeübertragung im Vakuum. Die Wärmestrahlung lässt sich im Vakuum am effizientesten übertragen, während bei Wärmeleitung und Konvektion die Wärme durch Medien übertragen werden.

Wenn die Wärmestrahlung auf einen Körper auftritt, wird sie vom Körper teilweise absorbiert, reflektiert oder durchläuft. Es sind Absorptionsgrad $\alpha = \frac{Q_a}{Q}$,

Reflexionsgrad $\rho = \frac{Q_r}{Q}$ und Transmissionsgrad $\tau = \frac{Q_t}{Q}$ als Verhältnisse der

Absorptionsanteil, Reflexionsanteil und Transmissionsanteil zu Anfallender Energie der Wärmestrahlung definiert. Es gilt

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3.10)$$

Bei Festkörpern und Flüssigkeiten kann der durchgehende Anteil der Wärmeenergie vernachlässigt werden. Damit lässt sich die Gleichung reduzieren auf

$$\alpha + \rho = 1 \quad (3.11)$$

Der Körper kann nach der Fähigkeit der Absorption bzw. der Reflexion als schwarz ($\alpha=1$), spiegelnd ($\rho=1$), grau (α unabhängig von Wellenlänge) und Transparenz ($\tau=1$) bezeichnet.

Zur quantitativen Darstellung der Wärmestrahlungsfähigkeit eines Körpers wird die spezifische Ausstrahlung E [W/m^2] eingeführt. Sie ist die über alle Wellenlängen verteilte Strahlung und berechnet sich mit

$$E = \varepsilon E_s = \varepsilon \sigma T^4 \quad (3.12)$$

wobei ε der Emissionsgrad und σ die Boltzmannkonstant ($\sigma=5,76W/m^2K^4$) sind mit

$$\varepsilon = \frac{E}{E_s} = \frac{\int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda}{\sigma T^4} \quad (3.13)$$

Der Emissionsgrad beschreibt das Verhältnis der spezifischen Ausstrahlung zwischen dem gegebenen Körper und einem schwarzem Körper bei gleicher Temperatur. E_{λ} in Gleichung 3.13 ist die spezifische Ausstrahlung eines Körpers bei einer bestimmten Wellenlänge. Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz sind der Emissionsgrad und der Absorptionsgrad bei einem grauen Körper immer gleich:

$$\varepsilon = \alpha \quad (3.14)$$

Die Emissionsgrade sind vom Material, der Oberflächentemperatur und dem Zustand der Oberfläche abhängig und von Außenbedingungen unabhängig. Der Emissionsgrad bei elektrisch leitenden Materialien ist viel kleiner als der bei elektrisch isolierenden Materialien. Da nur eine dünne Schicht an der Oberfläche des Materials am Strahlungsaustausch teilnimmt, werden die Strahlungseigenschaften im Wesentlichen durch die Beschaffenheit der Oberfläche bestimmt. Verunreinigte und oxidierte Oberflächen weisen einen höheren Emissionsgrad als polierter Oberflächen auf. Die elektro-magnetischen Wellen aus Wärmestrahlung haben auch bestimmte Wellenlängen. In den meisten industriellen Anwendungsgebieten ($T < 2000\text{K}$) liegen die Wellenlängen der Wärmestrahlung im Infrarotbereich ($0,76 \sim 20\mu\text{m}$). In diesen Wellenlängbereich sind Emissions- und Absorptionsgrad von der Farbe unabhängig. Die Strahlungseigenschaften einer schwarz- beschichteten Oberfläche sind daher gleich wie die bei weiß- beschichteter Oberfläche. Angewendet in der Kühltechnik ist die Erhöhung der Wärmeabfuhr durch Farbbeschichtung der Leistungsmodule und Kühlkörper aufgrund dieser Eigenschaft limitiert und hängt von den Infraroteigenschaften der Beschichtung ab.

Bei Wärmeübertragungsproblemen in der Elektronik kann man analog zur Konvektion auch die Wärmeübergangszahl h_s durch Strahlung definieren. Wird die Gleichung für den Wärmefluss bzw. Strahlungsleistung

$$\dot{q} = \varepsilon \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$

mit der Gleichung

$$\dot{q} = h_s \cdot (T_1 - T_2)$$

verglichen, ergibt sich die Wärmeübergangszahl h_s durch Strahlung zu

$$h_s = \varepsilon \sigma \cdot T_1^3 f(x); \quad f(x) = 1 + x + x^2 + x^3; \quad x = \frac{T_2}{T_1} \quad (3.15)$$

- A_1 Fläche der Elektronikanlage
- T_1 Temperatur der Elektronikanlage
- T_2 Die Temperatur von der Fläche, welche die A_1 umgibt.

3.2 Das Übertragungsmodell zur Wärmeabfuhr

Die Grundkonzeption der Wärmeabfuhr aus Leistungsmodul zeigt Abbildung 3.3. In dieser Konzeption sind alle drei Wärmeübertragungsarten, die in letztem Abschnitt genannt wurden, vorhanden. Da die Wärme hauptsächlich durch Wärmeleitung in den Kühlkörper geleitet und von dort durch verstärkte Konvektion nach Außen abgeführt wird, ist der Wärmeaustausch durch Wärmestrahlung an der Moduloberfläche wegen der geringen Wärmemenge gegenüber Wärmeleitung und Konvektion zu vernachlässigen.

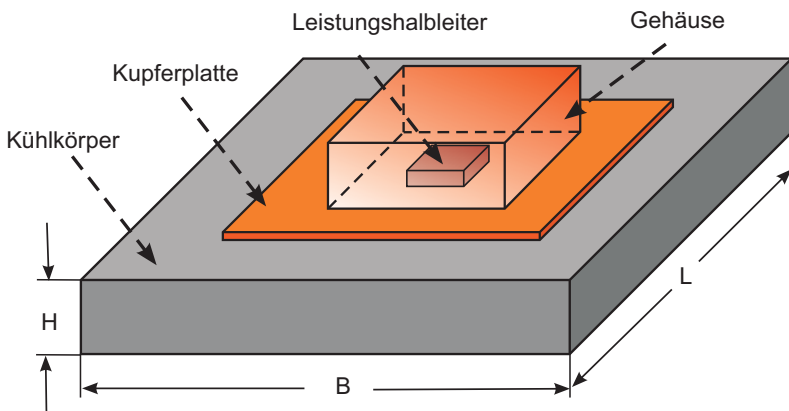


Abbildung 3.3 Grundkonzeption der Wärmeabfuhr von Leistungsmodul

Das Bauelement befindet sich in einem Gehäuse. Im Volumen des Leistungshalbleiters wird die Verlustwärme bei der Temperatur T_j (junction temperature) generiert. Durch das Leistungsbauteil und verschiedene Schichten wird die Wärme dem Gehäuseboden mit der Temperatur T_c zugeleitet. Von dem Gehäusebodenplatte gelangt die Wärme über Kontaktschichten, in der Regel der Wärmeleitermaterial, auf den Kühlkörper mit der Temperatur $T_h < T_c$, von wo aus sie an Umgebung mit der Temperatur T_a abgegeben wird. Es hat dafür folgende Wärmewiderstände zu definieren:

R_{thjc}	Sperrschicht zu Gehäuse
R_{thch}	Gehäuse zu Kühlkörper
R_{thha}	Kühlkörper zu Umgebung
R_{thja}	Sperrschicht zu Umgebung

Wegen der seriellen Anordnung der Wärmewiderstände gilt

$$R_{thja} = R_{thjc} + R_{thch} + R_{thha} \quad (3.16)$$

Im Gehäuse ist der Siliziumchip auf eine Molybdänscheibe oder Kupferschicht aufgelötet. Eine Scheibe aus Isoliermaterial ist entweder aufgelötet oder direkt durch einen Sinterprozess verbunden. Diese „Scheibenstruktur“ ermöglicht einige Vereinfachungen in der Behandlung und wird näher untersucht. Der Wärmewiderstand R_{thjc} besteht daher aus den Wärmewiderständen von mehreren Schichten im Gehäuse. Der Gesamtwert wird in den Datenblättern der Bauelemente meist angegeben. Die Kupferbodenplatte in Abb. 3.3 dient dazu, dass die Wärme sich auf eine größere Fläche gleichmäßig ausbreitet und die Wärmestromdichte runtergesetzt wird, damit sie effizienter in den Kühlkörper geleitet werden kann. Der Wärmewiderstand R_{thch} ist in vielen Fällen der Kontaktübergangswiderstand vom Gehäuse zum Kühlkörper. Wie in Abb.3.4 gezeigt ist, wird zwischen Gehäusebodenplatte und Kühlkörper ein Luftspalt gebildet. Beide Flächen berühren sich nur bei einigen Spitzen der rauhen Oberfläche, ansonsten entstehen Luftspalte.

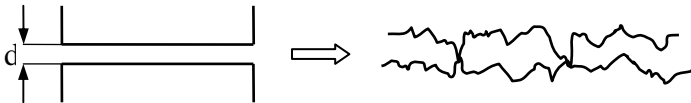


Abbildung 3.4 Mikroskopische Darstellung des Kontaktwärmewiderstands

Dieser Wärmewiderstand besteht aus dem Anteil der Wärmeleitung und dem Anteil der Wärmeübergang in Luft. Man kann einen Kontaktwärmewärmeübergangskoeffizienten h_c definieren:

$$h_c = \frac{\lambda}{d} \quad (3.17)$$

Die Wärmeleitfähigkeit der Luft liegt bei $\lambda = 0,026 \text{ W / mK}$. Der Kontaktübergangswiderstand ist stark von der Oberflächebeschaffenheit und der auf die Kontaktflächen ausgeübten Pressdruck abhängig. Außerdem nimmt der Kontaktwärmewiderstand auch mit zunehmender Temperatur ab, weil bei höherer Temperatur die metallischen Berührungsflächen vergrößert und die Luftspalte verkleinert werden. Die Wärmeleitfähigkeit der Luft nimmt außerdem mit zunehmender Temperatur zu. Die Auswahl eines Kühlkörpers und damit die Festlegung des Wertes R_{thha} richten sich nach der maximal zulässigen Sperrschichttemperatur des Chips, die in der Regel zwischen 125°C und 180°C liegt.

3.3 Berechnung der Chiptemperatur

Für Leistungshalbleiter stellt die Sperrschicht- Temperatur (Junction Temperature, T_j) den kritischsten Faktor dar. Die meisten Ausfälle beruhen darauf, dass T_j überschritten wird. Zur Analyse des Temperaturverhaltens und dem Entwerfen eines geeigneten Kühlsystems muss die Chiptemperatur aus der Verlustleistung bestimmt werden. Beim Einschalten des Bauelements wird die erzeugte Wärme zunächst zur Erwärmung von dem Bauelement, dem Gehäuse und Kühlkörper eingesetzt. Die Chiptemperatur ist somit eine Funktion der Zeit. Dementsprechend Wärmeübertragung wird dieser Zustand nichtstationäres Problem genannt. Zur Berechnung benötigt man transiente Wärmewiderstände Z_{th} , welche sich mit der Zeit ändern.

3.3.1 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung und transienter Wärmewiderstand

Bei nichtstationären Problemen ändert sich die Temperaturverteilung im Festkörper mit der Zeit. Zur Ermittlung des transienten Wärmewiderstands benötigt man die Temperaturerhöhung zwischen Körpertemperatur und Referenztemperatur. Zweckmäßig ist es, die mittlere Temperatur des Körpers zu ermitteln. Ist der innere Wärmewiderstand des Körpers wegen der hohen Leitfähigkeit des Materials im Vergleich mit dem konvektiven Wärmewiderstand an der Körperoberfläche zu vernachlässigen, so kann die Temperaturverteilung im Körper näherungsweise als unabhängig von der Koordinate betrachtet werden, somit die Temperatur eine eindimensionale Funktion der Zeit ist. Dieser Annäherung gilt auch für den Fall, dass die Verlustleistung P_v sich auf der ganzen Oberfläche eines Bauelements mit dünner Schichtdicke und guter Wärmeleitfähigkeit gleichmäßig verteilt. Mit dieser Bedingung lässt sich die Gleichung 3.2 in der Form schreiben:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}_E \quad (3.18)$$

Die pro Masseneinheit zu- oder abgeführte Energie berechnet sich mit:

$$\dot{q}_E = \frac{1}{m} \left[P_v - \frac{1}{R_{th}} \theta \right] \quad (3.19)$$

wobei, R_{th} der thermische Widerstand zwischen Festkörper und Umgebung, $\theta = T - T_a$ die Temperaturerhöhung gegen die Umgebungstemperatur, m die Masse des Festkörpers und T_a die Umgebungstemperatur ist. Setzt Gleichung 3.19 in der Differentialgleichung 3.18 ein, so folgt die Lösung für die Aufheizung zusammen mit den Anfangsbedingungen $\theta = 0$ bei $t = 0$:

$$\theta = P_V R_{th} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_{th} m c_p}\right) \right] \quad (3.20)$$

Mit den Anfangsbedingungen $P_V = 0$ und $\theta = \theta_0$ bei $t = 0$ gilt für die Abkühlung:

$$\theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{R_{th} m c_p}\right) \quad (3.21)$$

Von der Gleichung 3.20 kann der transiente Wärmewiderstand $Z_{th} = \frac{\Delta T}{P_V}$ wie bei stationärer Wärmeleitung definiert werden:

$$Z_{th} = R_{th} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_{th} m c_p}\right) \right] \quad (3.22)$$

wobei $m c_p$ die Wärmekapazität und $R_{th} m c_p$ die Zeitkonstante τ bezeichnet wird. Dem Term $P_V R_{th}$ in der Gleichung 3.20 entspricht die End-Temperaturdifferenz θ_∞ des stationären Zustands. Die Zeitkonstante τ ist ein Maßstab zur Charakterisierung der Wärmeantwort des Systems. Sie ist jene Zeit, innerhalb derer das System beginnend mit der Anfangserwärmung $\Delta\theta = 0$, 63,2% der End-Temperaturdifferenz erreicht. Der transienten Wärmewiderstand ist am Beginn der Leistungszufuhr sehr klein wegen der Wärmeaufnahme im Körper und wächst mehr oder weniger schnell bis zu seinem stationären Wert R_{th} .

3.3.2 Thermische Ersatzschaltung

Mit der Einführung des transienten Wärmewiderstands kann man das thermische Ersatzbild zur Berechnung für ein nichtstationäres Problem erstellen. Das im letzten Abschnitt behandelte Problem ist für eine Einscheibenanordnung. Für das Mehrscheibenproblem der Wärmeabfuhr aus Bauelementen in Abbildung 3.3 kann folgendes thermisches Ersatzbild erstellt werden:

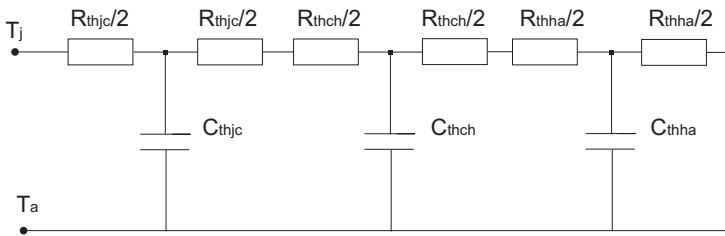


Abbildung 3.5 thermisches Ersatzbild einer Anordnung von Bauelement, Gehäuse und Kühlkörper

Da die Wärmekapazität und Zeitkonstante proportional zur Masse sind, werden die Festkörper mit kleiner Masse schnell erwärmt als die mit höherer Masse. Die Masse von Bauelementen und Gehäuse m_c ist in der Regel klein gegen die Masse des Kühlkörpers m_h . Das bedeutet, dass sich der Kühlkörper in der Regel erst zu erwärmen beginnt wenn die Erwärmung des Gehäuses praktisch abgeschlossen ist. Die Wärmekapazität des Kontaktübergangs C_{thch} ist aufgrund dieser Überlegung zu vernachlässigen. Außerdem ist der Materialwärmewiderstand des Kühlkörpers R_{thh} im Vergleich mit R_{thha} und R_{thch} sehr gering und kann damit in erster Näherung auch vernachlässigt werden. Das thermische Ersatzbild 3.4 kann dann zu Bild 3.5 vereinfacht werden. Das thermische Netzwerk in Abb. 3.5 besteht aus zwei R-C-Gliedern, die sich aufgrund der sich sehr stark voneinander unterscheidenden Zeitkonstanten entkoppelt sind.

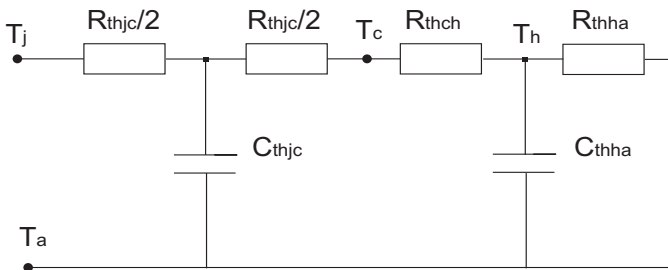


Abbildung 3.6 Vereinfacht thermisches Ersatzbild

Der gesamte transiente Wärmewiderstand Z_{thja} ergibt sich in diesem Fall zu:

$$Z_{thja} = \frac{1}{2} R_{thjc} + \frac{1}{2} (R_{thjc} + R_{thch}) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{jc}}\right) \right] + R_{thha} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_h}\right) \right] \quad (3.23)$$

wobei $\tau_{jc} = \left(\frac{1}{2} R_{thjc} + R_{thch}\right) m_{jc} c_{p-jc}$ und $\tau_h = R_{thh} m_h c_{p-h}$ jeweils die Zeitkonstanten von Leistungsmodul mit Gehäuse und vom Kühlkörper sind. Die Sperrschicht-Temperatur lässt sich dann berechnen mit:

$$T_j = P_V \cdot Z_{thja} + T_a \quad (3.24)$$

3.3.3 Transienter Wärmewiderstand bei Aussetzbetrieb

Die bisherigen Beobachtungen beziehen sich auf einen konstanten Leistungsfluss. Bei der Anwendung von Leistungshalbleitern werden die Bauelemente oft mit pulsierenden Strömen periodisch getrieben. Jede Periode von der Dauer t_p setzt aus einer Einschaltzeit t_e und einer stromlosen Pause t_a zusammen. Die Bauelemente werden in der Zeit t_e erwärmt und während der Zeit t_a abgekühlt. In Abb. 3.6 sind die periodische Leistung und der zeitliche Verlauf der Temperatur dargestellt. Zu Beginn der ersten Periode steigt die Temperatur von der Erwärmung Null proportional zu $1 - \exp(-t/\tau)$ an und fällt ab dem Zeitpunkt t_e wieder proportional zu $\exp(-t/\tau)$ ab. Nach entsprechend langer Zeit wird ein periodischer stationärer Zustand eingestellt, wobei die Temperatur zwischen einem bestimmten Maximalwert T_o und einem Minimalwert T_u schwankt.

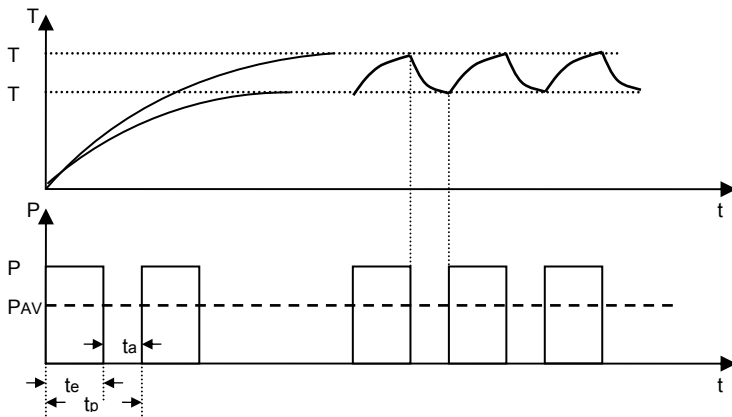


Abbildung 3.7 Verlustleistung- Zeit Diagramm und zugehöriger Temperaturverlauf

Der zeitliche Verlauf der Erwärmung ist mittels der Gleichung 3.20 und 3.21 zu ermitteln. Die volle quantitative Darstellung der Maximal- und Minimalwerte der Temperatur ergeben sich zu:[7]

$$T_o = P_{AV} R_{th} (1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}}) \cdot \frac{1}{\frac{t_e}{t_p}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_p}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t_e + t_p}{\tau}}} = P_{AV} R_{th} (1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}}) \frac{1}{D} \cdot \frac{1 - e^{-D \cdot K}}{1 - e^{-K}} = P_{AV} Z_{th} f(K, D) \quad (3.25)$$

$$T_u = P_{AV} R_{th} (1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}}) \cdot \frac{1}{\frac{t_e}{t_p}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t_p}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t_e + t_p}{\tau}}} \cdot e^{-\frac{t_p - t_e}{\tau}} = P_{AV} R_{th} (1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}}) \frac{1}{D} \cdot \frac{1 - e^{-D \cdot K}}{1 - e^{-K}} \cdot e^{-(K-D)} \quad (3.26)$$

$$D = \frac{t_e}{t_p} : \quad \text{Tastverhältnis}$$

$$K = \frac{t_p}{\tau} : \quad \text{Das Verhältnis von Periodedauer und Zeitkonstante}$$

$$P_{AV} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} P dt = \frac{t_e}{t_p} P_M \quad \text{mittlere Verlustleistung}$$

Berücksichtigt man den Grenzwert $\lim_{K \rightarrow 0} f(K, D) = 1$, kann folgende Konsequenz gezogen werden: Es gibt keinen Einfluss zur Scheibentemperatur durch das impulsförmige Auftreten der Leistung P, wenn der Periodedauer t_p im Vergleich mit der Zeitkonstante sehr klein ist. Die Scheibentemperatur ist unabhängig von der Einschaltdauer t_e und ändert sich während einer Periode kaum. Das heißt, die Leistungsimpulse werden von der großen Masse der Scheibe absorbiert. Ähnlich wie bei Dauerbetrieb kann der transiente Wärmewiderstand Z_{zhp} auch für Aussetzbetrieb definiert werden:

$$Z_{zhp} = R_{th} (1 - e^{-\frac{t_e}{\tau}}) \cdot \frac{1}{D} \frac{1 - e^{-D \cdot K}}{1 - e^{-K}} = Z_{th} + Z_{thZ} = Z_{th} f(K, D) \quad (3.27)$$

Der Zusatzwärmewiderstand bei Impulsbelastung

$$Z_{zHZ} = Z_{th} (f(K, D) - 1) \quad (3.28)$$

ist dann erst zu betrachten, wenn der Periodedauer der Zeitkonstante vergleichbar ist. In diesem Fall ist der transiente Wärmewiderstand auch die Funktion von Tastverhältnis. Die Sperrschichttemperatur wird dann mit der Amplitude der Verlustleistung P_M berechnet.

Kapitel 4

Statisches Temperaturfeld mit generalisierten Randbedingungen in Elektronik- Systemen

4.1 Statisches Wärmeübertragungsproblem in Elektronik- Systemen

Die Wärme, die bei der Verlustleistung der Schaltelemente in Leistungsmodulen umgewandelt wird, muss letztlich an die Umgebung abgeführt werden, so dass sich die Wärme nicht innerhalb des Moduls versammelt und die Temperatur unter einer Grenze gehalten wird. Kühlkörper mit Rippen werden häufig verwendet. Diese Rippen erleichtern die Wärmeabfuhr durch verbesserte Konvektion und vergrößerte Wärmeübergangsfläche. Bild 4.1 zeigt die Grundkonzeption der Wärmeabfuhr aus Leistungsbauerelementen durch einen Kühlkörper.

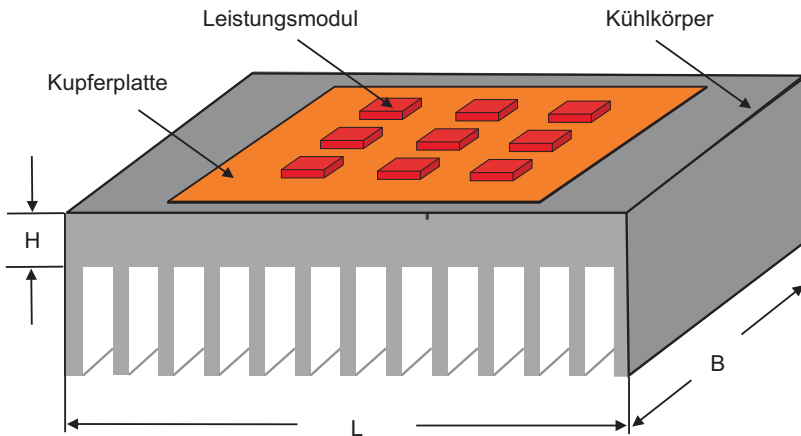


Abb. 4.1 Grundkonzeption der Entwärmung mit verteilten Wärmequellen

Die Leistungshalbleiter-Chips werden in einem Gehäuse angeordnet. Die isolierenden Keramikträger der Chips werden auf eine Kupferbodenplatte, die zur Wärmeausbreitung dient, aufgelötet. Diese Kupferplatte wird dann auf dem Kühlkörper montiert. Zwischen Kupferplatte und Kühlkörper wird Wärmeleitpaste aufgetragen um den Kontaktwärmewiderstand zu minimieren. Die erzeugte

Wärme wird durch Wärmeleitung zuerst in die Kupferplatte eingeleitet, wo die Wärme wegen höherer Wärmeleitfähigkeit des Kupfers möglichst gleichmäßig in der Bodenplatte verteilt wird. Diese Wärme wird wieder durch Wärmeleitung und so genannte Wärmespreizung in den Kühlkörper übertragen und sich dort ausbreiten. Mit diesen Vorgängen wird die hohe Verlustleistungsdichte vom Modul durch die gekoppelte größere Fläche des Kühlkörpers reduziert. Schließlich wird die Leistung durch Konvektion und Wärmestrahlung an die Umgebung abgeführt. Die thermischen Anforderungen an den Kühlkörper liegen in diesem Fall nicht nur an den thermischen Eigenschaften des Kühlkörpers sondern auch an den darauf platzierten Modulen, und deren Montagestelle und Leistungsdichte. Die Montagestelle des Moduls hat einen recht großen Einfluss auf den Wärmefluss und das Temperaturfeld. In diesem Kapitel werden die unterschiedlichen analytischen Verfahren zur Analysis des thermischen Modells jeweils mit bezüglich des Kühlkörpers zentrierter und nicht zentrierter Wärmequelle vorgestellt. Insbesondere für das Modell mit zentral gelegter Wärmequelle wird das Problem durch einige technisch zugelassene Annahmen vereinfacht, so dass die analytische Lösung der Temperaturverteilung mit einer geschlossenen Formel angegeben werden kann. Für das Model mit beliebig platzierter Wärmequelle wird das Temperaturfeld mit Hilfe der Greenschen Funktion ermittelt und schließlich wird diese Lösung auf das Modell mit mehreren Quelle erweitert.

4.2 Thermische Modellierung mit zentraler Wärmequelle

4.2.1 Modellierung des Kühlungssystems

Im Fall, dass die Basisfläche des Moduls kleiner als das kontaktierte Substrat des Kühlkörpers ist, muss zusätzlich der Wärmewiderstand der Wärmespreizung betrachtet werden. Dieser zusätzliche Spreizungswärmewiderstand wird dann entstehen, wenn die Wärme von einem Gebiet in ein anderes Gebiet mit jeweils unterschiedlicher Kontaktfläche übertragen wird. Die Ignorierung dieses Widerstandes kann zur Überhitzung einiger Punkte des Moduls führen. Yovanovich and Burde [28], [29] hatten im Jahr 1977 gezeigt, dass für das thermische Modell mit zentral montierter, quadratischer Quelle der Spreizungswärmewiderstand fast unabhängig von der Gestaltung der kontaktierten Fläche ist.

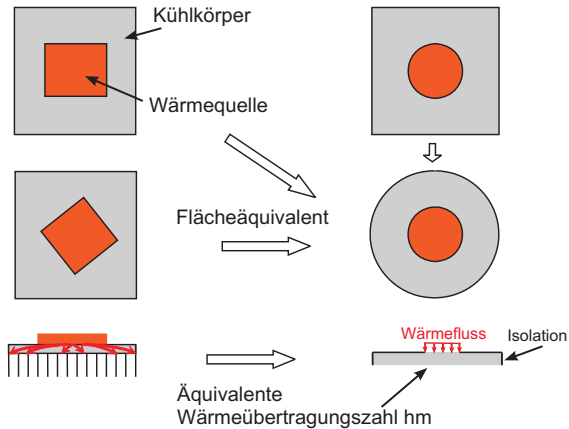


Abb. 4.2 Umformung der geometrischen Anordnung des Kühlers

Das bedeutet, die häufig in der Leistungselektronik verwendete rechteckige Geometrie kann kreisförmig umgewandelt werden, sodass ein achsensymmetrisches Problem vorhanden ist. In Bild 4.2 wird die Konvertierung der Kühlkörpergeometrie dargestellt. Zur exakten Bestimmung des Spreizungswärme-widerstands ist entweder die Lösung der dreidimensionalen Differenzialgleichung der Wärmeübertragung oder ein numerisches Verfahren erforderlich. Die analytische Lösung des thermischen Widerstands der Wärmespreizung wurde von Seri Lee [30] im Jahr 1995 entwickelt. Es wurde eine zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung im Zylinderkoordinatensystem mit der konventionellen und adiabatischen Randbedingung gelöst. Die Temperaturverteilung wurde in Form einer unendlichen Reihe angegeben.

In dieser Arbeit wird ein vereinfachtes Modell vorgestellt, in dem zwei separierten 2D thermischen Modelle entwickelt und dadurch die geschlossene Formel für den Spreizungswiderstand hergeleitet wird. Zur Bestimmung des Spreizungswiderstands wird das Kühlsystem in Bild 4.1 durch die Wärmeübertragung einer Kühlplatte modelliert, wobei sich einer ebenfalls kreisförmigen zweidimensionalen Wärmequelle mit konstanter Flussdichte auf dem Zentral der Plattoberfläche liegt. Das kreisförmig umgeformte Kühlsystem wird in zwei getrennten Bereichen betrachtet. Bild 4.3 zeigt das thermische Modell für eine kreisförmige Kühlplatte und den Mechanismus der Wärmeübertragung.

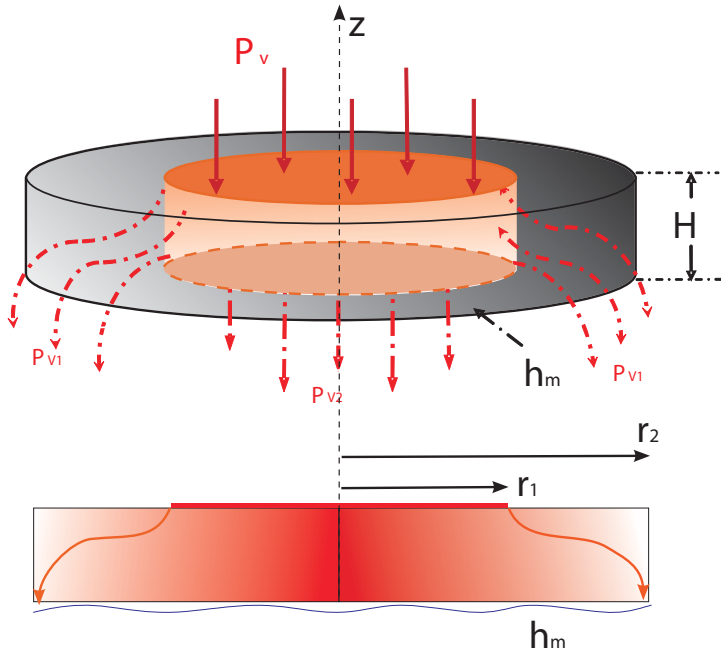


Abb. 4.3 Thermisches Modell des Kühlsystems mit Spreizungswärmefluss

Da diese Arbeit sich auf die Untersuchung der thermischen Eigenschaften des Kühlkörpers fokussiert, werden die Leistungsbauteile und andere zusätzliche Schichten als eine zweidimensionale kreisförmige Wärmequelle betrachtet, welche zentral auf der Plattenoberfläche montiert ist. Die Wärme aus der Quelle mit dem Radius r_1 wird durch Wärmeleitung in die Kühlplatte eingeleitet. Diese Wärme breitet sich in der Platte zum Plattenrand aus und wird schließlich durch Konvektion an den Plattenboden mit Radius r_2 an die Umgebung abgeführt. Da die Verlustwärme hauptsächlich in die Kühlplatte geleitet und dann durch Konvektion am Plattenboden an die Umgebung abgeführt wird, sind die Wärmeverluste von den restlichen Flächen der Kühlplatte nicht mehr zu berücksichtigen. Die restlichen Flächen der Platte können als wärmeisoliert betrachtet werden. h_m in Bild 4.3 ist die Wärmeübertragungszahl des plattenförmigen thermischen Modells. Für das in Bild 4.3 dargestellte thermische Modell kann eine wichtige Annahme anhand der Material- und geometrischen Eigenschaften getroffen werden:

Die Ignorierung des Materialwärmewiderstands von der Platte in Querrichtung aufgrund der hohen Wärmeleitfähigkeit des Kühlkörpermaterials und der Dünnheit der Platte. Da der Kühlkörper normalerweise aus Materialien mit hoher Wärmeleitfähigkeit, wie z.B. Aluminium angefertigt wird und das Verhältnis zwischen der Dicke und dem Radius der Platte sehr klein ist, kann die Temperaturverteilung in der Platte nahezu unabhängig von der Plattendicke H angesehen werden. In diesen Fall verschwindet der Temperaturgradient in der z -Richtung in der Kühlplatte. Die Temperaturverteilung im Festkörper ist dann nur eine Funktion des Abstands zum Festkörpermittelpunkt. Damit ist ein achsensymmetrisches 2D- Wärmeübertragungs-problem vorhanden.

4.2.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Da mit der Annahme im letzten Abschnitt, das thermische Modell achsensymmetrisch ist, ist eine Separation des Modells zum Erstellen der Wärmeübertragungsgleichung möglich.

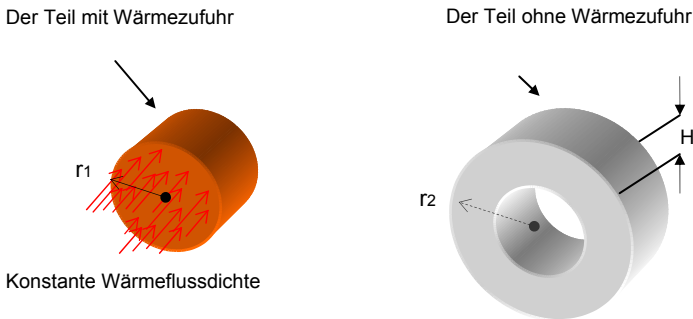


Abbildung 4.4 Separation des thermischen Modells

Das Modell in Abb.4.3 wird in zwei Teile separiert, und zwar jeweils mit und ohne Wärmequelle wie in Abb.4.4 dargestellt wird. Es wird für jeden Bereich die Wärmeleitungsgleichung separat erstellt, so dass zwei zweidimensionale Wärme-gleichungen entstehen. Koppelt man sie mit Berücksichtigung gleicher physikalischer Bedingungen an der Koppelungsschicht wieder zusammen, können dann die Temperaturverteilungen in beiden Bereichen ermittelt werden. Der Radius r_1 und r_2 in Abbildung 4.4 sind jeweils definiert für äquivalente Fläche der kreisförmigen Wärmequelle und der Flächen des kreisförmigen Kühlplattensubstrats:

$$r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{A_2}{\pi}}$$

wobei A_1 and A_2 jeweils die Fläche der Wärmequelle und die Fläche der Kühlplatte sind. Nun kann die Wärmeleitungsgleichung mittels des Prinzips von Energiekonservierung und des Fourier- Gesetzes der Wärmeleitung erstellt werden. In Abbildung 4.5 ist das mathematische Modell der Wärmeübertragung gezeigt.

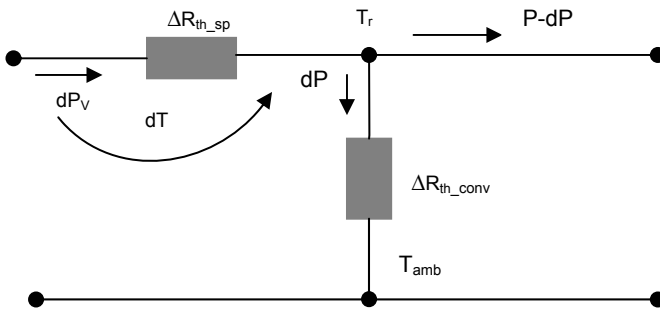


Abb.4.5 Ersatzschaltbild der Wärmeübertragung zur Erstellung der Wärmeleitungsgleichungen

ΔR_{th_sp} stellt das interne Wärmewiderstandselement des Materials dar, welcher von dem sich ausbreitenden Wärmefluss überwunden werden muss. ΔR_{th_conv} repräsentiert das Wärmewiderstandselement der Konvektion zwischen Bodenoberfläche und Umgebung. Aufgrund der symmetrischen Geometrie breitet sich die Verlustwärme symmetrisch zu dem Modellrand aus. Das Leistungselement P_v an der Stelle r setzt sich aus dem durch das Flächenelement $2\pi r dr$ nach Außen abgeführten Anteil dP und dem verbleibenden Anteil $P_v - dP$ zusammen.

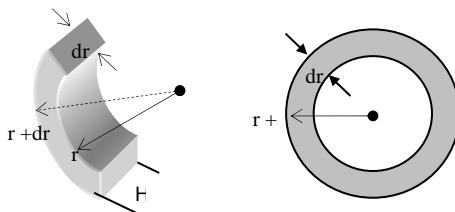


Abb. 4.6 Zur Berechnung der Wärmewiderstandselemente ΔR_{th_sp} und ΔR_{th_conv}

Nach Abbildung 4.6 können die beiden Widerstandelemente wie folgt dargestellt werden:

$$dR_{th_sp} = \frac{dr}{2\pi \cdot H \cdot \lambda} \quad (4.1)$$

$$dR_{th_conv} = 2\pi h_m \cdot dr \quad (4.2)$$

Wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Kühlkörpermaterials, h_m der Konvektionskoeffizient und H die Dicke der Kühlplatte ist. Die Temperatur- und Leistungselemente für den Teil ohne Wärmezufuhr in Abbildung 4.4 lassen sich dann mit Hilfe des Ersatzschaltbildes in Abb. 4.5 berechnen:

$$dT = -P(r) \cdot dR_{th_sp} = -P(r) \cdot \frac{dr}{2\pi H \lambda} \quad (4.3)$$

$$dP = \Delta T \cdot dR_{th_konv} = -(T(r) - T_{amb}) \cdot 2\pi h_m \cdot dr \quad (4.4)$$

Für den Modellanteil mit Wärmequelle ist die zusätzliche Wärmestromzufuhr, die die auf der Oberfläche homogen verteilte Verlustleistung des Leistungsmoduls darstellt, zu berücksichtigen. Dementsprechender Anteil ist bei der Darstellung des Leistungselements dazu zu zuaddieren:

$$dP = \frac{P_V \cdot 2 \cdot r dr}{r_1} - (T(r) - T_{amb}) \cdot 2\pi h_m \cdot dr \quad (4.5)$$

Stellt man die Gleichungen 4.3 nach dT/dr um und dann setzt sie in die Gl.4.4 ein, so bekommt man eine DGL zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dr^2} &= -\frac{1}{2\pi H \lambda} \left(P'(r) \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} P(r) \right) \\ &= (T(r) - T_{amb}) \cdot \frac{h_m}{H \lambda} - \frac{1}{r} \cdot T'(r) \\ \Rightarrow \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{h_m}{H \lambda} (T(r) - T_{amb}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Gleichung 4.6 stellt eine Besselsche DGL dar. Um die Lösung direkt mit den Besselschen Funktionen darzustellen, werden die Größen in Gleichung 4.6 zuerst wie folgt normiert:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{r_1}{r_2}, \quad \tau = \frac{H}{r_2}, \quad \xi = \frac{r}{r_2}, \quad r = r_2 \xi, \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{r_2} \frac{d}{d\xi}, \\ \theta &= T - T_{amb}, \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{d(T - T_{amb})}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \end{aligned}$$

Wobei γ und τ als dimensionslose Kontaktfläche und dimensionslose Dicke bezeichnet werden. Mit diesen Normierungen kann die DGL 4.6 in folgende Form umgewandelt werden:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{h_m \cdot r_2^2}{H\lambda} \theta(\xi) = 0 \quad (4.7)$$

Mit den Einführungen

$$X = \sqrt{\frac{h_m \cdot H}{H^2 \cdot \lambda}} \cdot \xi = m\xi, \quad \frac{d}{d\xi} = \frac{dX}{d\xi} \frac{d}{dX} = m \frac{d}{dX}$$

lässt sich die Gleichung 4.7 darstellen

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\theta}{dX} - \theta = 0 \quad (4.8)$$

Aus den Gleichungen 4.3 und 4.5 ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung für den Modellanteil mit Wärmequelle

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{h_m}{H \cdot \lambda} (T(r) - T_{amb}) = - \frac{P_V}{\pi H \lambda \cdot r_1^2} \quad (4.9)$$

Durch das Normierungsverfahren lässt sich Gleichung 4.9 darstellen:

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\theta}{dX} - \theta = - \frac{P_V}{\pi h_m \cdot r_1^2} \quad (4.10)$$

Gleichung 4.8 ist die typisch modifizierte Besselsche DGL, während Gleichung 4.10 die gleiche Besselsche DGL inhomogener Art ist. Die Lösung der Gl.4.8 ist die lineare Kombination der modifizierten Besselschen Funktionen erster Art und zweiter Art:

$$\theta(\xi) = C_1 I_0(X) + C_2 K_0(X) = C_1 I_0(m\xi) + C_2 K_0(m\xi) \quad (4.11)$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind, deren Werte über Randbedingungen bestimmt werden. Die Lösung von Gleichung 4.10 ist die Zusammensetzung von der generellen Lösung der Gleichung 4.8 und einer spezifischen Lösung der inhomogenen DGL 4.10:

$$\theta(X) = C_3 I_0(m\xi) + C_4 K_0(m\xi) + \theta^* \quad (4.12)$$

wobei C_3 und C_4 Konstanten und θ^* die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Durch die so genannte „constant variation method“ kann die spezielle Lösung θ^* sowie die Temperaturverteilung in Gleichung 4.10 wie folgt dargestellt werden [34]:

$$\theta(\xi) = C_3 I_0(m\xi) + C_4 K_0(m\xi) - \underbrace{I_0(m\xi) \int \frac{K_0(m\xi) \cdot f(\xi)}{W} d\xi + K_0(m\xi) \int \frac{I_0(m\xi) \cdot f(\xi)}{W} d\xi}_{\theta^*} \quad (4.13)$$

wobei $f(\xi) = -\frac{P_V}{\pi H \lambda \cdot r_1^2}$, $W = \begin{vmatrix} I_0(m\xi) & K_0(m\xi) \\ I_0'(m\xi) & K_0'(m\xi) \end{vmatrix} = I_0(m\xi)K_0'(m\xi) - I_0'(m\xi)K_0(m\xi)$.

Benutzt man die Ableitung der Besselschen Funktion $I_0'(x) = I_1(x)$, $K_0'(x) = -K_1(x)$

sowie $I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x}$,¹ kann die Determinante W berechnet werden:

$$W = \begin{vmatrix} I_0(m\xi) & K_0(m\xi) \\ I_0'(m\xi) & K_0'(m\xi) \end{vmatrix} = I_0(m\xi)K_0'(m\xi) - I_0'(m\xi)K_0(m\xi) = \frac{1}{\xi} \quad (4.14)$$

Setzt man Gleichung 4.13 und 4.14 in Gleichung 4.12 ein, so ergibt sich:

$$\theta(\xi) = C_3 I_0(m\xi) + C_4 K_0(m\xi) - \underbrace{I_0(m\xi) \int \xi \cdot K_0(m\xi) \cdot f(\xi) d\xi + K_0(m\xi) \int \xi \cdot I_0(m\xi) f(\xi) d\xi}_{\theta^*} \quad (4.15)$$

Da der Term $f(\xi)$ Konstante ist, kann er vor das Integral herausgezogen werden. Mit den weiteren Eigenschaften der modifizierten Besselschen Funktion

$$\int r \cdot K_0(r) dr = rK_1(r) + C \quad \text{und} \quad \int r \cdot I_0(r) dr = -rI_1(r) + C$$

lässt sich Gleichung 4.15 darstellen:

$$\theta(\xi) = C_3 I_0(m\xi) + C_4 K_0(m\xi) + \underbrace{\frac{P_V}{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}}_{\theta^*} \quad (4.16)$$

¹ $\frac{d}{dz}(z^{-\nu} I_\nu) = z^{-\nu} I_{\nu+1}$; $\frac{d}{dz}(z^{-\nu} K_\nu) = -z^{-\nu} K_{\nu+1}$

4.2.3 Die analytische Lösung der DGL- System

Die zu lösenden DGL sind die homogene Besselsche DGL 4.8 und die inhomogene Besselsche DGL 4.10:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta_A}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\theta_A}{dX} - \theta_A = 0 \\ \frac{d^2 \theta_I}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\theta_I}{dX} - \theta_I = -\frac{P_V}{\pi H \lambda \cdot r_1^2} \end{cases} \quad \text{mit } X = \sqrt{\frac{Bi}{\tau^2}} \cdot \xi = m\xi$$

θ_I Temperaturverteilung des Modellanteils mit Wärmequelle
 θ_A Temperaturverteilung des Modellanteils ohne Wärmequelle

$Bi = \frac{h_m \cdot H}{\lambda}$ Biot- Zahl

Die allgemeine Lösung beider Gleichungen lautet:

$$\theta(\xi)_A = C_1 I_0(m\xi) + C_2 K_0(m\xi) \tag{4.17}$$

$$\theta(\xi)_I = C_3 I_0(m\xi) + C_4 K_0(m\xi) + \underbrace{\frac{P_V}{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}}_{\Theta^*} \tag{4.18}$$

Betrachten wir das physikalische Modell sowie die modifizierte Besselsche Funktion erster Art $I_\nu(z)$ und zweiter Art $K_\nu(z)$, wird klar, dass wegen der Divergenz der zweiten Besselschen Funktion $K_\nu(z)$ an der Stelle Null ($\lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) = \infty$) und des im physikalischen Modell definierten Ursprungs die modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art $K_0(m\xi)$ in der Gleichung 4.18 nicht enthalten ist. Dadurch kann Gleichung 4.18 zu Gleichung 4.19 vereinfacht werden:

$$\theta(\xi)_I = C_3 I_0(m\xi) + \underbrace{\frac{P_V}{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}}_{\Theta^*} \tag{4.19}$$

In Gleichung 4.17 muss der Term $K_0(m\xi)$ aber weiterhin bleiben, weil Gleichung 4.17 die Temperaturverteilung in dem Zylindermantel beschreibt, in dem der Ursprung nicht eingeschlossen wird, sodass $K_0(m\xi)$ den Bestandteil der Lösung der zugehörigen DGL ist.

Zur Lösung beider Gleichungen stehen zwei Randbedingungen und eine Kopplungsbedingung zur Verfügung:

1. $\frac{d\theta_A}{d\xi} = 0$ bei $\xi = 1$
2. $\frac{d\theta_I}{d\xi} = 0$ bei $\xi = 0$
3. Beide thermischen Modelle sind an der Kopplungsgrenze $\xi = \gamma$ mit identischen physikalischen Bedingungen gekoppelt. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(r)_A \Big|_{r=r_1} &= \Theta(r)_I \Big|_{r=r_1} \\ d\Theta_A \Big|_{r=r_1} &= d\Theta_I \Big|_{r=r_1} \end{aligned} \right\} \text{ bei } \xi = \gamma$$

Die ersten und zweiten Bedingungen entsprechen einem adiabatischen Zustand und werden auch homogene NEUMANN- Randbedingung genannt. Sie besagt, dass an den Grenzflächen und dem Mittelpunkt des Kühlkörpers kein Wärmetausch stattfindet. Durch Kopplungsbedingung werden beide Gleichungen mit identischen Temperatur und Wärmestrom an der Kopplungsschicht gekoppelt. Das heißt, die Lösung der inhomogenen Gleichung kann durch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung sowie einer speziellen Lösung gewonnen werden. Setzt man die zweite Randbedingung in Gleichung 4.19 ein, wird man keinen eindeutigen Wert von der Konstante C_3 bekommen, da

$$\frac{d\theta_I}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = C_3 m I_1(0) \equiv 0 \text{ ist.}$$

Als Kopplungsbedingung gilt

$$\begin{aligned} \theta(r)_A \Big|_{\xi=\gamma} &= \theta(r)_I \Big|_{\xi=\gamma} \\ \Rightarrow C_1 I_0(m\gamma) + C_2 K_0(m\gamma) - C_3 I_0(m\gamma) &= \frac{P_V}{\underbrace{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}_{\Theta}} \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} d\theta_A \Big|_{r=r_1} &= d\theta_I \Big|_{r=r_1} \\ \Rightarrow C_1 I_1(m\gamma) - C_2 K_1(m\gamma) - C_3 I_1(m\gamma) &= 0 \end{aligned} \tag{b}$$

Als homogene NEUMANN- Randbedingung gilt

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=r_2} = C_1 m I_1(m) - C_2 m K_1(m) = 0 \tag{c}$$

Die Konstanten C_1 , C_2 , und C_3 sind dann mit dem linearen Gleichungssystem (a), (b), und (c) zu bestimmen. Die Matrixschreibweise ist:

$$\begin{bmatrix} I_0(m\gamma) & K_0(m\gamma) & -I_0(m\gamma) \\ I_1(m\gamma) & -K_1(m\gamma) & -I_1(m\gamma) \\ I_1(m) & -K_1(m) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_V}{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit lässt sich die analytische Lösung der Temperaturverteilung für den Bereich mit Wärmequelle ausdrücken:

$$\theta(\xi)_I = C_3 I_0(m\xi) + \frac{P_V}{\underbrace{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}_{\phi^*}} \tag{4.20}$$

$$\theta(\xi)_I = \left(\frac{I_1(m\gamma)K_1(m) - I_1(m)K_1(m\gamma)}{\underbrace{I_1(m\gamma)I_1(m)K_0(m\gamma) + I_0(m\gamma)I_1(m)K_1(m\gamma)}_{C_3}} \cdot I_0(m\xi) + 1 \right) \cdot \frac{P_V}{h_m \cdot \pi \cdot r_1^2}$$

4.2.4 Bestimmung des Widerstandes der Wärmespreizung

Im letzten Abschnitt wird die Temperaturverteilung der Kühlplatte mit Wärmespreizung als geschlossener Formel hergeleitet. Das Ziel ist die Bestimmung des Spreizungswärme­widerstands.

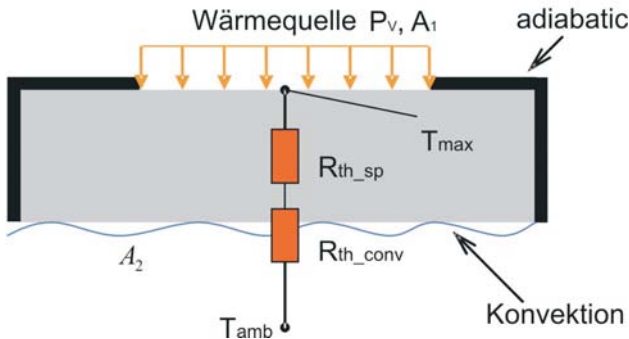


Abbildung 4.7 Thermische Netzwerk der Kühlplatte

Wie in letztem Abschnitt schon diskutiert wurde, kann das gesamte thermische System aufgrund der Wärmeisolierung der Randoberflächen von der Kühlplatte durch die Reihenschaltung der thermischen Widerstände dargestellt werden. In Abb.4.7 besteht der maximale Wärmewiderstand R_{thk_max} aus zwei Teilen: dem Anteil des Wärmeübergangs R_{th_conv} und dem Anteil der Wärmespreizung R_{th_sp} innerhalb der Kühlplatte. Es gilt dann:

$$R_{thk_max} = R_{th_conv} + R_{th_sp} \tag{4.21}$$

Der resultierende maximale Wärmewiderstand des Kühlers kann auch durch die Temperaturdifferenz zwischen der Umgebung und dem heißesten Punkt ermittelt werden, welcher schon im letzten Abschnitt in geschlossener Form hergeleitet wurde:

$$R_{thk_max} = \frac{T_{max} - T_{amb}}{P_V} \tag{4.22}$$

Der Wärmeübergangswiderstand R_{th_conv} ist von der Oberfläche der Kühlplatte und der Konvektionsbedingung abhängig. Er wird definiert mit:

$$R_{th_conv} = \frac{1}{h_m \cdot A_2} \tag{4.23}$$

Die maximale Temperatur der Kühlplatte liegt im geometrischen Mittelpunkt. Sie kann mit Gleichung 4.20 durch den Einsatz von $\xi = 0$ berechnet werden:

$$\theta_{max} = \left[\frac{I_1\left(\frac{\sqrt{Bi} \cdot \gamma}{\tau}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right) - I_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{Bi} \cdot \gamma}{\tau}\right)}{I_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right)} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{Bi} \gamma} + 1 \right] \cdot \frac{P_V}{h_m \cdot A_1} \tag{4.24}$$

Mit den Gleichungen 4.21, 4.22, 4.23 und der Maximaltemperatur aus Gl. 4.24 kann der maximale dimensionslose Spreizungswärmewiderstand bestimmt werden:

$$\Psi_{sp_z} = \frac{1}{R_{th_M}} \cdot R_{th_sp} = \left[\frac{I_1\left(\frac{\sqrt{Bi} \cdot \gamma}{\tau}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right) - I_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{Bi} \cdot \gamma}{\tau}\right)}{I_1\left(\frac{\sqrt{Bi}}{\tau}\right)} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{Bi} \gamma} + 1 - \gamma \right] \cdot \frac{1}{Bi \cdot \gamma} \tag{4.25}$$

Dieses ist eine Funktion von drei dimensionslosen Parametern: der dimensionslosen Dicke τ , der dimensionslosen Kontaktfläche γ und der Biot-Zahl Bi . Die erste und zweite Parameter repräsentiert die geometrischen Informationen des Systems und der letzte beschreibt die thermischen Bedingungen des Kühlungs-systems. Als Normierungsgröße wird der Wärmewiderstand des Materials R_{th_M} gewählt. Er ist definiert durch

$$R_{th_M} = \frac{H}{\lambda \cdot A_2} \quad (4.26)$$

wobei t und A_2 jeweils die Dicke und Fläche der Kühlplatte sind. Der Vorteil der Wahl von Gl.4.26 als Normierungsgröße liegt darin, dass für einen bestimmten Kühlkörper die Fläche und Dicke des Substrats die festen Größen sind und deren Werte sich nicht mit der Änderung der Konvektionsbedingungen sowie der Abmessung der Wärmequelle ändern. Ähnlich ist der durchschnittliche Wärmewiderstand bei erzwungener Konvektion mit der Gleichung 4.2 zu definieren:

$$R_{th_avg} = \frac{T_{avg} - T_{amb}}{P_V} \quad (4.27)$$

T_{avg} ist die mittlere Temperatur der Kühlplattefläche, die direkt unter der Wärmequelle liegt:

$$T_{avg} = \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} T(r) dr \quad (4.28)$$

Der mittlere Spreizungswärmewiderstand R_{sp_avg} bezogen auf dem mittleren Wärmewiderstand R_{th_avg} ist dann auch zu ermitteln.

4.3 Numerische Lösung der Differentialgleichung

Zur Prüfung der analytischen Lösung der vorgestellten Wärmeleitungsgleichung werden die Daten von dem katalogisierten Kühlsystem QLS200.18 von AUSTERLITZ genommen. Das Kühlsystem besteht aus einem ebenso katalogisierten Kühlkörper KS200.18 und einem Querstromlüfter. In der nebenstehenden Grafik in der Abbildung 4.8 werden die Verläufe der Temperaturerhöhung und die Verlustleistung bei unterschiedlichen Breiten des Kühlkörpers, bei forcierter Kühlung, dargestellt.

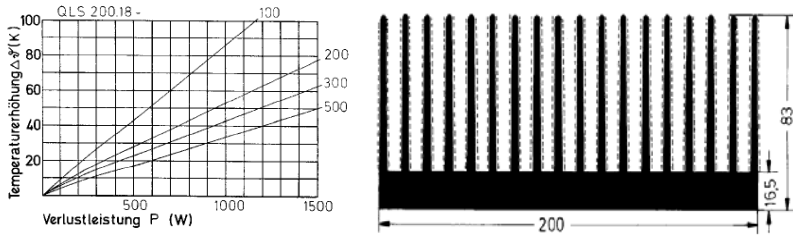


Abb. 4.8 Abmessungen und technische Daten des zu simulierenden Kühlkörpers²

Diese Grafik basiert auf einer gleichmäßig auf der Kühlkörperoberfläche verteilten Wärmequelle und einer konstanten Umgebungstemperatur. Die Temperaturerhöhung ist definiert als die Differenz zwischen dem heißesten Punkt des Kühlkörpers und der Umgebungstemperatur. An dieser Grafik ist zu erkennen, dass die Verläufe ab einer Verlustleistung von 200W einer geraden Linie anzunähern sind. Mit dieser Annahme kann der Durchgangswärmewiderstand des Kühlkörpers KS200.18 ab einer Verlustleistung von 200W als konstant betrachtet werden. Zur Ermittlung der Temperaturverteilung (Lösung der Wärmeleitungsgleichung 4.6 und 4.9) benötigt man die Dicke und die Fläche der Kühlerbasis, die Fläche der Wärmequelle, die Wärmeleitfähigkeit des Kühlers und die Wärmeübergangszahl. Die ersten drei Parameter können durch Abmessung des Kühlers sehr leicht bestimmt werden. Die Wärmeleitfähigkeit des Kühlkörpers ist von dem verwendeten Kühlkörpermaterial abhängig. Die Schwierigkeit ist hier die Ermittlung der Wärmeübergangszahl. Insbesondere ist wichtig, dass die Wärmeübergangszahl, die auf einem Kühlkörper basiert, nicht direkt in das plattenförmige Modell übernommen werden kann, da an der Konvektion beteiligte Fläche des Kühlkörpers normalerweise viel größer als die der Kühlplatte ist.

4.3.1 Thermischer Widerstand der Konvektion der Kühlplatte und des Kühlkörpers

Die bisherige Analyse und Berechnung der Wärmespreizung basiert auf einem plattenförmigen thermischen Modell, was den Kühlkörper mit der gleichen Basisfläche- und Dicke modelliert. Durch die Betrachtung der Gleichung 4.25 ist festzustellen, dass die meisten physikalischen Größen, die zur Ermittlung des

² Hauptkatalog 10; AUSTERLITZ ELEKTRONIC GmbH;

dimensionslosen Spreizungswärmeleitwiderstandes notwendig sind, allein von den geometrischen und thermischen Eigenschaften der Platte nämlich des Kühlkörpersubstrats abhängig sind. Das bedeutet, die meisten Daten der Kühlplatte können zur thermischen Berechnung des Kühlkörpers direkt übernommen werden, wie z.B. die dimensionslose Kontaktfläche γ , die dimensionslose Dicke τ und die Materialwärmeleitfähigkeit λ . Die Ausnahme ist die Wärmeübergangszahl h_m . Im plattenförmigen Modell ist h_m definiert für den Wärmeübergangswiderstand mit einer konstanten Temperaturdifferenz zwischen Plattenoberfläche und Umgebung. Die wirksame Fläche der Konvektion beträgt A_2 (siehe Gl. 4.23). Beim Kühlkörper ist die Fläche der Konvektion durch die Rippenkonstruktion vergrößert. Sie ist wesentlich größer als A_2 und muss in Gl. 4.25 umgerechnet werden.

Das Umrechnungsprinzip der Wärmeübergangszahl ist, dass der konvektive Wärmewiderstand für beide Fälle den gleichen Wert aufweisen soll. Es gilt:

$$R_{th_conv} = R_{th_fin} \quad (4.29)$$

Der konvektive Wärmewiderstand des Kühlkörpers mit Rippe ergibt sich zu:

$$R_{th_fin} = \frac{1}{h_{eff} \cdot (\eta_{fin} A_{fin} + A_{Base})} \quad (4.30)$$

wobei h_{eff} die effektive Wärmeübergangszahl der Rippe, A_{fin} die gesamte Oberfläche der Rippe, A_{Base} die Fläche des Substrates und η_{fin} der thermische Wirkungsgrad der Rippe sind. Besonders betrachten, ist der thermische Wirkungsgrad η_{fin} . Der Wert von η_{fin} wird nicht nur von den thermischen Eigenschaften des Kühlkörpermaterials, sowie von der durchfließenden Strömung entschieden, sondern lässt sich auch stark von dem Umriss und der Ausprägung der Rippe beeinflussen. In Abbildung 4.9 ist eine Rippe mit konstantem Querschnitt gezeichnet. Der Wert η_{fin} für die Rippe in Abb. 4.9 ist mit folgender Formel zu berechnen:

$$\eta_{fin} = \frac{th(ml)}{ml} \quad (4.31)$$

Wobei $m = \sqrt{\frac{h_{eff} U}{\lambda \cdot A_c}}$, A_c Querschnitt der Rippe und U die Umfang der Rippe sind.

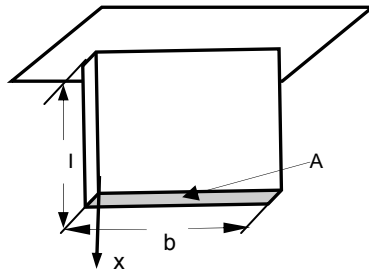


Abbildung 4.9. Rippe mit konstantem Querschnitt A_c

Gleichung 4.31 ist verwendbar unter der Annahme, dass der Wärmeabfuhr durch die Deckfläche der Rippe A_c vernachlässigt wird, welche der zweiten

Randbedingung von

$$\begin{cases} x=0, & t=t_0 \\ x=l, & \frac{dx}{dt}=0 \end{cases}$$

entspricht.

Bei der dritten Randbedingung

$$\begin{cases} x=0, & t=t_0 \\ x=l, & \lambda A_c \frac{dt}{dx} = h_{eff} A_c (t - t_{amb}) \end{cases}$$

kann η_{fin} bestimmt werden durch

$$\eta_{fin} = \frac{1}{ml} \cdot \frac{sh(ml) + \frac{h_{eff} ch(ml)}{m\lambda}}{ch(ml) + \frac{h_{eff} sh(ml)}{m\lambda}} \tag{4.32}$$

Man sieht, dass der thermische Wirkungsgrad η_{fin} einer Funktion der Größe ml ist.

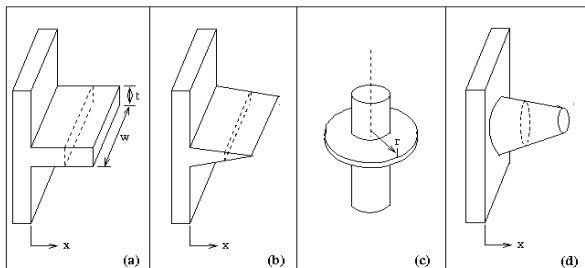


Abbildung 4.10. Unterschiedliche Umriss und Ausprägungen der Rippe [23]

In der Literatur [23] wird eine Tabelle für η_{fin} , in der der thermische Wirkungsgrad bei unterschiedlichen Umrissen und Ausprägungen der Rippe als Funktion von ml zusammengefasst ist, angegeben. Für die in Abb. 4.10 dargestellten Rippenformen ist der thermische Wirkungsgrad mit Gl.4.31 oder Gl.4.32 zu ermitteln. Dementsprechende Koeffizienten m sind in Tabelle 4.1 gelistet. δ_0 ist die Rippedicke des Rippenanfangs.

	(a)	(b)	(c)	(d)
m	$\left(\frac{h_{eff} \cdot U}{\lambda \cdot A_c}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{2h_{eff}}{\lambda \cdot \delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{4h_{eff}}{\lambda \cdot \delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{2h_{eff}}{\lambda \cdot \delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

Tabelle 4.1 Koeffizient m für typische Rippenformen

Nun kann der konvektive Wärmewiderstand des Kühlkörpers mit unterschiedlichen Rippen durch die Kühlkörperabmessungen und die effektive Wärmeübergangszahl der Rippe mit Gl.4.30 ermittelt werden. Anhand der Beziehung in Gl.4.29 und der Definition des Wärmeübergangswiderstands der Kühlplatte in Gl.4.23, kann die äquivalente Wärmeübergangszahl h_m bestimmt werden, die direkt in dem entsprechenden plattenförmigen Modell des Kühlkörpers angewendet werden kann. Die Umrechnung erfolgt durch

$$h_m = \frac{h_{eff} \cdot (\eta_{fin} A_{fin} + A_{Base})}{A_{Base}} \quad (4.33)$$

Setzt man Gl. 4.33 in Gleichung 4.20 ein, kann die Temperaturverteilung eines Kühlkörpers durch geometrischen und thermischen Daten, welche normalerweise vom Hersteller gegeben sind, bestimmt werden. Der maximale Spreizungswärme-widerstand im Bezug auf den heißesten Punkt ist dann mit Gl.4.25 zu ermitteln.

4.3.2 Ermittlung der Wärmeübergangszahl

Die Wärmeübergangszahl der Rippe h_{eff} ist von der Konstruktion der Rippe, der Leistung und den physikalischen Eigenschaften der Strömung abhängig. Sie ist normalerweise nicht aus dem Datenblatt des Herstellers entnehmbar und muss dann mit der Konvektionstheorie extra ermittelt werden. Da die Wärmeübertragung der Konvektion ein komplexer Vorgang ist, werden die entsprechenden Berechnungen meistens durch dimensionslose Gleichungen, die auf experimentellen Daten basieren, bestimmt. Bei dem Versuch der Konvektion

sind viele Daten durch die Grafik über die Beziehung von Colburn-Faktor j und Reynolds-Zahl Re

$$j = C_1 Re^{n_1}$$

zu ermitteln, wobei die Faktoren C_1 und n_1 durch experimentalen Versuch festgelegt werden[26]. Der Colburn-Faktor j ist definiert durch

$$j = St \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{h_{eff}}{g_m c_p} Pr^{2/3} = \frac{Nu \cdot Pr^{-1/3}}{Re} \tag{4.34}$$

mit $Pr = \frac{\nu}{a}$. Der Faktor St in Gl.4.34 ist die Stanton-Zahl mit $St = \frac{h_{eff}}{g_m c_p}$. Da in dem

Colburn-Faktor j die Beeinflussungen verschiedener Prandtl-Zahl Pr schon mit berücksichtigt sind, kann die effektive Wärmeübergangszahl h_{eff} nach der Ermittlung von j aus Gleichung 4.34 berechnet werden. Sie ergibt sich aus:

$$h_{eff} = \frac{j \cdot g_m c_p}{Pr^{2/3}} \tag{4.35}$$

Mit folgenden Variablen:

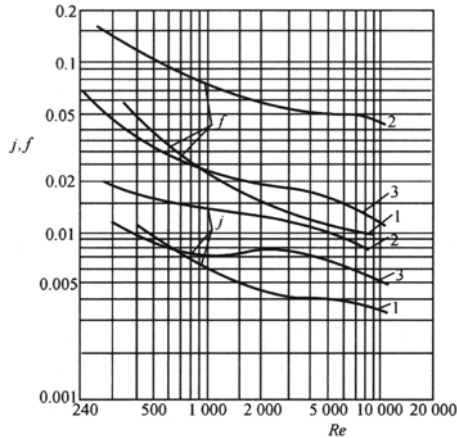
ν	Kinematische Zähigkeit	$[m^2s^{-1}]$
a	Temperaturleitfähigkeit	$[m^2s^{-1}]$
u	Geschwindigkeit der Strömung	$[ms^{-1}]$
g_m	Massegeschwindigkeit der Strömung	$[kgm^{-2}s^{-1}]$
c_p	spezifische Wärmekapazität	$[kJ/(kgK)]$

Was bei Verwendung der Gl.4.34 bzw. Gl.4.35 besonders zu beachten ist, dass die meisten physikalischen Größen, wie z.B. Wärmeleitfähigkeit, Kinematische Zähigkeit, Temperaturleitfähigkeit usw., mehr oder weniger von der Temperatur abhängig sind. Deshalb ist es notwendig, eine Referenztemperatur für alle Größen zu definieren und auszuwählen, damit alle temperaturabhängigen Größen als Konstant angesehen werden können. Der Faktor j ist je nach der geometrischen Form der Rippe durch Experimente zu bestimmen (siehe Abbildung 4.11). Die f-Kurve in Abb. 4.11 ist der Reibungskoeffizient, der zur Berechnung des Druckabfalls der Strömung benötigt wird. Für manche Rippenarten kann der Faktor j auch mit Formeln berechnet werden. Für sägezahnartige Rippen gelten dann folgende Formeln:

$$j = 0,48 \left(\frac{x}{d_e}\right)^{-0,18} a^{*0,18} \text{Re}^{-0,54} \quad \text{wenn } \text{Re} < 1000 \quad (4.36)$$

$$j = 0,24 \left(\frac{x}{d_e}\right)^{-0,32} \left(\frac{b_f}{d_e}\right)^{0,18} \text{Re}^{-0,37} \quad \text{wenn } \text{Re} > 1000 \quad (4.37)$$

Dabei ist x die Länge der Grenzschicht, d_e die charakteristische Länge des Kanals und b_f die Dicke der Rippe.



1- plattformig; 2- sägezahnförmig; 3- mit Löchern- Anfertigung an den Rippen

Abbildung 4.11 Die j-und f-Kurve aus experimentalen Versuchen verschiedener Rippen[26]

Der Berechnungsvorgang von h_{eff} für das Kühlsystem QLS200.18 von AUSTERLITZ ist in Anhang 8.1 mit dem Datensatz beigefügt. Die Ermittlung des Wirkungsgrades η_{fin} erfolgt durch Gl. 4.31.

Nach obiger Ermittlung der thermischen Parameter, können die Daten, die zur Lösung der Differenzialgleichungen benötigt werden, ausgerechnet werden:

Radius der Wärmequelle $r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{A_{Quelle}}{\pi}} = 0,044m$

Radius der Kühlplatte $r_2 = \sqrt{\frac{A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{A_{Basis}}{\pi}} = 0,113m$

Wärmeübergangszahl $h_m = \frac{1}{A_2 \cdot R_{th_fin}} = \frac{h_{eff} \cdot (\eta_{fin} \cdot A_{fm} + A_2)}{A_2} = 586,85W / Km^2$

4.3.3 Umsetzung der DGL in MATLAB

Der Kühlkörper KS200.18 ist mit dem thermischen Durchgangswiderstand $R_{th_k} = 1,2K/W$ katalogisiert. Der Materialwärmewiderstand der Kühlkörperbasis ergibt sich zu:

$$R_{m_M} = \frac{H}{\lambda \cdot A_2} = \frac{0,00165m^2K}{200W \cdot 0,04m^2} = 0,0002 \frac{K}{W}$$

Zu bestimmen ist der in Gleichung 4.25 definierte Spreizungswärmewiderstand. Dabei ist die maximale Temperatur der Kühlkörperbasis erforderlich, welche durch Temperaturverteilung aus DGL 4.6 ermittelt werden kann. Es sind noch zwei

Parameter $\frac{h_m}{H\lambda}$ und $\frac{P_{ges}}{\pi H\lambda \cdot r_1^2}$ zu bestimmen :

$$\frac{h_m}{H\lambda} = \frac{586,85WmK}{0,017m \cdot 200W \cdot m^2K} = 172,1m^{-2}$$

$$\frac{P_{ges}}{\pi H\lambda \cdot r_1^2} = \frac{350W \cdot mK}{\pi \cdot 0,017m \cdot 200W \cdot 0,044^2m^2} = 16925,3K/m^2$$

Werden die ausgerechneten Parameter in Gleichung 4.6 und Gleichung 4.9 eingesetzt, ergeben sich folgende DGL der Wärmeübertragung:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - 172(T(r) - T_{amb}) = 0 \quad \text{für } 0,044 \leq r \leq 0,113 \quad (4.38)$$

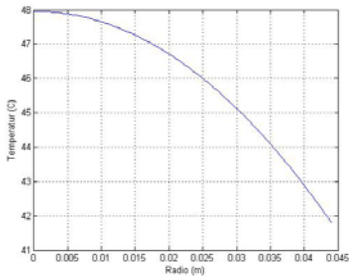
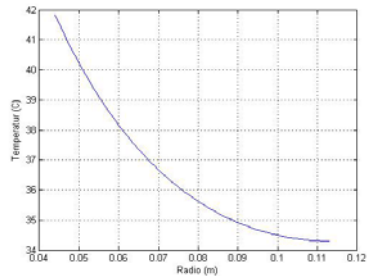
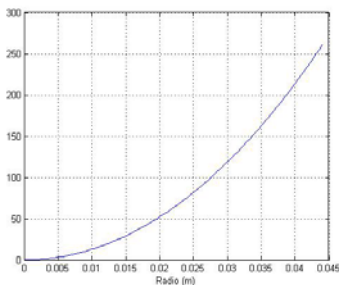
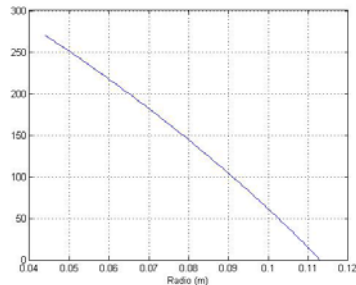
$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - 172(T(r) - T_{amb}) = 16925 \quad \text{für } 0 \leq r \leq 0,044 \quad (4.39)$$

Diese beiden Gleichungen werden in MATLAB implementiert und werden berechnet. Die DGL zweiter Ordnung ist in MATLAB mit der Funktion „mat4ode“ zu realisieren. Die Gleichungen 4.38 und 4.39 werden durch folgende Anweisungen in MATLAB beschrieben:

```
% y''+(1/x)*y'-23.12(y-22)=0
function dydx = mat4ode(x,y)
dydx=[y(2)+172*(y(1)-25)-(1/x)*y(2)];

% y''+(1/x)*y'-172(y-22)=16925
function dydx = mat4ode(x,y)
dydx = [y(2)-16925+172*(y(1)-25)-(1/x)*y(2)];
```

Ein Prozentzeichen ist der Anfang eines Kommentars. Im MATLAB stehen die Funktionsgruppe- „BVP“ so genannte Randwertprobleme zur Lösung des Randwertproblems der gewöhnlichen DGL zur Verfügung. Mit der Unterfunktion „bvp4c“ hat der Benutzer die Möglichkeit, die zwei Randwertbedingungen, die zur Lösung der gewöhnlichen DGL zweiter Ordnung notwendig sind, frei zu definieren. Man hat die Möglichkeit, die zwei Randwerte unter vier möglichen Werttypen ($y(x_a)$, $y(x_b)$, $y'(x_a)$, $y'(x_b)$) sowie die Ränder a und b zu definieren und vorzugeben. Diese beiden Gleichungen werden dann mit MATLAB für den Bereich $0 \leq r \leq 0.113$ berechnet. Als Umgebungstemperatur wird einer Raumtemperatur von 22°C angenommen. Man erhält den Temperaturverlauf für den inneren Bereich, wie in Abbildung 4.12 gezeigt, wobei die höchste Temperatur des Kühlkörpers, wie erwartet im Mittel der Geometrie liegt. In Abbildung 4.12 bis 4.15 werden die Temperaturverteilungen und der Wärmefluss jeweils im Bereich von $0 \leq r \leq 0.044$ und $0,044 \leq r \leq 0.113$ dargestellt.

Abb. 4.12 Berechneter Temperaturverlauf für $0 \leq r \leq 0.044$ Abb.4.13 Temperaturverlauf für $0,044 \leq r \leq 0.113$ Abb. 4.14 Berechneter Wärmefluss für $0 \leq r \leq 0.044$ Abb. 4.15 Berechneter Wärmefluss für $0,044 \leq r \leq 0.113$

An Abb. 4.12 und 4.13 ist deutlich zu erkennen, dass die Temperatur des Modells beim geometrischen Mittelpunkt $r = 0$ den maximalen Wert erreicht und sinkt monoton mit dem Radius. Der Wärmefluss steigt wegen des externen

Wärmezufusses und erreicht den maximalen Wert von etwa 270W bei $r = 0,044m$, wobei die gesamte Wärmezufuhr 350W beträgt. Das bedeutet, dass nur etwa 20% der Wärmeleistung durch die Konvektion an der Bodenfläche des inneren Modellteils nach Außen abgeführt werden. Der Rest von etwa 80% der gesamten Wärmeleistung, wird durch Wärmeleitung in den äußeren Teil geleitet und wird dort durch Konvektion an der Bodenfläche komplett zur Umgebung transportiert. In Abb. 4.14 und 4.15 sind diese Vorgänge zu erkennen.

Wird die Temperaturverteilung direkt mit der analytischen Lösung aus Gleichung 4.20 berechnet, ist eine identische Grafik wie in Abbildung 4.12 zu erwarten. Die Lösungen aus der geschlossenen Form von Gl.4.20 zeigen eine exakte Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen aus MATLAB. Da der Algorithmus der Funktion „bvp4c“ in MATLAB auf der Finit-Differenz-Methode basiert und eine Genauigkeit vierter Ordnung bietet, hat die Übereinstimmung zwischen der analytischen Lösung und den Ergebnissen aus dem numerischen Verfahren, die Richtigkeit der mathematischen Herleitung der Temperaturverteilung bewiesen. Der maximale Wärmewiderstand bei dieser geometrischen Anordnung lässt sich nach Gleichung 4.21 berechnen zu:

$$R_{th_max} = \frac{T_{max} - T_{amb}}{P_V} = \frac{48C^{\circ} - 22C^{\circ}}{350W} = 0.0743K / W$$

Der Wärmewiderstand der Konvektion für eingesetzten Kühlkörper KS200.18 ist laut Datenblatt des Herstellers, mit der berechneten Wärmeübergangszahl, wie folgt zu ermitteln:

$$R_{th_conv} = \frac{1}{h_m \cdot A_2} = \frac{1}{586,85 \cdot 0,04} = 0,0426K / W$$

Der Spreizungswärmewiderstand beträgt in diesem Fall nach Gleichung 4.22

$$R_{th_spreiz} = R_{th_max} - R_{th_conv} = 0,029K / W$$

In der Tabelle 4.2 wird der maximale Wärmewiderstand, der Spreizungswärmewiderstand und deren Verhältniss bei verschiedenen Radiuverhältnissen von Wärmequelle und Kühlkörper dargestellt, während andere Bedingungen, wie z.B. Wärmeübergangszahl, Verlustleistung und Raumtemperatur unverändert bleiben.

Radiuverhältnissen r_i/r_a	28,1%	38,0%	56%	100,0%
R_{th_max} [K/W]	0,103	0,074	0,0654	0,057
R_{th_sp} [K/W]	0,058	0,029	0,0208	0,0124
R_{th_sp}/R_{th_max}	56,3%	39,8%	31,8%	21,8%

Tabelle 4.2 Maximal- und Spreizungswärmewiderstände bei unterschiedlicher Kontaktfläche

Unter diesen Bedingungen ist die geometrische Größe der Wärmequelle des einzigen Faktors, welcher den Spreizungswärmewiderstand beeinflusst.

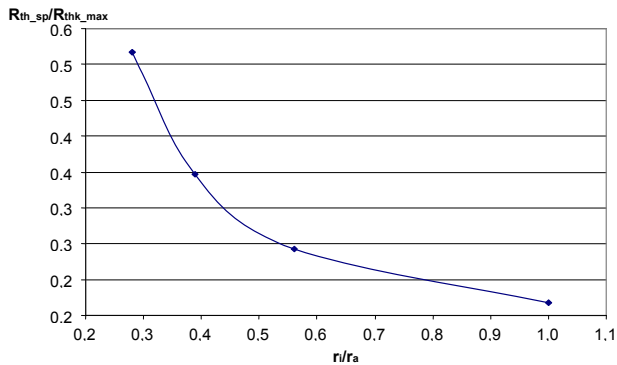


Abb.4.16 Verhältnis von R_{th_sp} und R_{th_max} in Abhängigkeit von der geometrischen Anordnung

In Abbildung 4.16 ist das Verhältnis R_{th_sp}/R_{th_max} als Funktion von r_i/r_a , bei gleicher Konvektionsbedingung dargestellt. An diesem Verlauf ist zu erkennen, dass für eine Wärmequelle, deren Fläche etwa 32% der Fläche der Kühlkörperbasis (hier KS200.18) ist, der Spreizungswärmewiderstand schon über 50% des gesamten Wärmewiderstands beträgt. Diese Aussage betrifft nur den Kühlkörper KS200.18 unter den dargestellten Kühlbedingungen. Die generelle Überprüfung der Gültigkeit der analytischen Lösung aus dem vereinfachten 2D-Modell wird anhand der thermischen Simulation mit einem FEM- Programm in Kapitel 5 durchgeführt.

4.4 Stationäres Temperaturfeld des Multi-Chip-Moduls

Wie bereits gezeigt, lässt sich der thermische Widerstand des Kühlkörpers stark von dem Umriss und der Montagestelle der Wärmequelle beeinflussen. Für eine nicht zentral gelegene Quelle, mit unsymmetrischem Umriss, ist das Temperaturfeld auch unsymmetrisch. Bei dem Multi-Chip Module beeinflusst das Temperaturfeld des Chips miteinander. Die Ermittlung solcher Felder erfolgt normalerweise durch numerische Berechnungsverfahren wie z.B. der Finiten Elemente Methode (FEM). In diesem Kapitel ist die analytische Darstellung des statischen Temperaturfeldes mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion abgeleitet, wobei das in Abbildung 4.3 gezeichnete Modell als einen Sonderfall der Wärmeleitung des Kühlkörpers zu bezeichnen ist. Bei der Ableitung wird davon ausgegangen, dass sowohl der Kühlkörper, als auch das Fluid, konstante thermische Eigenschaften besitzen.

4.4.1 Einführung der Greenschen Funktion

Die Poisson- DGL beschreibt die Beziehung zwischen Erregung und einem dadurch entstehenden stationären Feld, in einem geschlossenen Gebiet. Die Greensche Funktion repräsentiert das Feld, welches durch eine Punktquelle erzeugt wird. Mit Hilfe der Greensche Funktion kann z.B. die Lösung des Randwertproblems einer inhomogenen, gewöhnlichen DGL zweiter Ordnung, durch das Integral der entsprechenden Greenschen Funktion, unter Berücksichtigung der Randbedingungen und Anfangsbedingung repräsentiert werden. Sie ist ein häufig verwendetes Tool zum Analysieren und zur Ermittlung des Feldes mit ungleichmäßig verteilter Quelle. Ist das Feld der Punktquelle bekannt, dann kann das Feld aus einer beliebigen Quelle durch die Überlagerung des Feldes einer einzelnen Quelle, ermittelt werden. Eine typische Poisson- DGL mit Randwertproblem ist beschrieben durch:

$$\Delta u(r) = -f(r) \qquad \text{(Poisson- Gleichung)} \qquad (4.40)$$

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial V} = \dot{\Phi}(r_{\partial V}) \qquad \text{(Randbedingung)} \qquad (4.41)$$

Gl.4.41 ist die generalisierte Beschreibung der Randbedingungen erster, zweiter und dritter Arten. Die Lösung der betrachteten DGL bei punktförmiger Erregung, unter Berücksichtigung der Randbedingungen in Gleichung 4.41, ist die dem

Differentialoperator entsprechende Greensche Funktion $G(r, r_0)$, wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$$\begin{cases} \Delta G(r, r_0) = -\delta(r - r_0) \\ \left[\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right]_{\partial V} = 0 \end{cases} \quad (4.42)$$

$\delta(r - r_0)$ ist die Dirac- Impulsfunktion im drei-dimensionalen Raum. Im kartesischen Koordinatensystem ist sie dargestellt durch:

$$\delta(r - r_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \quad (4.43)$$

Die gesuchte Feldfunktion $u(r)$ kann dann durch folgende Gleichung mit Hilfe der Greenschen Funktion ermittelt werden[35].

$$u(r) = \iiint_V G(r, r_0) f(r_0) dV_0 + \iint_{\partial V} \left[G(r, r_0) \frac{\partial u(r_0)}{\partial n_0} - u(r_0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} \right] dS_0 \quad (4.44)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite der Gleichung 4.44 repräsentiert die Summe des Potentials an der Stelle r im Raum V , welches von der Quelle $f(r_0)$ im Raum V hervorgerufen wird. Das zweite ist die gesamte Beeinflussung an der Stelle r , die von der Randbedingung verursacht wird. Die Greensche Funktion in Gl.4.44 beschreibt das Feld der Punktquelle der Poisson- Gleichung im freien Raum. Sie wird generelle Lösung der Poisson- Gleichung oder manchmal auch generelle Lösung, entsprechende der Laplace- Gleichung, genannt.

4.4.2 Stationäres Wärmeübertragungsproblem mit nicht zentrierter Wärmequelle

Das in Bild 4.17 gezeichnete thermische Modell besteht aus einer Kühlplatte und einer, auf der Plattenoberfläche beliebig platzierten, Wärmequelle. Zur Ermittlung der Temperaturverteilung in der Kühlplatte, ist das Modell mit einer rechteckigen Kühlplatte dargestellt, wobei die Wärmequelle als zweidimensional und mit konstanter Wärmeflussdichte angesehen werden kann.

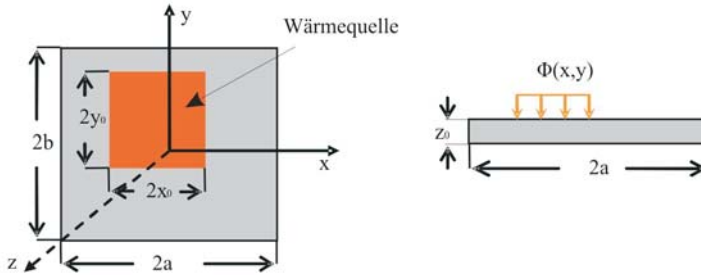


Abbildung 4.17 Kühlplatte mit einer beliebig platzierten Wärmequelle

Diese Kühlplatte mit 6 Randflächen bildet ein lineares homogenes Volumen. Die flächenartige Wärmequelle befindet sich auf der Oberfläche der Kühlplatte im Bereich $x_1 < x < x_2$ und $y_1 < y < y_2$ mit $|x_1 - x_2| = 2x_0$ und $|y_1 - y_2| = 2y_0$. Die Bodenfläche der Platte ist als dritte Randbedingung mit der Ersatzwärmeübergangszahl zu definieren. Es wird angenommen, dass die Wärmeübergangszahl zwischen der Konvektionsfläche und der durchfließenden Strömung nahe zu Konstant ist, damit das vorhandene Thermalproblem linear ist. Die restlichen Oberflächen der Kühlplatte sind als Wärme isoliert zu betrachten. Das dadurch entstehende Wärmeübertragungsproblem ist mit folgenden Gleichungen zu beschreiben.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \Phi(x,y) \quad x_1 < x < x_2 \quad \text{und} \quad y_1 < y < y_2 \quad (a) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = h(T(x,y,z) - T_a) \quad -a < x < a \quad \text{und} \quad -b < y < b \quad (b) \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=-a,a} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-b,b} = 0 \quad 0 < z < z_0 \quad (c) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Bei Gleichung 4.45 handelt es sich um eine Laplace- DGL mit gemischten Randbedingungen, wobei die Bedingungen (a) und (c) der zweiten und die Bedingung (b) der dritten Art sind. $\Phi(x,y)$ ist eine Wärmequelle mit konstanter Wärmeflussdichte, welche die Verlustwärme des Leistungsmoduls repräsentiert. Außerdem befindet sich keine Wärmequelle mehr im Kühlkörper. Die Greensche Funktion ist eine Lösung für das inhomogene Problem:

$$LG(x, y, z; x', y', z') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

$$\text{mit } L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.46)$$

Im Vergleich mit der Poisson- Gleichung 4.40 ist der Term $f(r)$ in der Gleichung 4.45 gleich Null. Damit kann das Temperaturfeld mit Hilfe der Greenschen Funktion aus Gleichung 4.46 hergeleitet werden[35]:

$$T(x, y, z) = \oint_{\partial V} \lambda [T(x', y', z') \nabla G(x, y, z; x', y', z') - G(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z')] dS' \quad (4.47)$$

4.4.3 Greensche Funktion mit Randbedingung

Zur Ermittlung des Temperaturfeldes eines Kühlkörpers aus Gleichung 4.47 benötigt man die dem Problem entsprechende, Greensche Funktion. Für Gebiete, wo $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -h(T(x, y, z) - T_a) + \dot{\Phi}$ als Randbedingung definiert ist, soll folgende zusätzliche Bedingung zur Bestimmung der Greenschen Funktion verwendet werden:

$$\lambda \frac{\partial G(x, y, z; x', y', z')}{\partial n'} = h_g(x', y', z')(G(x, y, z; x', y', z')) \quad (4.48)$$

Unter Berücksichtigung der drei Randbedingungen im Gleichungssystem 4.45 sowie mit der Benutzung der Gleichung 4.42 und der allgemeinen Randbedingung

$$\lambda \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial n} = h(T(x, y, z) - T_a) + J(x, y, z) \quad (4.49)$$

kann die Gleichung 4.46 mit den folgenden Schritten aufgelöst werden, wobei J die Wärmequelle an der Oberfläche ist.

- (a) **Für die Randfläche** ($x_1 < x < x_2; y_1 < y < y_2; z = 0$) $\in \partial V_1 \in \partial V$

Auf diesen Flächenteil wird das Leistungsmodul montiert, welches als 2D-Wärmequelle mit konstanter Wärmeflussdichte angesehen werden kann. Es gilt dann $h = 0$ und $J = \dot{\Phi}(x, y)$. Die gesuchte Greensche Funktion soll folgende Bedingungen erfüllen.

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1(x, y, z; x', y', z')}{\partial n'} = 0 \\ \Delta G_1(x, y, z; x', y', z') = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \end{cases} \quad (4.50)$$

Betrachtet man die zwei Bedingungen in Gleichung 4.50, wird deutlich, dass die Greensche Funktion, die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen soll, sowohl physikalisch als auch mathematisch widersprüchlich ist. Um dieses Problem erledigen zu können, können zwei verschiedene Methoden verwendet werden:

1. Modifizierung der homogenen Randbedingung, so dass die Greensche Gleichung unverändert bleibt.
2. Modifizierung der Greenschen Gleichung, so dass die homogene Randbedingung unverändert bleibt.

Eine Lösung auf der Basis der ersten Methode ist, statt der homogenen Randbedingung die einfachste inhomogene Randbedingung für Greensche Funktion zu verwenden[36]:

$$\left. \frac{\partial G_1(x, y, z; x', y', z')}{\partial n'} \right|_{\partial V} = \frac{1}{S} \quad (4.51)$$

Wobei $S = S_1 + S_2$ mit S_1 und S_2 jeweils die innere und äußere Randoberfläche sind. Da die Temperaturverteilung innerhalb der Randoberfläche ermittelt werden soll, geht S_2 bzw. S gegen unendlich ($S_2 \rightarrow \infty; S \rightarrow \infty$).

Setzt man Gl.4.51 mit der Greensche Funktion aus 4.50 in die Temperaturverteilung ein, kann Gleichung 4.47 wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \Big|_{\partial V_1} &= \int_{\partial V_1} \lambda G_1(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z') dS' \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} G_1(x, y, z; x', y', z') \dot{\Phi}(x', y', 0) dS' \end{aligned} \quad (4.52)$$

- (b) **Für die Randfläche** $(x = \pm a; 0 < z < z_0; -b < y < b) \in \partial V_2 \in \partial V$,
 $(y = \pm b; 0 < z < z_0; -a < x < a) \in \partial V_3 \in \partial V$

Die Flächen ∂V_2 und ∂V_3 sind die vier Seitenoberfläche der Rechtecke, bei denen kein Wärmetausch mit der Umgebung stattfindet. Es gilt bei diesen Randflächen die zweite Randbedingung, welche auch adiabatische Randbedingung ($\partial T / \partial n' = 0$) genannt wird. Mit der Modifizierungsmethode, die oben vorgestellt wurde, erhält man Gleichung 4.47 wie folgt:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) \Big|_{\partial V_2, \partial V_3} &= \int_{\partial V_2} \lambda G_2(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z') dS' \\
 &+ \int_{\partial V_3} \lambda G_3(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z') dS' \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Im Vergleich mit Gleichung 4.52 verschwindet das Flächeintegral in Gleichung 4.53 wegen der adiabatischen Randbedingung.

Physikalisch ist dieses Ergebnis leicht zu präsentieren: Bei einer quellenfreien geschlossenen Raumzone wird das innere Temperaturfeld sich nicht ändern, wenn dieses Gebiet nach außen wärmeisoliert ist. Die wärmeisoliert Randfläche hat keinen Einfluss auf das innere Temperaturfeld.

(c) **Für die Randfläche** ($z = z_0; -a < x < a; -b < y < b$) $\in \partial V_4 \in \partial V$

Dieser Flächenteil ist die Bodenoberfläche des Modells. Es gilt an dieser Fläche die dritte Randbedingung $\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -h(T(x, y, z) - T_a)$. Die gesuchte Greensche

Funktion soll folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial G_4(x, y, z; x', y', z')}{\partial n'} = -h \cdot G_4(x, y, z; x', y', z') \\ \Delta G_4(x, y, z; x', y', z') = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \end{cases}$$

Die Gleichung 4.47 hat dann die Darstellung:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) \Big|_{\partial V_4} &= \int_{\partial V_4} \lambda [-T(x', y', z') \nabla G_4(x, y, z; x', y', z') + G_4(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z')] dS' \\
 &= \int_{\partial V_4} (-h_g T_a + J(x', y', z')) G_4(x, y, z; x', y', z') dS'
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Die für Gleichung 4.52, 4.53 und 4.54 zugewiesene Fläche bildet eine geschlossene Oberfläche, deren Randbedingungen das geschlossene Flächeintegral in Gleichung 4.47 vervollständigen. Bei jeder Teilfläche ist die Konstruktion der Greenschen Funktion von der zugehörigen Randbedingung abhängig und die Greensche Funktion selbe bleibt dann stetig. Werden Gleichung 4.52, 4.53 und 4.54 in Gl.4.47 eingesetzt, bekommt man die Zielgleichung der Temperaturverteilung im geschlossenen Raum V:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) = & \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} G_1(x, y, z; x', y', z') \dot{\Phi}(x', y', 0) dS' \\
 & + \iint_{\partial V_4} (-h_g T_a + J(x', y', z')) G_4(x, y, z; x', y', z') dx' dy'
 \end{aligned}
 \tag{4.55}$$

wobei $J(x', y', z') = J(x', y', z_0) = 0$.

4.4.4 Konstruktion der Greenschen Funktion

Die Ermittlung der Greenschen Funktion mit gemischten Randbedingungen ist jedoch nicht einfach. Eine Methode ist die Verwendung unendlicher Reihen. Zu bestimmen ist die Greensche Funktion für den Laplace Operator. Wir betrachten folgende differenziale Gleichung mit entsprechendem Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned}
 L(r) &= f \\
 L[e_k(r)] &= \lambda_k \cdot e_k(r)
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

wobei λ_k der Eigenwert, e_k die Eigenfunktion und L der Differenz- Operator sind. Die Greensche Funktion kann durch die Eigenwert und Eigenfunktion bestimmt werden[37].

$$G(r, r') = \sum_n \frac{1}{\|e_n\|^2 \cdot \lambda_n} e_n(r) e_n(r') f(r)
 \tag{4.57}$$

Die Lösung von Gleichung 4.56 ist die Kombination von $\sin(n\pi r)$ und $\cos(n\pi r)$. Es gilt dann:

$$L[\cos(n\pi r) + \sin(n\pi r)] = (n\pi)^2 \cdot (\cos(n\pi r) + \sin(n\pi r))
 \tag{4.58}$$

mit dem Eigenwerte $\lambda_n = (n\pi)^2$. Die Sinus- und Kosinusfunktionen in 4.58 sind komplett orthogonal. Ist die Funktion $f(r)$ quadratisch integrierbar, dann kann diese Funktion nach der Fourier- Sinusreihe entwickelt werden:

$$f(r) = \sum \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi r)
 \tag{4.59}$$

Mit Hilfe der Gleichung 4.59 ergibt sich die Greensche Funktion:

$$G(r, r') = \sum_n \alpha_n(r') e_n(r)
 \tag{4.60}$$

Zur Bestimmung der G-Funktion ist die Funktion $f(r)$ mit der Delta-Funktion zu ersetzen. Die Fourier- Reihe für die 3-D Delta-Funktion hat die Darstellung [37]:

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = \sum_i^{\mu} \sum_j^{\mu} \sum_k^{\mu} 8 \sin(i\pi x) \sin(i\pi x') \sin(j\pi y) \sin(j\pi y') \sin(k\pi z) \sin(k\pi z') \tag{4.61}$$

Wird Gleichung 4.61 mit der Gleichung 4.59 verglichen, können die Fourier-Koeffizienten α_n bestimmt werden.

$$\alpha_n = 8 \sin(i\pi x') \sin(j\pi y') \sin(k\pi z') = \sin(n\pi r') \tag{4.62}$$

Damit hat die „frei“ Greenesche Funktion des Laplace- Operators für ein homogenes System folgende Darstellungen:

$$G(r, r') = \sum_n \frac{\alpha_n(r') e_n(r)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^k \frac{\sin(n\pi r') [\cos(n\pi r) + \sin(n\pi r)]}{(n\pi)^2} \tag{4.63}$$

Im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem

$$G(x, y, z; x', y', z') = \sum_i^{\mu} \sum_j^{\mu} \sum_k^{\mu} \left\{ \begin{array}{l} \frac{8 \sin(i\pi x') \sin(j\pi y') \sin(k\pi z')}{(i^2 + j^2 + k^2) \pi^2} \\ [\sin(i\pi x) \sin(j\pi y) \sin(k\pi z) + \cos(i\pi x) \cos(j\pi y) \cos(k\pi z)] \end{array} \right\} \tag{4.64}$$

Die G-Funktion in Gleichung 4.64 ist die G-Funktion in freiem Raum. Sie ist unter Berücksichtigung unterschiedlicher Randbedingungen neu zu konstruieren, sodass unterschiedliche G-Funktionen ($G_1 \sim G_4$) anzuwenden sind.

4.4.5 Stabiles Wärmeübertragungsproblem mit mehreren Wärmequellen

Die Analyse von Abschnitt 4.4.4 hat gezeigt, dass das Feld für den definierten geschlossenen Raum durch die Greenesche Funktion im freien Raum mit dementsprechenden Randbedingungen ermittelt werden kann. Im Fall eines räumlichen Gebiets, welches in Abb.4.18 dargestellt ist, gibt es 6 Randflächen zu definieren. Innerhalb dieses Gebietes ist es quellenfrei. Q_1, Q_2 und Q_n in Abb.4.18 sind die Wärmequellen an der Fläche ∂V_1 . Das Feld im diesen Gebiet ist die Summe des von der Quelle im Gebiet erzeugten Anteils und der

Beeinflussungen aus den 6 Randflächen, wobei die gesamte Beeinflussung aus der Summe aller Teiloberflächen, wie in Gleichung 4.55 gezeigt hat, gebildet werden kann. Das Temperaturfeld aus Gl.4.55 repräsentiert das Feld des in Abb.4.18 dargestellten räumlichen Gebiets mit nur einer Wärmequelle an der Fläche ∂V_1 . Bei mehreren Wärmequellen müssen die Beeinflussungen aus allen Quellen berücksichtigt werden.

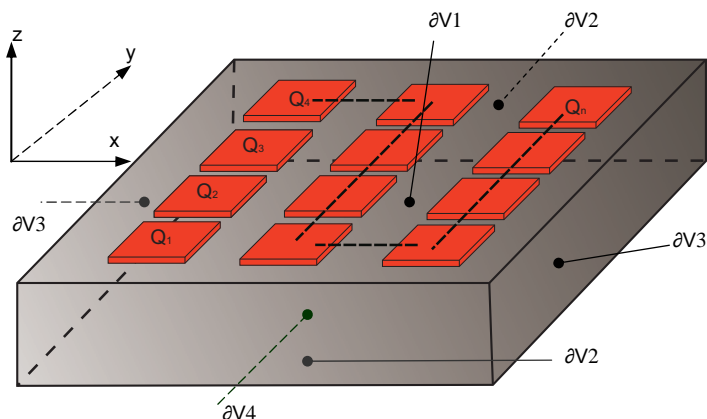


Abbildung 4.18. Räumliches Gebiet mit mehreren Wärmequellen an der Randfläche

Das heißt, das Flächenintegral über die Fläche ∂V_1 in Gleichung 4.52 besteht aus mehreren Flächenanteilen von allen einzelnen Wärmequellen und der Restfläche von ∂V_1 . Die Gleichung 4.52 hat dann die Darstellung

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z)|_{\partial V_1} &= \int_{\partial V_1} \lambda G_1(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z') dS' \\
 &= \int_{\partial V_{1-Q_1}} \lambda G_1 \nabla T dS' + \int_{\partial V_{1-Q_2}} \lambda G_1 \nabla T dS' + \dots + \int_{\partial V_{1-Q_n}} \lambda G_1 \nabla T dS' \quad (4.65) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\partial V_{1-Q_i}} \lambda G_1(x, y, z; x', y', z') \nabla T(x', y', z') dS' \right)
 \end{aligned}$$

wobei ∂V_{1-Q_n} die Flächegebiete der Wärmequelle Q_n sind. Setzt man die Gleichung 4.65 in Gl. 4.55 ein, so kann das Temperaturfeld für Multi- Chip-Modul auch in Form von Integralgleichung dargestellt werden.

$$T(x, y, z) = T(x, y, z)|_{\partial V_1} + T(x, y, z)|_{\partial V_2} + \dots + T(x, y, z)|_{\partial V_n} \quad (4.66)$$

Die in der Gl.4.66 angegebene mathematische Darstellung ist die analytische Lösung des stationären Temperaturfeldes einer Kühlplatte mit allgemeinen

Randbedingungen. Diese Lösung bietet zwar die Möglichkeit, das stationäre Temperaturfeld mathematisch zu beschreiben, aber für eine praktische Anwendung ist sie nicht gebräuchlich. In der Praxis werden solche Temperaturfelder häufig mittels Experimenten empirisch ermittelt. Quantitativ experimentelle Versuche über empirisch gewonnene Funktion und entsprechende Versuchsdurchführungen werden in Kapitel 6 ausführlich beschrieben.

Kapitel 5

Vergleich der analytischen Lösung des Spreizungswärme­widerstands mit den Simulationsergebnissen

Im letzten Kapitel ist das vereinfachte, zweidimensionale thermische Modell für Kühlkörperanwendungen in der elektronischen Modulkühlung vorgestellt worden. Die Temperaturverteilung und damit der thermische Widerstand der Wärmespreizung für das vereinfachte Modell mit zentralisierter, quadratischer Wärmequelle, sind in den geschlossenen Formeln (Gl.4.24, Gl.4.25) hergeleitet. Die Vereinfachung des thermischen Modells vom dreidimensionalen auf das zweidimensionale, basiert auf der Dünne der Plattenbasis und der hohen Wärmeleitfähigkeit des Materials des betroffenen Kühlkörpers, damit die Temperaturdifferenz in Richtung der Dicke vernachlässigt werden kann. Diese Vereinfachung wird, je nach Material, Geometrie und Konvektionsbedingung des Kühlkörpers zu mehr oder weniger Berechnungstoleranz führen. Mit diesem Gedanken ist es uns klar, dass die vorgestellte Methode nicht unbegrenzt in der Kühlung mit Kühlkörper verwendet werden kann. Um die Berechnungsfehler bzw. die Anwendungsbereiche zu bestimmen, sind thermische Simulationen des unvereinfachten Modells erforderlich. Dafür wird, in diesem Kapitel, das thermische Modell der Kühlplatte, mit der Software ANSYS, dreidimensional simuliert. Diese Ergebnisse können als exakt angesehen werden. Durch den Vergleich der simulierten und der analytischen Ergebnisse, werden die Anwendungsbereiche des zweidimensionalen Modells angegeben. Die Beeinflussungen von den relevanten Parametern werden auch in diesem Kapitel diskutiert.

5.1 Simulation des Thermalmodells mit ANSYS

ANSYS ist ein, in den siebziger Jahren von Dr. John A. Swanson entwickeltes, Programm zur Simulation von linearen und nichtlinearen Problemen der Strukturmechanik, Strömungsmechanik, Akustik, Thermodynamik, Piezoelektrizität und des Elektromagnetismus. Der Name ANSYS steht für ein komplettes Angebot an FEM(Finite- Element- Methode)- Simulationstechnologie, genutzt von der größten Anwender- Community weltweit. Es gibt zwei verschiedene Versionen, das klassische ANSYS und der ANSYS Workbench. Beim klassischen ANSYS handelt es sich um ein Programm zur grafischen

Definition und Berechnung von Problemen, während ANSYS Workbench aus verschiedenen Modulen besteht, die in einem Projekt zusammengefasst werden. In dieser Arbeit wird das klassische ANSYS 10.0 zur Simulation des dreidimensionalen, stationären, thermischen Problems angewendet. Die thermische Simulation bei ANSYS basiert auf der Gleichung für die Wärmeübertragung, aus dem Grundsatz der Energieerhaltung. Dabei wird die Temperaturverteilung und andere thermischen Quantitäten, wie z.B. der Wärmefluss und der Gradient der Temperatur in einem System berechnet. Die Berechnung erfolgt mit der Methode der finiten Elemente, bei der die Knotentemperatur von dem definierten Finite-Element zuerst ermittelt wird. Die andere thermische Quantitäten sind dann durch die Knotentemperaturen zu erhalten. ANSYS 10.0 bietet 40 mögliche Elemente zur Realisierung der stationären thermischen Simulation für unterschiedliche thermische Modelle. Um das in Kapitel 4 vorgestellte plattenförmige Model mit ANSYS zu simulieren, sollte es die 3D Elements für Feststoff gewählt werden. Es stehen in ANSYS 3 unterschiedliche Elemente (SOLID70, SOLID87 und SOLID90) für die Simulation von 3D- Feststoffen zur Verfügung. Der wesentliche Unterschied besteht in der Anzahl der Knoten. Das Element SOLID70 hat 8 Knoten, welche sich jeweils an der Ecke des Elements befinden, während die Anzahl der Knoten bei SOLID87 zehn und bei SOLID90 zwanzig beträgt. Bei jedem Knoten ist die Temperatur der einzige Freiheitsgrad. Bild 5.1 zeigt die Elementgeometrie von SOLID70.

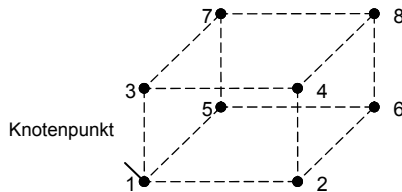


Bild 5.1 Elementgeometrie von SOLID70

Das ANSYS- Programm bietet umfassende Möglichkeiten zur Festlegung der Knoten und Elemente des Finiten-Elementen-Modells. Es sind zwei Arbeitsweisen verfügbar: Die Geometriemodellierung (Solid Modeling) mit anschließender automatischer Vernetzung oder die direkte Eingabe einzelner Knoten und Elemente. Das endgültige Ziel des Generierens eines Solid-Modells ist die Vernetzung dieses Modells mit Knoten und Elementen, während bei der direkten Modellierung der Benutzer keine Vernetzung braucht und er die Knoten und ihre Elemente direkt eingeben kann.

5.1.1 Aufbau und Modellierung des thermischen Modells in ANSYS

Das zu simulierende Problem in Abb.4.3 ist ein stationäres Problem der Wärmeübertragung. Die Simulation der stationären Wärmeübertragung in ANSYS besteht aus drei Hauptschritten:

- Geometrische Darstellung des Modells
- Definition der Randbedingungen
- Darstellung der Ergebnisse

Die Erstellung der Geometrie ist in diesem Fall einfach. Die Simulation basiert auf einer quadratischen Kühlplatte mit den Abmessungen 200 x 200mm. Die Wärmeleitfähigkeit der Kühlplatte wurde auf den Wert 200W/mK eingestellt, welche dem typischen Wert von Aluminium entspricht. Auf der oberen Oberfläche der Platte ist die konstante Wärmeflussdichte für eine gewisse zentralisierte Fläche zugewiesen. Die restliche obere Oberfläche und die Umfangsoberfläche wurden als wärmeisoliert definiert. Die untere Oberfläche der Platte muss mit einer Konvektionsbedingung zugewiesen werden. Dazu ist die uniforme Wärmeübertragungszahl h_m und die Umgebungstemperatur T_{amb} zuzuweisen. Um es mit analytischen Lösungen überhaupt vergleichen zu können, sollen unterschiedliche Parameter und unterschiedliche Kombinationen gewählt werden. Die Temperaturverteilung und damit auch der Spreizungswärmeübergangswiderstand ist eine Funktion von den dimensionslosen Parametern $\gamma = r_1 / r_2$ (dimensionslose Fläche), $\tau = t / r_2$ (dimensionslose Dicke) und der Biot- Zahl ($Bi = \frac{h_m \cdot t}{\lambda}$). Für die dimensionslose Fläche γ werden nur zwei Werte (0,28 und 1) gewählt, die jeweils als die untere und obere Grenze in der praktischen Anwendung angesehen werden können. Die dimensionslose Dicke τ wird auf vier unterschiedlichen Werten (0,0089, 0,089, 0,177 und 0,89) eingestellt, während der Biot- Zahl die Werte 0,001, 0,01 0,1 und 1 zugewiesen werden. Aus den Kombinationen dieser Werte können insgesamt 16, zur Simulation erforderliche, Wärmeübertragungszahlen h_m ermittelt werden.



Abbildung 5.2 Visuelle Ansicht der Grenzfälle der Kontaktkonfiguration

Die 16 Parameterkombinationen von τ und Bi werden jeweils bei $\gamma = 0,28$ und $\gamma = 1$ simuliert, damit sind insgesamt 32 Simulationen durchzuführen. Die Umgebungstemperatur ist dabei mit 22°C angenommen. Aufgrund der einfacheren Geometrie wurde die Geometriemodellierung (Solid Modeling) mit unstrukturiertem Netz zur Erzeugung der finiten Elemente gewählt, da solche Netze mehrere Knoten und Elemente bilden und damit hoch auflösende Ergebnisse bieten.

		τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
		0,0089	0,089	0,117	0,89
Bi_1	0,001	200	20	10	2
Bi_2	0,01	2000	200	100	20
Bi_3	0,1	20000	2000	1000	200
Bi_4	1	200000	20000	10000	2000

Tabelle 5.1 Wärmeübertragungszahlen $h_m [W/m^2K]$

Dabei wird das unstrukturierte Netz unregelmäßig und ohne Bedingungen ausgeführt. Die Nachteile sind, dass der Rechner mehr Zeit zur Erzeugung des Netzes und später zur Berechnung der Ergebnisse braucht.

5.1.2 Bestimmung der thermischen Widerstände durch Simulationsergebnisse

Bei der stationären Simulation wird davon ausgegangen, dass die Temperaturverteilungen sich nicht mit der Zeit ändern. In diesem Zustand sind die Effekte der Wärmeleitung, diejenigen von Wärmequellen sowie von Randeinflüssen wie z.B. eine konstante Temperatur von Bedeutung. Nicht jedoch von Bedeutung sind die Effekte der Wärmekapazitäten und des Wärmespeichervermögens des untersuchten Moduls. Mittels stationärer Temperaturfeldberechnungen können die Temperaturen der Knoten, thermischen Gradienten, Wärmestromdichten und Wärmeströme im Modul bestimmt werden. Für die Bestimmung der maximalen thermischen Widerstände genügt es bei den hier durchgeführten Simulationen, die Temperaturen der Knoten zu berechnen. Es wird eine definierte Leistung auf der Fläche der Wärmequelle eingepreßt und die entstehende Temperaturdifferenz zwischen dem Mittelpunkt und der Umgebung erfasst. Für das erstellte Plattenmodell

wurde eine konstante Leistungsdichte eingepreßt, wobei die Umgebung auf einer konstanten Temperatur von $T_{amb} = 22^{\circ}\text{C}$ zu halten ist.

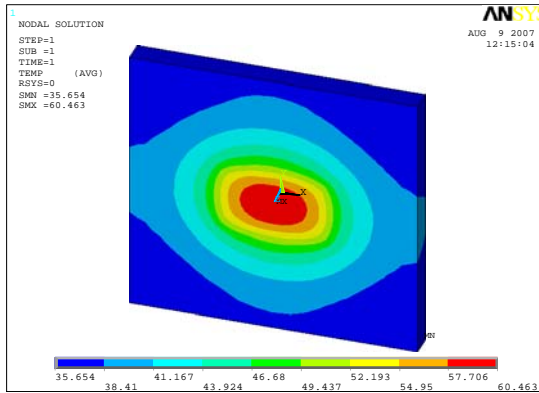


Abbildung 5.3 Simulierte Temperaturverteilung des Thermomodells für zentral gelegene Wärmequelle bei $h_m = 585\text{W/m}^2\text{K}$ und $\gamma = r_1 / r_2 = 0,28$

In Abb.5.3 ist die Temperaturverteilung des Modells bei $\gamma = 0,28$ zu sehen, wobei eine Leistungsdichte von $10,88\text{kW/m}^2$ auf einer Fläche von $0,067 \times 0,048\text{m}^2$, welche einer gesamten Leistung P_V von 350W entspricht, eingepreßt wurde. Die Wärmeübergangszahl h_m ist auf $585\text{W/m}^2\text{K}$ eingestellt. Der Spreizungswärmewiderstand lässt sich dann berechnen mit:

$$\begin{aligned} R_{th_sp} &= R_{th_max} - R_{th_conv} \\ \Rightarrow R_{th_sp} &= \frac{T_{max} - T_{amb}}{P_V} - \frac{1}{h_m \cdot A_2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Um die simulierten Ergebnisse des Spreizungswärmewiderstands mit den berechneten Werten aus Kapitel 4 vergleichen zu können, sind die Ergebnisse aus Gleichung 5.1 dem Materialwärmewiderstand aus Gleichung 4.26 zu normieren. Damit ergibt sich der dimensionslose Spreizungswärmewiderstand der Simulation:

$$\Psi_{sp_simu} = \frac{1}{R_{th_M}} \cdot R_{th_sp} = \frac{\lambda \cdot A_2}{t} \cdot \left(\frac{T_{max} - T_{amb}}{P_V} - \frac{1}{h_m \cdot A_2} \right) \quad (5.2)$$

In Tabelle 5.2 sind einige wichtige Werte angegeben, die mit dem Verfahren der stationären Simulation berechnet wurden.

$\gamma = 0,28$		$A_2 = 0,04\text{m}^2$	$P_v = 350\text{W}$	
t (m)	R_{th_M} ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)	h_m ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}$)	T_{max} ($^{\circ}\text{C}$)	Ψ_{sp_simu}
0,001	$1,25 \cdot 10^{-4}$	200	238,8	4458,3
		2000	71,3	1529,7
		20000	28	630
		200000	23,15	528,1
0,01	$1,25 \cdot 10^{-3}$	20	487,9	115,3
		200	94,2	115,3
		2000	46,6	96,5
		20000	31,4	70,8
0,02	$2,5 \cdot 10^{-3}$	10	909,3	39,2
		100	126,5	44,6
		1000	46,9	43,6
		10000	34,8	38,77
0,1	$1,25 \cdot 10^{-2}$	2	4409	7,77
		20	474,4	8,43
		200	81,6	8,65
		2000	42,3	8,67

Tabelle 5.2 Ausgewertete Simulationsdaten

Es handelt sich dabei um folgende Werte: Die eingepprägten Leistungen der Wärmequelle, die maximalen Temperaturen der Kühlplatte, die Materialwärmewiderstände der Platte, und die dimensionslosen Spreizungswärmewiderstände. Die Simulationen wurden bei $\gamma = 1$ auch durchgeführt.

5.2 Diskussion des Spreizungswärmewiderstands

Der Vergleich des Spreizungswärmewiderstands der Simulation und der analytischen Lösung, bei den Kontaktkonfiguration $\gamma = 0,28$ und $\gamma = 1$, ist jeweils in Abbildung 5.4 und 5.5 dargestellt. Beide Grafiken zeigen, dass die analytischen Lösungen und numerischen Ergebnisse in großen Bereichen der betroffenen Parameter gut zueinander passen. Wie erwartet nimmt der dimensionslose Spreizungs- Wärmewiderstand mit zunehmender dimensionslosen Dicke ab. Der Grund ist, dass der Querschnitt mit zunehmender Dicke auch vergrößert wird, wodurch die Wärme innerhalb der Kühlplatte bis zum Plattenrand ausbreitet. Damit nimmt der Spreizungswiderstand ab. Bei der unteren Grenze der dimensionslosen Kontaktfläche von $\gamma = 0,28$ lässt sich der

Spreizungswiderstand stark von der Biot- Zahl und der Dicke der Kühlplatte beeinflussen.

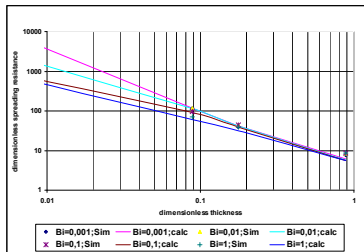


Abb.5.4 Vergleich zwischen numerischer und theoretischer Lösung bei einer dimensionslosen Kontaktfläche $\gamma = 0,28$

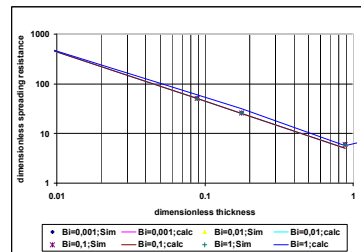


Abb.5.5 Vergleich zwischen numerischer und theoretischer Lösung bei einer dimensionslosen Kontaktfläche $\gamma = 1$

Erreicht die dimensionslose Kontaktfläche die obere Grenze von $\gamma = 1$, liegen die Verläufe in Abbildung 5.5, für unterschiedliche Biot-Zahlen, nahe beieinander. Der Spreizungswiderstand hängt nicht mehr von Biot-Zahl ab. Dieses Phänomen ist auf die physikalische Bedeutung der Biot-Zahl ($Bi = \frac{t/\lambda}{1/h}$) zurückzuführen.

Die Bi -Zahl repräsentiert das Verhältnis zwischen dem Materialwärmewiderstand der Wärmeleitung in einem Festkörper per Flächeneinheit und dem konvektiven Wärmewiderstand an der Oberfläche per Flächeneinheit. Für einen vorhandenen Festkörper bedeutet die Zunahme der Biot-Zahl eine verstärkte äußere Konvektionsbedingung (größer werdende Wärmeübergangszahl) und damit einen abnehmenden Wärmeübergangs-Widerstand. Außerdem ist die Biot-Zahl temperaturabhängig. Bei kleinerer Wärmequelle (höhere Wärmestromdichte) ist die Temperaturdifferenz an der Bodenoberfläche der Platte sehr groß. Die maximale Temperaturdifferenz an der Plattenbodenfläche in Abbildung 5.3 beträgt 25°C . Die Änderung der Konvektionsbedingung, wie zum Beispiel durch verstärkte Strömung, führt zu einer unterschiedlichen Änderung der Wärmeübergangszahl an verschiedenen Stellen der Konvektionsebene, so dass die Wärmestromdichte an der Bodenoberfläche ungleichmäßig geändert wird, dies verursacht die Änderung der Gestalt des Wärmeflusses innerhalb der Platte. Erreicht die dimensionslose Kontaktfläche den Wert eins, ist die Temperaturdifferenz an der Bodenoberfläche der Platte sehr klein und damit bleibt die Wärmeübergangszahl an der ganzen Konvektionsebene nahe zu konstant. Abb.5.5 hat gezeigt, dass in diesem Fall der Spreizungswiderstand von

der Biot- Zahl unabhängig ist. Mit der obigen Analyse kann folgende Aussage getroffen werden:

Im Fall einer kleinen Wärmequelle (höhere Wärmestromdichte) lässt sich der Spreizungswiderstand des Kühlkörpers sowohl von den Eigenschaften des Kühlmaterials, als auch von der äußeren Kühlungsbedingung beeinflussen. In Abbildung 5.6 und 5.7 sind ähnliche Vergleiche wie in Abbildung 5.4 und 5.5, aber in kartesischen Koordinaten dargestellt.

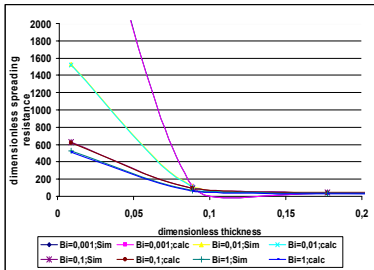


Abb. 5.6 Vergleich aus Abb.5.2.1 in kartesischen Koordinaten ($\gamma = 0,28$)

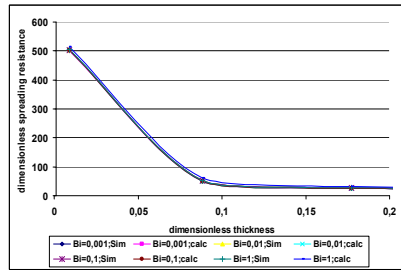
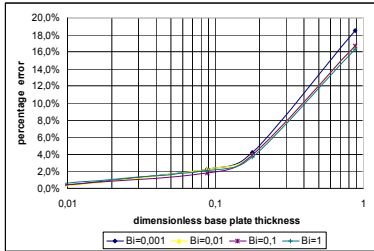
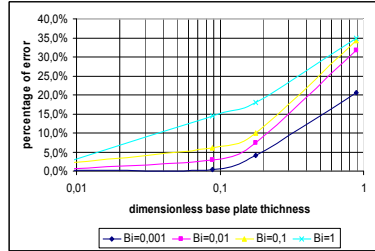


Abb. 5.7 Vergleich aus Abb. 5.2.2 in kartesischen Koordinaten ($\gamma = 1$)

In beiden Grafiken ist ein Knickpunkt des dimensionslosen Spreizungswärme-widerstandes, bei der dimensionslosen Dicke von etwa 0,1, zu erkennen. Da der Referenzwiderstand einen sehr kleinen Wert (etwa 10^{-6} K/W) hat, kann der Spreizungswärme-widerstand als konstant angesehen werden, wenn die dimensionslose Dicke größer als 0,1 ist. Das bedeutet, der Widerstand der Wärmespreizung lässt sich dann nicht mehr von Plattendicke und der äußeren Konvektionsbedingung beeinflussen. Die Gestalt der Wärmeflüsse, welche weit von der Wärmequelle entfernt sind, lässt sich damit auch nicht mehr von der Änderung der Kühlungsbedingung beeinflussen. Die Wärmespreizung ist also ein lokal physikalischer Vorgang, der auf die Nähe einer Wärmequelle begrenzt ist.

5.3 Anwendungsbereich

Zur Bestimmung des Anwendungsbereichs der in Kapitel 4 vorgestellten, vereinfachten Methode sind die Unterschiede zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen in Abb. 5.3.1 und 5.3.2 dargestellt.

Abb. 5.8 Berechnungsfehler in Prozent bei $\gamma = 1$ Abb. 5.9 Berechnungsfehler in Prozent bei $\gamma = 0,28$

Da die Erzeugung der Netzpunkte und somit der finiten Elemente sehr fein gewählt wurde, können die Simulationsergebnisse hier als „exakt“ angenommen werden. Beide Abbildungen zeigen einen steigenden Berechnungsfehler zwischen der geschlossenen Formel 4.25 und den numerischen Ergebnissen mit zunehmender Plattendicke und Biot-Zahl. Die Vergrößerung der Plattendicke ist die Zunahme des Materialwärmewiderstands in Querrichtung, welche im vereinfachten Modell vernachlässigt wurde, zur Folge. Andererseits verringert sich der Wärmeübergangswiderstand bei größer werdender Biot-Zahl (verbesserte Konvektion) und damit steigt der Anteil des Materialwärmewiderstands im Vergleich zum gesamten Wärmewiderstand. In beiden Fällen erhöhen sich die Berechnungsfehler wegen der Ignorierung des Material-Wärmewiderstands in Querrichtung. Erreicht die dimensionslose Kontaktfläche den Wert eins, wird die Genauigkeit der Berechnung weniger von der Biot-Zahl abhängig. Der Spreizungswärmewiderstand ist dann nicht so empfindlich gegenüber einer Änderung der Konvektion und der Vernachlässigung des Materialinnenwiderstands, weil der Spreizungswärmewiderstand einen kleinen Wert bei $\gamma = 1$ aufweist.

Wenn 10% der maximale zulässige Rechenfehler ist, liegt die obere Grenze der dimensionslosen Dicke τ bei etwa 0,38 für die obere Grenze der Kontaktfläche $\gamma = 1$, während für die untere Grenze der Kontaktfläche $\gamma = 1$, sie mit variabler Biot-Zahl zwischen 1 und 0,001, von 0,04 bis 0,3 variiert. Zur Bestimmung des Anwendungsbereichs der relevanten Parameter wird als ungünstigsten Fall eine Kühlplatte aus Aluminium Keramik ($\lambda = 30W/mK$) mit einer absoluten Plattendicke von 2cm angenommen. Die Wärmeübergangszahl erreicht den Wert $150W/m^2K$ für $Bi = 0,1$, welche eine effektive Konvektion mit erzwungener Strömung darstellt. Mit dieser Konfiguration erreicht der Rechenfehler den maximal zulässigen Wert von 10% bei der dimensionslosen

Kontaktfläche $\gamma = 0,28$ und verringert sich mit zunehmendem γ und abnehmender Biot-Zahl Bi . Werden andere Materialien wie zum Beispiel Aluminium ($\lambda_{Al} = 200W/mK$) oder Kupfer ($\lambda_{Cu} = 400W/mK$) als Kühlplattenmaterial genutzt oder die absolute Plattendicke ist weniger als 2cm, kann die Wärmeübergangszahl h_m bis auf über $1000W/m^2K$ gesteigert werden. Dieser Wert liegt damit schon über den Bereich der erzwungenen Luftkühlung, wobei der maximale Berechnungsfehler immer unter 10% bleibt.

Wird 10% als maximal erlaubter Berechnungsfehler angenommen, zeigen dementsprechend die dimensionslose Plattendicke die Schwellenwerte der Anwendungsbereiche auf. In Abbildung 5.10 sind zwei Kennlinien der Schwellenwerte jeweils für die obere und untere Grenze der dimensionslosen Kontaktfläche in Abhängigkeit von Biot-Zahl dargestellt.

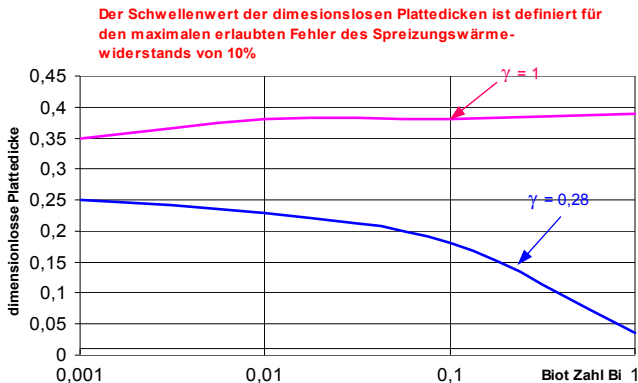


Abbildung 5.10 Schwellenwerte der dimensionslosen Plattendicken in Abhängigkeit der dimensionslosen Kontaktfläche und der Biot-Zahl

An diesen Kennlinien kann man erkennen, dass für die Biot-Zahl 0,1 die maximal erlaubte dimensionslose Plattendicke zwischen 0,18 und 0,38 liegt. Da die blaue Linie der unteren Grenze der Kontaktfläche entspricht, können die Kühlkörper mit einer relativen Basisdicke kleiner als 0,18, welche häufig in der Praxis der Elektronik Kühlung anzutreffen ist, immer mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode berechnet werden, wenn die Biot-Zahl kleiner als 0,1 beträgt. Ebenfalls ist das in Kapitel 4 vorgestellte analytische Verfahren für eine Basisdicke des Kühlkörpers größer als 0,38 nicht mehr anzuwenden, da die relativen Berechnungsfehler die zulässige Grenze von 10% überschreiten.

Kapitel 6

Empirische Gleichung des Wärmewiderstands

Die Ermittlung empirischer Gleichung aus experimentellen Daten, ist eine wichtige und zuverlässige Forschungsmethode im Bereich der Wärmeübertragung, da die analytischen Verfahren bei manchen komplexen Systemen nur eine mathematische Bedeutung aufweisen und in der Praxis nicht anzuwenden sind. Der Aufwand für die Experimentdurchführung kann jedoch sehr groß sein, um die Zusammenhänge der Variablen aus einem komplexen System mit mehreren Einflussgrößen herauszufinden. Bei technischen Problemen besteht häufig die Forderung, die Wirkung von Faktoren hinreichend genau und dabei mit möglichst geringem Aufwand quantitativ zu erfassen, daher sollte die Möglichkeit der Problembeschreibung durch eine Linearkombination von Funktionen schon bei der Auswahl des Modells während der Planungsphase untersucht werden.

Wird die Wärmeübertragung im Rohr mit erzwungener Strömung ohne Phasenänderung als Beispiel genommen, ist der Wärmeübergangskoeffizient h von der durchschnittlichen Geschwindigkeit der Strömung μ , des inneren Durchmessers des Rohrs d und den physikalischen Eigenschaften des Fluids λ_f , η , ρ und c_p abhängig. Es gilt:

λ_f :	Wärmeleitfähigkeit des Mediums	$[W m^{-1} K^{-1}]$
η :	Kinematische Zähigkeit	$[kg m^{-1} s^{-1}]$
ρ :	Dichte des Mediums	$[kg m^{-3}]$
c_p :	Spezifische Wärmekapazität	$[J kg^{-1} K^{-1}]$

Zur Bestimmung der Funktion $h = f(\mu, d, c_p, \lambda_f, \eta, \rho)$ (6.1)

muss eine Serie von Experimenten für unterschiedliche Werte der betroffenen Variablen durchgeführt werden. Mit 10 Werten für jede Variable beträgt die Anzahl der Versuche schon 10^6 , welches in der Praxis unrealistisch ist. Um die Versuchsanzahl stark zu reduzieren und gleichzeitig eine anwendbare Funktion auszuziehen, werden die Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse verwendet. Durch weitere Approximationsverfahren kann dann die empirische Gleichung, zur Beschreibung des physikalischen Systems, aus den Messwerten der reduzierten Variablen gewonnen werden.

In diesem Kapitel wird das Verfahren zur Erstellung der empirisch gewonnenen Abhängigkeit zwischen Wärmewiderstand des Kühlkörpers und den Einflussfaktoren durch experimentell ermittelte Datensätze vorgestellt. Durch Approximation der empirisch gewonnenen Datensätze und dementsprechenden Optimierungskriterien wird die empirische Funktion des thermischen Widerstands, in Abhängigkeit von einigen dimensionslosen Parametern, entwickelt.

6.1 Dynamische Ähnlichkeit

6.1.1 Die Theorie der dynamischen Ähnlichkeit

Die Ähnlichkeitstheorie beschreibt den Zusammenhang zwischen jeweils ähnlichen physikalischen Erscheinungen. Die Phänomene sind dann als ähnlich zu zeichnen, wenn die relevanten physikalischen Größen zur selben Zeit und zum selben Ort eins zu eins proportional sind. Bei zwei ähnlichen stationären konvektiven Wärmeübertragungssystemen sollen beispielsweise die Verteilung des Temperaturfeldes, die geometrische Anordnung der Wärmeübertragung und die thermischen Eigenschaften des Materials auch eine Ähnlichkeit besitzen. Diese ähnlichen Systeme können durch gewisse dimensionslose Verknüpfungen relevanter physikalischer Größen, die Kenngrößen genannt werden, beschrieben werden. Verschiedenartige physikalische Probleme heißen dann „dynamisch ähnlich“, wenn sie dieselben dimensionslosen Gleichungen und dieselben dimensionslosen Kenngrößen besitzen. Zur Verdeutlichung dimensionsloser Kenngrößen in einem „dynamisch ähnlichen“ System, wird im Folgenden die 2D-transiente Wärmeübertragung einer infiniten Platte als Beispiel betrachtet. Die mathematischen Beschreibungen für dieses Problem mit konstanten thermischen Eigenschaften und der Randbedingung dritter Art lauten:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{a})$$

$$x = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0; \quad (\text{b})$$

$$x = \delta, \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \quad (\text{c})$$

$$\tau = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad (\text{d})$$

Wobei θ die Temperaturerhöhung $T - T_\infty$, $\theta_0 = T_0 - T_\infty$, und die δ Halbdicke der Platte ist.

Durch Normierung der Gleichungen (a) bis (d) mit den Normierungsgrößen θ_0 , δ , und δ^2/a ergibt sich:

$$\frac{\partial(\theta/\theta_0)}{\partial \frac{a\tau}{\delta^2}} = \frac{\partial^2(\theta/\theta_0)}{\partial (x/\delta)^2} \quad (e)$$

$$\frac{x}{\tau} = 0, \quad \frac{\partial(\theta/\theta_0)}{\partial (x/\delta)} = 0 \quad (f)$$

$$\frac{x}{\tau} = 1, \quad \frac{\partial(\theta/\theta_0)}{\partial (x/\delta)} = -\frac{h\delta}{\lambda} \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) \quad (g)$$

$$\frac{a\tau}{\delta^2} = 0, \quad \frac{\theta}{\theta_0} = 1 \quad (h)$$

Mit der Berücksichtigung, dass $\frac{h\delta}{\lambda}$ die Biot- Zahl, $\frac{a\tau}{\delta^2}$ die Fourie-Zahl und

$\frac{\theta}{\theta_0} = \Theta$ die dimensionslose Temperaturerhöhung ist, können die Gleichungen (e)

bis (h) neu ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial(\Theta)}{\partial(Fo)} = \frac{\partial^2(\Theta)}{\partial (x/\delta)^2} \quad (i)$$

$$\frac{x}{\tau} = 0, \quad \frac{\partial(\Theta)}{\partial (x/\delta)} = 0 \quad (j)$$

$$\frac{x}{\tau} = 1, \quad \frac{\partial(\Theta)}{\partial (x/\delta)} = -Bi\Theta \quad (k)$$

$$Fo = 0, \quad \Theta = 1 \quad (l)$$

Aus Gleichung (i) bis (l) kann man feststellen, dass die dimensionslose Temperaturerhöhung Θ eine Funktion von der Biot- Zahl, der Fourie-Zahl, und

$\frac{x}{\delta}$ seien muss. Es gilt dann:

$$\Theta = f(Bi, Fo, \frac{x}{\delta}) \quad (6.2)$$

Gleichung 6.2 hat gezeigt, dass die vier dimensionslosen Größen, die relevant für die zweidimensionale transiente Wärmeübertragung einer infiniten Platte sind, über eine bestimmter Funktion zusammenzubinden. Das Besondere ist, dass bei

zwei verschiedenen zweidimensionalen transienten Wärmeübertragungen der infiniten Platte, mit gleichen Θ - Werten, zu erwarten ist, wenn die anderen drei dimensionslosen Größen $Bi, Fo, \frac{x}{\delta}$ in den zwei Vorgängen entsprechend gleich sind. Mit dieser Überlegung werden diese zwei transienten Wärmeübertragungsvorgänge als „dynamisch ähnlich“ bezeichnet. Die dimensionslose Temperaturerhöhung Θ , Bi , Fo , und $\frac{x}{\delta}$ sind die gesuchten Kenngrößen des Wärmeübertragungsvorgangs und Gleichung 6.1 wird als charakteristische Gleichung der Wärmeübertragung bezeichnet. Um die charakteristische Gleichung erhalten zu können, müssen zuerst die dimensionslosen Kenngrößen des physikalischen Vorgangs festgelegt werden. Es gibt zwei Methoden zur Festlegung dimensionsloser Größen, die Methode der Analyse der Differentialgleichung und die Methode der Dimensionsanalyse. Die Analyse der Differentialgleichung basiert auf Differentialgleichungen, die die physikalische Erscheinung beschreiben. Durch Normierung der Differenzialgleichungen mit gewählten Normierungsgrößen, wie in Gleichungen (a) bis (l) werden die gesuchten dimensionslosen Kenngrößen festgelegt. Die andere häufig verwendete Methode zur Bestimmung dimensionsloser Kenngrößen ist die Dimensionsanalyse, welche in folgendem Abschnitt detailliert vorgestellt wird.

6.1.2 Bestimmung der Kenngrößen durch Dimensionsanalyse

Die Dimensionsanalyse wurde im 19. Jahrhundert zur Feststellung von Beziehung zwischen physikalischen Größen entwickelt, die bei einer untersuchten physikalischen Erscheinung auftreten. Der Vorteil liegt darin, dass bei den physikalischen Vorgängen, deren Differentialgleichungen noch nicht bekannt sind, die gesuchten Zusammenhänge durch Analyse von den verwendeten Einheiten für Eingangs- und Ausgangsgrößen ausgedrückt werden können. Der Kern der Dimensionsanalyse ist das π - Theorem (wird auch Buckingham Theorem genannt). Das π - Theorem besagt:

Existieren bei „n“ verwendeten Größen maximal „r“ unabhängige Maßeinheiten, lassen sich alle weiteren Maßeinheiten durch Potenzprodukte der Einheiten dieser „r“ Grundgrößen darstellen. Damit ist die Anzahl der zu untersuchenden dimensionslosen Größen auf $n-r$ reduziert.

Der mathematische Beweis des π - Theorems ist in Anhang 8.2 beigefügt. Die Grundgrößen sind eine Reihe physikalischer Größen, aus deren Maßeinheiten alle anderen Maßeinheiten anderer Größen zusammensetzen lassen. In Tabelle 6.1 werden die Grundgrößen mit ihren Maßeinheiten aus dem den RGW verbindliche SI-Einheitensystem (SI: system international) gelistet.

Physikalische Größe	Formelzeichen	Maßeinheit	Abkürzung
Länge	L	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Strom	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	I _v	Candela	cd
Stoffmenge	N	Mol	mol

Tabelle 6.1 Die Grundgrößen mit ihren Einheiten im SI- System

Die Wirkung des π - Theorems wird im Folgenden an einem Beispiel der Wärmeübertragung mit erzwungener Strömung im Rohr erläutert.

Laut Gleichung 6.1 ist die Wärmeübergangszahl h eine Funktion von sechs anderen Parametern:

$$f(h, \mu, d, c_p, \lambda_f, \eta, \rho) = 0 \quad (6.3)$$

In diesem Beispiel gibt es insgesamt sieben Parameter, deren Maßeinheiten sich aus den Maßeinheiten von vier Grundgrößen von Zeit, Länge, Masse und Temperatur zusammensetzen lassen. Hiermit beträgt die Anzahl „n“ sieben und die Anzahl „m“ den Wert vier. Nach dem π - Theorem können drei dimensionslose Größen durch Potenzprodukte dieser vier Grundgrößen entstanden werden. Man kann feststellen, dass die Größen μ , d , λ_f und η voneinander unabhängig und deren Maßeinheiten auch die vier gewählten Grundgrößen enthalten. Durch Kombination der Maßeinheiten von den vier Grundgrößen mit den Maßeinheiten der übrigen drei Parameter in Gleichung 6.3, entstehen dann drei dimensionslose Größen π_1 , π_2 und π_3 :

$$\Pi_1 = h \cdot u^{\alpha_{11}} \cdot d^{\alpha_{12}} \cdot \lambda_f^{\alpha_{13}} \cdot \eta^{\alpha_{14}} \quad (m)$$

$$\Pi_2 = \rho \cdot u^{\alpha_{21}} \cdot d^{\alpha_{22}} \cdot \lambda_f^{\alpha_{23}} \cdot \eta^{\alpha_{24}} \quad (n)$$

$$\Pi_3 = c_p \cdot u^{\alpha_{31}} \cdot d^{\alpha_{32}} \cdot \lambda_f^{\alpha_{33}} \cdot \eta^{\alpha_{34}} \quad (o)$$

Durch Betrachtung der Maßeinheiten in Gleichung (m)

$$\begin{aligned} [\lambda_f] &= \text{kg m K}^{-1} \text{s}^{-3} \\ [\eta] &= \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1} \\ [d] &= \text{m} \\ [u] &= \text{m s}^{-1} \\ [h] &= \text{kg K}^{-1} \text{s}^{-3} \end{aligned}$$

kann folgende Beziehung der Maßeinheiten erstellt werden:

$$\Pi_1 = m^{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{14}} \cdot \text{kg}^{\alpha_{13} + \alpha_{14} + 1} \cdot \text{K}^{-1 - \alpha_{13}} \cdot \text{s}^{-\alpha_{11} - \alpha_{14} - 3\alpha_{13} - 3}$$

Die linke Seite der obigen Gleichung ist eine dimensionslose Größe, somit müssen die Potenzen der jeweiligen Maßeinheit auf der rechten Seite auch Null sein.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} - \alpha_{14} &= 0 \\ \alpha_{13} + \alpha_{14} + 1 &= 0 \\ -1 - \alpha_{13} &= 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{14} - 3\alpha_{13} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0; \quad \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{13} &= -1; \quad \alpha_{14} = 0 \end{aligned}$$

Setzt man die erhaltenen Potenzen in Gleichung (m) ein, kann die erste dimensionslose Größe ermittelt werden:

$$\Pi_1 = h \cdot u^0 \cdot d^1 \cdot \lambda_f^{-1} \cdot \eta^0 = \frac{h \cdot d}{\lambda_f} = Nu \quad (\text{p})$$

Analog können die dimensionslosen Größen π_2 und π_3 durch die gleiche Vorgehensweise bestimmt werden:

$$\Pi_2 = \frac{\rho u \cdot d}{\eta} = \text{Re} \quad (\text{q})$$

$$\Pi_3 = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda_f} = \text{Pr} \quad (\text{r})$$

Daraus kann Gleichung 6.3 umgestellt werden nach:

$$f(Nu, \text{Re}, \text{Pr}) = 0 \quad (6.4)$$

Nach der Konvektionstheorie sind die π - Komplexe in Gleichung 6.4 die Nußelt-Zahl, die Reynolds-Zahl und die Prandtl-Zahl, deren physikalische Bedeutungen in der Konvektionstheorie detailliert beschrieben und als maßgebende Kenngrößen genannt werden. Somit ist der Zusammenhang zwischen den sieben Größen in der Gleichung 6.3 auf eine Abhängigkeit zwischen drei dimensionslosen Kenngrößen aus dem Produkte dieser Größen zurückzuführen.

6.1.3 Anwendung

Die wichtigste Anwendung der Theorie der dynamischen Ähnlichkeit, ist die Anweisung der Richtlinie der Messplanung und der Verarbeitung der Messdaten. Im Bereich der Forschungstechnologie ist die mathematisch statistische Versuchsplanung aufgrund deren erreichbarer ökonomischer Effekte gefordert. Die Herausforderung von einer statistischen Versuchsplanung ist, die gemessene Größe nach n -Messungen quantitativ als Abhängigkeit verschiedener Einflussfaktoren darzustellen. Dafür ist die mögliche Kombination aller Einflussfaktoren erforderlich. Das heißt, wenn jeder der Faktoren x_m eine Anzahl von N_m Niveaus besitzt, ergibt die Versuchsanzahl n den Wert

$$n = \prod_{m=1}^i N_m \quad (6.5)$$

Eine solche Versuchsplanung wird auch vollfaktorielle Versuchsplanung genannt. Der Aufbau einer vollfaktoriellen Versuchsplanung ist wie folgt:

1. Zunächst legt man die Anzahl der zu untersuchenden Faktoren fest.
2. Danach wird festgelegt, wie viele Einstellungen jeder Faktor zu untersuchen hat (herrscht im Prozess Linearität, dann genügen zwei, ansonsten sollten mindestens drei Einstellungen gewählt werden).

Durch die Anwendung der Theorie ist es möglich, die zu untersuchenden Parameter zu verringern und experimentelle Ergebnisse zu verallgemeinern bzw. von einem Modell auf ein reales Objekt zu übertragen. Nach dieser Theorie sollen die Messdaten der konvektiven Wärmeübertragung durch die Funktion einiger Kenngrößen dargestellt werden. Das verlangt eine nach den Kenngrößen orientierte, vollständige Messplanung.

Nach Gleichung 6.4 ist die Nuselt-Zahl eine Funktion von der Reynolds-Zahl und der Prandtl-Zahl, (nämlich $N_u = f(R_e, P_r)$), deshalb sollen die Nu- Zahl als der gesuchte, Re- und Pr- Zahl als der variierte Einflussfaktor bei dem

experimentellen Versuch betrachtet werden. Für je 10 Änderungen der Kenngröße Re und Pr müssen dann insgesamt 10^2 Versuche statt 10^6 Versuche für je 10 Änderungen der einzelnen physikalischen Größen durchgeführt werden. Das heißt, die nach den dimensionslosen Kenngrößen geplante Experimentkonzeption kann einerseits die Versuchsanzahl drastisch verringern und andererseits die sinnvolle Versuchsergebnisse bekommen. Der Grund dafür ist, dass die Kenngröße die Beeinflussung von einer Reihe physikalischer Einflussgrößen repräsentiert. Ein bestimmter Zustand einer Kenngröße kann durch verschiedene Kombinationen der betroffenen physikalischen Größen realisiert werden. Zum Beispiel: Die experimentellen Versuche haben gezeigt, dass die Nu-Zahl für die Wärmeübertragung mit forcierter Strömung in Rohr den Wert 142,5 beträgt, wenn die Pr-Zahl und Re-Zahl jeweils 0,7 und $6,56 \times 10^4$ beträgt. Die Bedingung für $Re = 6,56 \times 10^4$ kann aber durch die Kombination von verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten und inneren Durchmessern des Rohrs erreicht werden. Damit kann das Versuchsergebnis bei $Re = 6,56 \times 10^4$ und $Pr = 0,7$ als gültig für eine Serie von Kombination physikalischer und geometrischer Bedingungen angesehen werden.

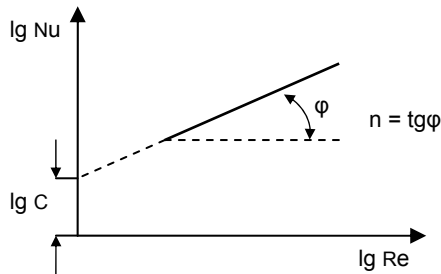
Die Ähnlichkeitstheorie hat zwar das Prinzip gezeigt, wie die Messdaten verarbeitet werden sollen, aber die Wahl der konkreten Funktionssätze sowie der charakteristischen Temperatur und Länge ist empirisch. Im Bereich konvektiver Wärmeübertragung wird die Exponentialfunktion der Erfahrung als empirische Funktion eingesetzt, wie zum Beispiel:

$$Nu = C Re^n \quad (6.6)$$

Wobei die Konstante C , m und n experimentell festgelegt werden. Der große Vorteil des Einsatzes der Exponentialfunktion liegt darin, dass die Exponentialfunktion im logarithmischen Koordinatensystem eine Gerade aufweist. Durch Logarithmieren ergibt sich die Gleichung 6.5:

$$\lg Nu = \lg C + n \lg Re \quad (6.7)$$

Die Konstante „ n “ ist im logarithmischen Koordinatensystem dann die Steigung der Gerade und „ $\lg Nu_0$ “ ist der Abschnitt auf der y - Achse bei $\lg Re_0 = 0$ (siehe Abbildung 6.1)

Abbildung 6.1 $Nu = C Re^n$ im logarithmischen Koordinatensystem

Die oben vorgestellte Methode, in der die Exponentialfunktion zur Beschreibung der Beziehung zwischen den Einflussfaktoren gewählt ist, wird auch Rayleigh-Methode genannt. Das wichtigste bei der Rayleigh-Methode ist, dass weder die Konvektion relevante Größen auszulassen noch irrelevanten Größen zu enthalten sind. Die mathematische Beschreibung der Abhängigkeit von Kenngrößen mit einer großen Anzahl von Messpunkten ist durch die Approximation der vorgegebenen Funktion der entsprechenden Kenngröße und die Bestimmung der freien Parameter zu ermitteln. Durch Verwendung des Gütekriteriums für die Approximation, wie z.B. die Methode der kleinsten Quadrate und die Minimierung der Varianz, kann eine optimierte Modellstruktur aufgestellt werden. Ausführliche Darstellungen über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate sind in [41] zu finden. Die Streuungen zwischen diskreten Messpunkten und der ermittelten Funktionssätzen können dabei auch unterschiedlich dargestellt werden.

6.2 Versuchsplanung und Versuchsaufbau

Das Beispiel im letzten Abschnitt hat verdeutlicht, dass bereits in der Planungsphase des Experiments der Umfang der Versuche und die spätere Datenverarbeitung berücksichtigt werden müssen. Eine nach dem π -Theorem erstellte, vollständige Versuchsplanung kann den zeitlichen und finanziellen Aufwand zur Durchführung der Experimente verringern und somit die Arbeit der Auswertung der Messdaten vergünstigen. Durch die Auswahl eines geeigneten Modells und durch entsprechende Experimente können die Beziehungen der ausgewählten Kenngrößen festgestellt werden.

6.2.1 Berechnung der Wärmeübertragung durch Kühlkörper

Das Ziel der durchzuführenden Experimente ist die Ermittlung einer empirischen Funktion zur Bestimmung des maximalen Wärmewiderstands des Kühlkörpers mit unterschiedlich platzierten Wärmequellen, durch diskrete Messdaten. Zur Erstellung der Versuchsplanung müssen vor allem die der physikalischen Erscheinung relevanten Parameter sowie die bei der Versuchsdurchführung zu messenden Größen, festgestellt werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind daher die von dem Wärmewiderstand des Kühlkörpers abhängigen Einflussgrößen und die zu messenden Temperaturen zu bestimmen, welche auf die generelle Definition des Wärmewiderstands in Gleichung 2.2 zurückzuführen sind. Laut Gleichung 2.2 stellt sich der Wärmewiderstand als das Hindernis des Wärmefflusses dar, dessen Wert sich auf bestimmte Temperaturdifferenzen bezieht.

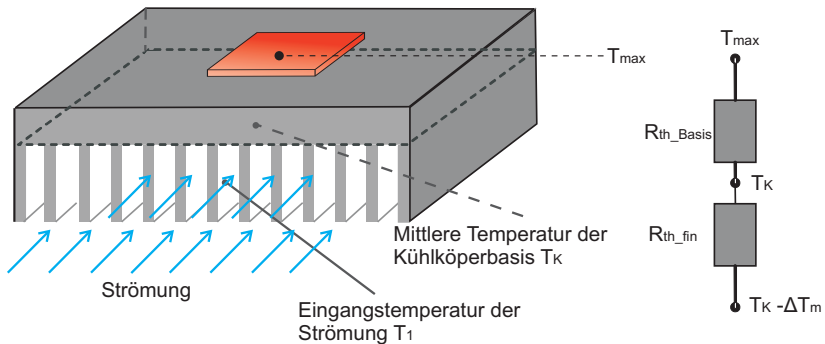


Abbildung 6.2 Bezugstemperaturen zur Bestimmung des Wärmewiderstands von Kühlkörper

Im Fall eines Kühlkörpers lässt sich der gesamte Wärmewiderstand durch die Serienschaltung von Wärmewiderstand der Basis und der Rippe berechnen:

$$R_{th_max} = R_{th_Basis} + R_{th_fin} \quad (6.8)$$

Dafür wird die maximale Temperatur an der Montagefläche, die mittlere Temperatur der Kühlkörperbasis T_k und die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz ΔT_m benötigt (siehe Abb.6.2). Es gilt folgende Beziehung:

$$R_{th_Basis} = \frac{T_{max} - T_K}{P_V} \quad (6.9)$$

$$R_{th_fin} = \frac{\Delta T_m}{P_V} \quad (6.10)$$

T_{max}	maximale Temperatur an der Montagefläche	[K]
ΔT_m	Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz	[K]
T_K	Mittlere Temperatur der Kühlkörperbasis	[K]

Die Ermittlung der in Abb. 6.2 dargestellten Bezugstemperatur basiert sich auf zwei Gleichungen, nämlich der Wärmetauschgleichung und der Gleichung der Energieerhaltung. Die Verlustwärme des am Kühlkörper montierten elektronischen Moduls, wird durch Konvektion an das strömende Medium übertragen. Die Gleichung des Wärmetauschs lautet:

$$Q = h_{eff} \cdot A_R \Delta T_m \eta_0 \quad (6.11)$$

h_{eff}	Wärmeübergangszahl	[w/m ² K]
A_R	Die gesamte an der Konvektion beteiligte Fläche	[m ²]
η_0	Der gesamte Wirkungsgrad des Kühlkörpers	

Die von der Strömung abtransportierte Wärme kann durch die Newton'sche Gleichung beschrieben werden.

$$Q = q_m c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (6.12)$$

q_m	Massegeschwindigkeit der Strömung	[kg/s]
c_p	Spezifische Wärmekapazität des Fluids	[J/kg K]
T_1	Eingangstemperatur der Strömung	[K]
T_2	Ausgangstemperatur der Strömung	[K]

Die durch den Kühlkörper in die Fluids übertragende Wärme soll die von Fluid abtransportierter Wärmemenge gleich sein. Es gilt dann:

$$h_{eff} \cdot A_R \Delta t_m \eta_0 = q_m c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (6.13)$$

Da das Kühlkörpermaterial (Cu oder Al) normalweiße eine hohe Wärmeleitfähigkeit besitzt, kann die Temperatur der Kühlkörperbasis nährungsweiße als Konstant betrachtet werden. (siehe Abbildung 6.3)

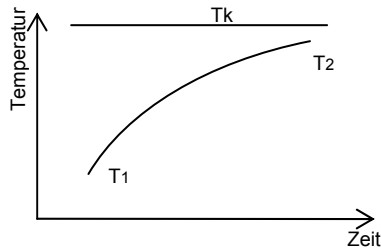


Abbildung 6.3 Temperaturverteilung der Kühlkörperbasis

In der Wärmeübertragungstheorie wird die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz bei Durchströmung wie folgt definiert:

$$\Delta t_m = \frac{(T_k - T_1) - (T_k - T_2)}{\ln[(T_k - T_1)/(T_k - T_2)]} \quad (6.14)$$

Setzt man Gleichung 6.14 in Gleichung 6.13 ein, dann gilt es:

$$\ln\left(\frac{T_k - T_1}{T_k - T_2}\right) = \frac{h_{\text{eff}} A_R \eta_0}{q_m c_p} = NTU \quad (6.15)$$

Wobei NTU die dimensionslose Übertragungsfähigkeit (Number of Transfer Unit) ist. Das Produkt $h_{\text{eff}} A_R \eta_0$ ist die von der Kühlkörperrippe abgeführte Wärme, bei einer durchschnitt logarithmischen Temperaturdifferenz von einem Grad. Das Produkt $q_m c_p$ ist die Wärmekapazität des Fluids. Aus obiger Gleichung ergibt sich:

$$e^{NTU} = \frac{T_k - T_1}{T_k - T_2} \quad (6.16)$$

Es kann die mittlere Temperatur der Kühlkörperbasis mit folgender Gleichung berechnet werden.

$$T_k = \frac{e^{NTU} \cdot T_2 - T_1}{e^{NTU} - 1} \quad (6.17)$$

Aus den Gleichungen 6.14 und 6.17 sind T_k bzw. ΔT_m , durch die Eingang- und Ausgangstemperatur der Strömung sowie die dimensionslose Übertragungsfähigkeit NTU, zu ermitteln. NTU ist eine Funktion der physikalischen Eigenschaften der Strömung, der Kühlbedingungen und der

Geometrie des Kühlkörpers. Daher sind die Temperaturen t_{max} , t_1 , und t_2 bei der späteren Versuchsdurchführung zu messen.

6.2.2 Messplanung nach π - Theorem

Die wichtigste Voraussetzung bei der Verwendung des π - Theorems ist, dass es weder die den Vorgang beeinflussenden Größen auslassen, noch irrelevante Größen enthalten soll. Nach Gleichung 6.9 und 6.10 lässt sich der Wärmewiderstand der Rippe ausdrücken als:

$$R_{th_fin} = \frac{1}{h_{eff} \cdot A_R \eta_0} \quad (6.18)$$

Damit ist R_{th_fin} von der Wärmeübergangszahl h_{eff} und der effektiven Kühlfläche der Rippe $\eta_0 A_R$ abhängig. R_{th_Basis} ist der Materialwärmewiderstand des Kühlkörpers bei verschiedenen Kontaktflächen der Wärmequelle. Um die Anzahl der relevanten Variablen zu begrenzen und somit auch eine realistische Versuchsplanung zu ermöglichen, wird die geometrische Gestaltung der Kontaktfläche und der Basisfläche des Kühlkörpers, wie in Kapitel 4, als quadratisch angenommen. Außerdem wird zuerst der thermische Widerstand des Kühlkörpers mit zentral gelegener Wärmequelle untersucht. Die Montagestelle der Wärmequelle wird dann durch Einführung des Einflussfaktors der Montagepositionen berücksichtigt. Damit ist der maximale Wärmewiderstand eines Kühlkörpers mit zentraler Wärmequelle eine Funktion von folgenden Parametern:

$$f(R_{th_max}, h_{eff}, \eta_0 A_R, \frac{\delta}{\lambda_k}, A_1, A_2) = 0 \quad (6.19)$$

Hierbei sind

η_0	Wirkungsgrad der Rippe	A_R	Gesamte Rippefläche
δ	Dicke der Kühlkörperbasis	$\eta_0 A_R$	Effektive Kühlfläche der Rippe
A_1	Kontaktfläche der Wärmequelle		
A_2	Fläche der Kühlkörpersubstrat		
h_{eff}	Effektive Wärmeübergangszahl der Rippe		
λ_k	Wärmeleitfähigkeit des Kühlkörpermaterials		
$\frac{\delta}{\lambda_k}$	Materialwärmewiderstand der Kühlkörperbasis per Flächeneinheit		

Die Maßeinheiten der Parameter in Gleichung 6.19 lassen sich aus den vier Grundmaßeinheiten Länge, Zeit, Temperatur und Masse zusammensetzen. Die Parameter $\frac{\delta}{\lambda_k}$ und A_2 sind voneinander unabhängig und die Maßeinheiten der vier Grundgrößen sind auch in diesen zwei gewählten Größen enthalten. Durch Kombination der Maßeinheiten von den zwei ausgewählten Parametern mit den jeweiligen Maßeinheiten der restlichen drei Parameter in Gleichung 6.3, sowie mit der Berücksichtigung, dass der Parameter A_1/A_2 dimensionslos ist, entstehen dann drei dimensionslose Größen π_1 , π_2 und π_3 :

$$\Pi_1 = R_{th_max} \cdot \frac{\delta}{\lambda_k}^{\alpha_{11}} \cdot A_2^{\alpha_{12}}$$

$$\Pi_2 = h_{eff} \eta_0 A_R \cdot \frac{\delta}{\lambda_k}^{\alpha_{21}} \cdot A_2^{\alpha_{22}}$$

$$\Pi_3 = A_1 \cdot \frac{\delta}{\lambda_k}^{\alpha_{31}} \cdot A_2^{\alpha_{32}}$$

Durch Verwendung der in Abschnitt 6.1.2 vorgestellten Verfahren können die drei dimensionslosen Größen ermittelt werden:

$$\Pi_1 = R_{th_max} \cdot \frac{\lambda_k \cdot A_2}{\delta}$$

$$\Pi_2 = \frac{h_{eff} \cdot \eta_0 A_R \delta}{\lambda_k \cdot A_2}$$

$$\Pi_3 = \frac{A_1}{A_2}$$

Gleichung 6.18 kann umgestellt werden nach:

$$f\left(R_{th_max} \cdot \frac{\lambda_k \cdot A_2}{\delta}, \frac{h_{eff} \cdot \eta_0 A_R \delta}{\lambda_k \cdot A_2}, \frac{A_1}{A_2}\right) = 0 \quad (6.20)$$

oder:

$$R_{th_max} \cdot \frac{\lambda_k \cdot A_2}{\delta} = f\left(\frac{h_{eff} \cdot \eta_0 A_R \delta}{\lambda_k \cdot A_2}, \frac{A_1}{A_2}\right) \quad (6.21)$$

Der erste Parameter in Gleichung 6.20 ist der normierte Maximalwärmewiderstand, der zweite und der letzte sind jeweils die effektive

Biot-Zahl Bi_{eff} und die dimensionslose Kontaktfläche $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \phi$, welche in der analytischen Lösung in Kapitel 4 bereits angesprochen ist. Nach Gleichung 6.21 kann man nun eine vollständige Versuchsplanung erstellen. Da der maximale Wärmewiderstand die gesuchte Größe ist, wird der Parameter $R_{th_max} \cdot \frac{\lambda_k \cdot A_2}{\delta}$ als unabhängige Variable, die effektive Biot-Zahl und die dimensionslose Kontaktfläche $\frac{A_1}{A_2}$ als abhängige Variable gewählt. Tabelle 6.2 zeigt, dass man für z.B. je vier Niveaus (es liegt keine Linearität vor) der zwei abhängigen Variablen nach Gleichung 6.5 insgesamt

$$n = \prod_{m=1}^2 4_m = 4 \times 4 = 16$$

Versuche benötigt, um eine vollständige Versuchsplanung zu entwerfen. Die Werte Y_{11} bis Y_{44} können durch die Messergebnisse und die Materialeigenschaften des Kühlkörpers berechnen.

	Bi_{eff1}	Bi_{eff2}	Bi_{eff3}	Bi_{eff4}
Φ_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}
Φ_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}
Φ_3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}
Φ_4	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}

Tabelle 6.2 Die vollständige Versuchsplanung

6.2.3 Versuchsaufbau und Temperaturmessung

Zur Ermittlung der empirischen Funktion des thermischen Widerstands wurden Temperaturmessungen des Kühlkörpers durchgeführt. Es wurden die katalogisierten Kühlsysteme QLS200.18, QLS200.25 sowie RLS200.18 und RLS200.25 von AUSTERLITZ untersucht. Die Systeme QLS 200.18 und RLS 200.18 bestehen aus einem katalogisierten Kühlkörper KS200.18 und jeweils einem Querstromlüfter und Radialstromlüfter. Bei den Systemen QLS200.25 und RLS200.25 ist der jeweilige Kühlkörper durch KS200.25 ersetzt. Damit sind vier verschiedene Biot- Zahl durch die Kombinationen von den Kühlkörpern und den Lüftern möglich. Als Wärmequelle wurden Leistungswiderstände mit einer Nennverlustleistung bis zu je 200 Watt und dem Widerstandwert von vier Ohm

verwendet, welche zuerst auf eine 5mm dicke Kupferplatte zur Realisierung gleichmäßig verteilter Verlustleitung und dann auf der Oberfläche der Kühlkörperbasis montiert werden. Durch Serien- und Parallelschaltung mit einer unterschiedlichen Anzahl von Leistungswiderständen können verschiedene Verlustleistungen und Kontaktflächen realisiert werden. Hierbei wurden zwei Kühlkörpergeometrien bei zwei unterschiedlichen, erzwungenen Konvektionen untersucht. In Bild 6.4 ist der Aufbau des Kühlsystems dargestellt. Zu erkennen sind der Kühlkörper KS200.18 mit Querstromlüfter und die auf der Kühlkörperoberfläche montierte Wärmequelle, die durch Reihenschaltung von neun Leistungswiderständen entstanden ist. Der thermische Übergangswiderstand zwischen Wärmequelle und Kühlkörper ist zwar stark von dem ausgeübten Druck abhängig, aber die maximale Temperatur des Kühlkörpers wird davon nicht beeinflusst, sobald alle Verlustwärme durch Kontaktierung in den Kühlkörper geleitet wird. Daher wurde die Kupferplatte der Wärmequelle direkt auf die Kühlkörperoberfläche gesetzt. Zur Verbesserung der Kontaktierung wurde Wärmeleitpaste verwendet. Die Temperaturwerte wurden durch Kontaktierung der Montagefläche an der gewünschten Stelle und Berührung der durchfließenden Strömung von Thermoelement ermittelt.

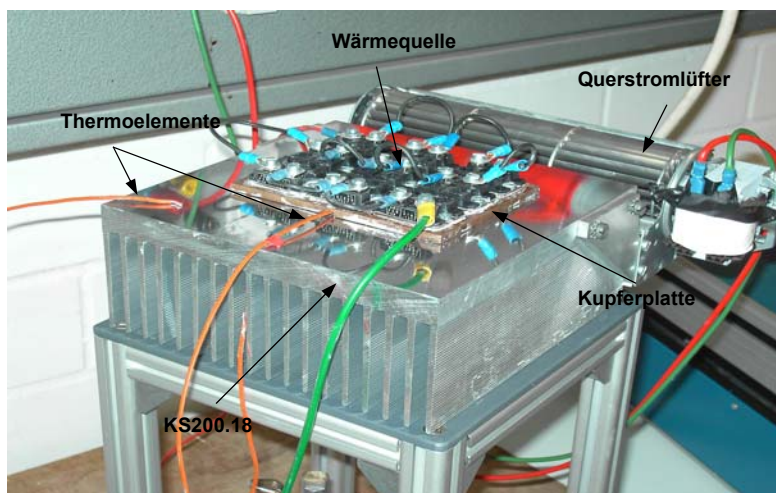


Abbildung 6.4 Versuchsaufbau des Kühlsystems

Hierzu wurden Kabel-Thermoelemente des Typs J aus Eisen/ Kupfer-Nickel verwendet, deren Temperaturbereich und Genauigkeit nach DIN EN60584 jeweils mit 0~750°C und der Klasse A spezifiziert ist. Um die höchste

Genauigkeit erhalten zu können, wird eine optimale Kontaktierung der Messfläche durch das Thermoelement vorausgesetzt. Besonders schwierig ist die Messung der maximalen Temperatur des Kühlkörpers am Mittelpunkt, der sich direkt unter der Kupferplatte befindet. Dazu wird ein 3mm x 4mm Kanal auf einer Seite der Kupferplatte gefräst (Bild 6.5), damit das Thermoelement bis zum Mittelpunkt des Kühlkörpers gebracht werden kann.

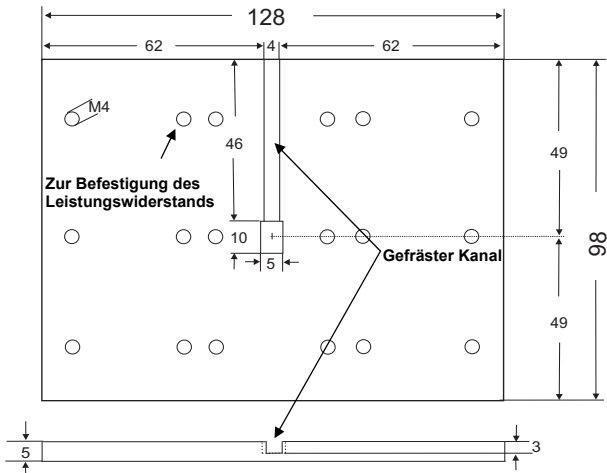


Bild 6.5: Die Kupferplatte mit gefrästem Kanal zur Befestigung der Wärmequelle



Bild 6.6: Messstand für die Temperaturmessung des Kühlsystems

Der Messstand für die Temperaturmessung des Kühlsystems ist in Bild 6.6 dargestellt. Im rechten Bild ist das Steuergerät für die Wärmequelle zu sehen. Der Kühlkörper mit Lüfter wird auf einen 50cm hohen Stützstand gebracht, so dass das Thermoelement von unten in den Kühlrippenzwischenraum eingesteckt und dort befestigt werden kann. Für die Datenerfassung wurde ein Agilent/34980A Multifunktionsmessgeräte verwendet. Die Messgenauigkeit des Messgerätes beträgt laut der Spezifikation $1^0C \pm$. Der gesamte Messfehler bei der Temperaturmessung mit dem Thermoelement ist aber auch von der Kontaktierung durch das Thermoelement sowie der Auswahl der Referenztemperatur abhängig. Mit diesem Messaufbau wurde die maximale Temperatur des Kühlkörpers T_{\max} und die Eingangs- und Ausgangstemperaturen der Strömung T_{ein} und T_{aus} gemessen, woraus der maximale thermische Widerstand direkt ermittelt werden kann. Hierbei wurde vorausgesetzt, dass die Wärme, die von den Leistungswiderständen erzeugt werden, in den Kühlkörper eingeführt und schließlich durch erzwungene Konvektion an der Rippe abtransportiert wird. Die Verlustwärme durch Strahlung und Konvektion an die restlichen Flächen wird nicht berücksichtigt. Die maximale Temperatur der Kupferplatte wurde auch gemessen, um zu überwachen, dass die maximal erlaubte Temperatur des Leistungswiderstands nicht überschritten wird. Da der stationäre thermische Widerstand zu untersuchen ist, soll bei der Versuchsführung so lange gewartet werden, bis das System den stationären Zustand erreicht. Die Zeitkonstante des Kühlsystems beträgt etwa 20 Minuten.

6.3 Messdatenbearbeitung mit Approximationsverfahren

6.3.1 Approximation von Messdaten

Die Zielsetzung der Messdatenbearbeitung ist, ein problemangepasstes optimiertes Funktionssystem für die Modellierung direkt aus den Messdaten zu gewinnen. Die ermittelten Messwerte werden mit Hilfe vorgegebener Funktionen der entsprechenden Einflussfaktoren durch Bestimmung freier Parameter approximiert. Der Approximationsansatz lautet

$$y_i \cong f(a_1, \dots, a_k, x_{i1}, \dots, x_{im}) = F_i \quad (6.6)$$

für alle Messwerte $i=1 \dots n$, wobei x_1, \dots, x_m die Einflussfaktoren und a_1, \dots, a_k die zu bestimmenden Parameter sind. Im Allgemeinen wird die Minimierung der

quadratischen Norm des Beschreibungsfehlers zur Bestimmung der Parameter a_1, \dots, a_k gefordert:

$$\|Y - F\|^2 \Rightarrow \text{Min}$$

In den meisten technischen Systemen ist dies gleichbedeutend mit der Minimierung der Varianz:

$$M = \sum_{i=1}^n \chi_i (y_i - F_i)^2 \Rightarrow \text{Min} \quad (6.7)$$

Der Faktor χ_i ist ein nicht negativer Wichtungsfaktor und berücksichtigt die unterschiedlichen Streuungen der Messwerte für verschiedene Messbedingungen. Die Minimierung der Gleichung 6.5 ist auf die Ermittlung des Minimums der Funktion $M(a_1, \dots, a_k)$ zurückzuführen, welche durch Differenzieren der Funktion M nach den zu bestimmenden Parametern a_1, \dots, a_k erhalten werden kann. Damit kann das Problem durch das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \chi_i (y_i - F_i) \frac{\partial F_i}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \chi_i (y_i - F_i) \frac{\partial F_i}{\partial a_k} = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

dargestellt werden. Zur Lösung des Gleichungssystems 6.8 wird die Vorgabe des analytischen Ausdrucks von der Funktion F in der Gleichung 6.6 benötigt. Daher werden die Entwicklungsfunktionen zur Approximation der Messdaten in Abhängigkeit von der Aufgabenstellung ausgewählt, sofern sie nicht aus vorherigen analytischen Untersuchungen des physikalischen Prozesses hervorgegangen sind. Bei der Auswahl des Funktionssatzes sind im Wesentlichen folgende Gesichtspunkte zu betrachten:

- Ähnliche Eigenschaften der Funktionen in bestimmten Bereichen der Funktionsargumente
- Einfache Berechnungsmöglichkeiten der Funktionswerte
- Nutzung von bekannten Funktionssystemen bei Vorliegen spezieller Koordinatensysteme für die Einflussfaktoren
- Hohe Flexibilität des Funktionsansatzes bei der Variation weniger Parameter

In der Literatur [32] ist die Auswahl von den häufigsten verwendeten Funktionsansätzen für die Approximation empirischer Daten in Form von Tabelle zusammengestellt.

Zur Überprüfung entwickelter Modelle sind die Beurteilungskriterien von statistischen Testmöglichkeiten für das ermittelte Modell, wie z.B. die Varianzanalyse anzuwenden. Hierbei sei der F- Test nach Ronald Fisher als bezugnehmende Methode genommen. Sind δ_1^2 und δ_2^2 jeweils die Varianz des Messfehlers und der mittlere Wert der quadratischen Abweichung des Modells von den Messwerten, bildet sich der F- Wert

$$F = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \quad (6.9)$$

Der ermittelte F-Wert in Gleichung 6.9 wird zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau ε , welches in den technischen Anwendungen mit 95% und 99% anzuweisen sind, mit dem theoretischen Wert der Fisher-Verteilung „ $F_{1-\varepsilon, (n-k, n(r-1))}$ “ verglichen. Ist z.B. 99% als Signifikanzniveau gewählt, wäre das Modell mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $1-\varepsilon=1\%$ für den Fall, dass $F > F_{1-\varepsilon, (n-k, n(r-1))}$ ist, abgelehnt worden. Das Verfahren zur Ermittlung des F-Wertes eines Modells, sowie die Bedeutungen der verwendeten Größe n, r und k in der Fisher-Verteilung sind in Anhang 8.3 beigefügt und erklärt.

6.3.2 Optimiertes Funktionssystem zur Beschreibung des thermischen Widerstandes des Kühlkörpers

Wie bereits bei der Aufstellung der Gleichung 6.8 erläutert, kann ohne weitere Informationen und Vorgaben zur Behandlung der Modellierungsaufgabe das mathematische Modell nicht durch Stichprobmessungen ermittelt werden. Daher ist es erforderlich, eine neue Methodik zu schaffen, mit deren Hilfe ein problemangepasstes optimiertes Funktionssystem zur Beschreibung des technischen Verhaltens aus diskreten Messdaten bestimmt werden kann. Damit soll man in der Lage sein, die innere Struktur des Messdatensatzes aufzudecken und ihn auf lineare Vektorfunktionen zurückzuführen. Die Herleitung zur Bestimmung eines optimierten Funktionssystems ist in Anhang 8.4 zu finden. In diesem Abschnitt wird die mathematische Beziehung zur Beschreibung des maximalen thermischen Widerstands, anhand der beschriebenen Approximationsmethode in Anhang 8.4, aus diskreten Messdaten entwickelt.

Aus dem π - Theorem der Dimensionsanalyse und der vorgestellten Versuchsplanung in Abschnitt 6.2 liegen nach der Versuchsdurchführung die

Messergebnisse einer vollständigen Versuchsplanung vor. Mit der Verwendung der Parameter in Gleichung 6.21 können die Messergebnisse

$$\psi_z = R_{th_max} \cdot \frac{\lambda_k \cdot A_2}{\delta} \text{ und die zwei variierten Einflussfaktoren } Bi_{eff} = \frac{h_{eff} \cdot \eta_0 \cdot A_R \delta}{\lambda_k \cdot A_2} \text{ und}$$

$\phi = \frac{A_1}{A_2}$ in folgender tabellarischen Form zusammengefasst werden.

	Bi_{eff1}	Bi_{eff2}	Bi_{eff3}	Bi_{eff4}
Φ_1	Ψ_{z11}	Ψ_{z12}	Ψ_{z13}	Ψ_{z14}
Φ_2	Ψ_{z21}	Ψ_{z22}	Ψ_{z23}	Ψ_{z24}
Φ_3	Ψ_{z31}	Ψ_{z32}	Ψ_{z33}	Ψ_{z34}
Φ_4	Ψ_{z41}	Ψ_{z42}	Ψ_{z43}	Ψ_{z44}

Aus den Messergebnissen und den Versuchsbedingungen ergibt sich folgende Tabelle sowie grafische Darstellung:

$\phi \backslash Bi_{eff}$	0,032	0,042	0,055	0,079
1,0000	29,091	23,273	17,500	12,606
0,3125	31,343	23,839	18,617	15,472
0,1500	35,211	29,696	24,149	21,596
0,0825	43,731	39,611	31,683	30,746

Tabelle 6.3 Die Messergebnisse der vollständigen Versuchsplanung

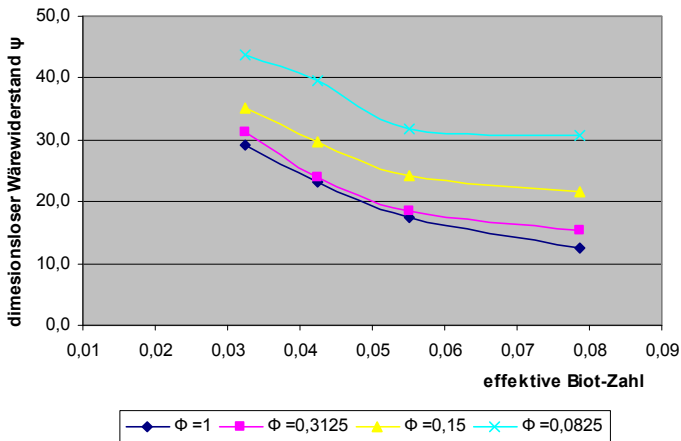


Abbildung 6.7 Grafische Darstellung der Messergebnisse

Mit der Überlegung der Ähnlichkeiten der Spalten und Zeilen in Tabelle 6.3, die aus dem determinierten Zusammenhang zwischen der Zielgröße und den Einflussfaktor resultieren, kann folgender Ansatz für die Modellstruktur gewählt werden:

$$\underline{\psi}_{ij} \approx a_i \cdot c_j \quad \text{und} \quad \underline{\psi}_z \approx \underline{A} \cdot \underline{C}^T \quad (6.10)$$

Laut der Approximationsmethode im Anhang 8.4 lässt sich der Messdatensatz $\underline{\psi}$ durch die Summe dyadischer Produkte vollständig beschreiben

$$\underline{\psi}_z = \sum_{v=1}^r \sqrt{\lambda_v} \cdot \underline{A}_v(\phi) \cdot \underline{C}_v(Bi_{eff})^T \quad (6.11)$$

mit $r = \min(i, j)$. Wobei λ_v , $\underline{A}_v(\phi)$ und $\underline{C}_v(Bi_{eff})$ jeweils der Eigenwert und die nach der euklidischen Norm normierten Eigenvektoren des dementsprechenden Eigenwert-problems sind. Das hierzu notwendige Eigenwertproblem zur Lösung für $\underline{A}_v(\phi)$ lautet:

$$\lambda \underline{A} = \underline{\psi}_z \cdot \underline{\psi}_z^T \cdot \underline{A}$$

mit

$$\underline{\psi}_z \cdot \underline{\psi}_z^T = \begin{bmatrix} 18531 & 19874 & 24103 & 31361 \\ 19874 & 21367 & 25953 & 33805 \\ 24103 & 25953 & 31712 & 41452 \\ 31361 & 33805 & 41452 & 54306 \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte λ_v und den dementsprechenden Eigenvektoren \underline{A}_v kann man entweder die charakteristische Gleichung aus der Bedingung $(\lambda \underline{E} - \underline{\psi}_z \cdot \underline{\psi}_z^T) \cdot \underline{A} = 0$ ermitteln, oder mit Hilfe von MATLAB direkt erhalten. Die Eigenwerte und Eigenvektoren lauten:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 12547 \\ \underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,3825 \\ 0,4117 \\ 0,5027 \\ 0,6569 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_2 = 43 \\ \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,6309 \\ 0,4735 \\ -0,0697 \\ -0,6107 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_3 = 2,14 \\ \underline{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,6739 \\ -0,6976 \\ -0,1695 \\ 0,1746 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_4 = 0,067 \\ \underline{A}_4 = \begin{bmatrix} -0,0403 \\ -0,3459 \\ 0,8448 \\ -0,4063 \end{bmatrix} \end{array}$$

Der normierte Eigenvektor \underline{C}_v ist durch das Eigenwertproblem

$$\lambda \underline{C} = \underline{\psi}_z^T \cdot \underline{\psi}_z \cdot \underline{C}$$

$$(\lambda E - \underline{\psi}_z^T \cdot \underline{\psi}_z) \cdot \underline{C} = 0$$

zu ermitteln, wobei die Eigenwerte λ_v aufgrund der Eigenschaften der dyadischen Produkte der Matrix $\underline{\psi}$, mit der transformierten Matrix $\underline{\psi}^T$, gleich wie die bei der Ermittlung von \underline{A}_v bleiben. Die Eigenvektoren \underline{C}_v ergeben sich dann zu:

$$\underline{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.6290 \\ 0.5327 \\ 0.4224 \\ 0.3771 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.6169 \\ -0.0442 \\ -0.1798 \\ -0.7650 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_3 = \begin{bmatrix} 0.4669 \\ -0.7292 \\ -0.1892 \\ 0.4631 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_4 = \begin{bmatrix} 0.0765 \\ 0.4273 \\ -0.8680 \\ 0.2410 \end{bmatrix}$$

Der Datensatz für den dimensionslosen Wärmewiderstand kann dann nach Gleichung 6.11 durch die Reihenentwicklung

$$\underline{\psi}_z = \sum_{v=1}^4 \sqrt{\lambda_v} \cdot \underline{A}_v \cdot \underline{C}_v^T = \sqrt{\lambda_1} \cdot \underline{A}_1 \cdot \underline{C}_1^T + \sqrt{\lambda_2} \cdot \underline{A}_2 \cdot \underline{C}_2^T + \sqrt{\lambda_3} \cdot \underline{A}_3 \cdot \underline{C}_3^T + \sqrt{\lambda_4} \cdot \underline{A}_4 \cdot \underline{C}_4^T \quad (6.12)$$

$$= 112,13 \cdot \underline{A}_1 \cdot \underline{C}_1^T + 6,56 \cdot \underline{A}_2 \cdot \underline{C}_2^T + 1,46 \cdot \underline{A}_3 \cdot \underline{C}_3^T + 0,26 \cdot \underline{A}_4 \cdot \underline{C}_4^T$$

vollständig beschrieben werden. Der mittlere quadratische Restfehler der Approximation ist mit folgender Formel zu ermitteln:

$$\overline{\Delta \psi_z^2} = \frac{1}{i \cdot j} \sum \sum (\psi_{ij} - \sum_{v=1}^k \frac{\lambda_v}{i \cdot j})^2 = E[Y^2] - \sum_{v=1}^k \frac{\lambda_v}{i \cdot j} \quad (6.13)$$

wenn die Reihenentwicklung nach dem k-ten Summanden abgebrochen wird. Wird der dimensionslose Wärmewiderstand $\underline{\psi}$ nur durch den ersten und zweiten Summanden der Reihenentwicklung 6.12 dargestellt, so beträgt die Standardabweichung des Restfehlers:

$$\overline{\Delta \psi_z^2} = E[Y^2] - \sum_{v=1}^2 \frac{\lambda_v}{4 \cdot 4} = 787 - 12590/16 = \underline{\underline{0,09}}$$

d.h. die wesentlichen Informationen über den dimensionslosen Wärmewiderstand sind in den ersten und zweiten Summanden enthalten. Aus Gleichung 6.13 kann das Abbruchkriterium einer Reihenentwicklung genau definiert werden. Die Aussage des Abbruchkriteriums lässt sich durch die Anwendung des F- Tests nach Fischer treffen. Der entsprechende F- Wert ergibt sich zu:

$$F = \frac{s^2}{\delta_1^2} \quad (6.14)$$

wobei $s^2 = \frac{r}{r-k} (E[Y^2] - \sum_{v=1}^k \frac{\lambda_v}{i \cdot j})$ und δ_1^2 die Varianz des Messfehlers sind. Der F-Wert aus Gleichung 6.14 wird mit dem Wert $F_{T(m(n-k), \infty, \alpha)}$ von der Fisher-Verteilung verglichen. Ist $F \geq F_{T(m(n-k), \infty, \alpha)}$, so trifft die Aussage zu, dass die Entwicklung mit der Sicherheit von $(1-\alpha) \cdot 100\%$ zu früh abgebrochen wurde.

6.3.3 Darstellung der Mathematischen Beziehung

Im letzten Abschnitt ist die Methode vorgestellt, den Modellansatz durch Linearkombinationen einzelner Einflussfaktoren mit Hilfe der diskreten Messdaten darzustellen. Eine Möglichkeit zur Beschreibung des inneren Zusammenhangs ist in Gleichung 6.12 angegeben. Der dimensionslose Wärmewiderstand eines Kühlkörpers ψ kann somit mit der Linearkombination der Einflussfaktoren $\underline{A}_v(\phi)$ und $\underline{C}_v(Bi_{eff})$ dargestellt werden:

$$\underline{\psi}_z = 112,13 \cdot A_1(\phi) \cdot C_1^T(Bi_{eff}) + 6,56 \cdot A_2(\phi) \cdot C_2^T(Bi_{eff}) \quad (6.15)$$

Um die Zwischenwerte weiterhin bestimmen zu können, ist der konkrete analytische Ausdruck notwendig. Dies ist durch weitere Approximation und Interpolation zu erreichen. Da die Funktionen $\underline{A}_v(\phi)$ und $\underline{C}_v(Bi_{eff})$ in Gleichung 6.15 eindimensional sind, sind die Interpolationen der Funktion $\underline{A}_v(\phi)$ und $\underline{C}_v(Bi_{eff})$ wesentlich einfacher als im mehrdimensionalen Fall. Die Auswahl von Interpolationsverfahren ist je nach der Darstellung der Kennlinie und der Anzahl der Messpunkte zu treffen. Das Grundprinzip der Interpolation ist die Darstellung der punktwise ermittelten Daten durch Linearkombination der Polynome mit z.B. Lagrange- Verfahren, Newton- Verfahren und der Anwendung der Spline-Funktion. Die Interpolation wird ausführlich in [35], [36] beschrieben.

Vor allem ist die Kennlinien $\underline{A}_v \rightarrow \phi$ und $\underline{C}_v \rightarrow Bi_{eff}$ zu erstellen. Daher werden die Daten von Φ und ermittelten \underline{A}_v sowie Bi_{eff} und \underline{C}_v jeweils in eine Abbildung eingetragen.

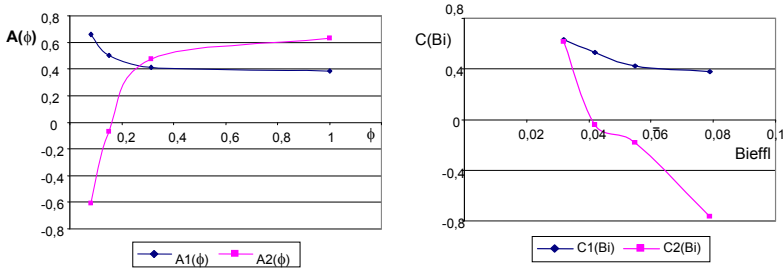


Abbildung 6.8 Verläufe der Einflussfaktoren von Φ und Bi_{eff} bezüglich des dimensionslosen Wärmewiderstands

Die von der dimensionslosen Kontaktfläche abhängige Funktion $A_1(\phi)$ und $A_2(\phi)$ im Bild 6.8 sind mit Newtonschen Verfahren zu interpolieren.

Φ	$A_1(\Phi)$	Interpolation		
		1	2	3
1,0000	0,3825			
		-0,04		
0,3125	0,4117		0,61	
		-0,56		-7,51
0,1500	0,5027		7,5	
		-2,28		
0,0825	0,6569			

Tabelle 6.4 Interpolation der Funktion $A_1(\Phi)$ mit der Newtonschen Methode

Tabelle 6.4 zeigt die newtonsche Methode der Interpolation mit vier Stützpunkten. Die Werte in den Spalten „Interpolation“ sind mit folgender Formel zu ermitteln:

$$\frac{A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_k) - A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_k, \phi_{k+1})}{\phi_0 - \phi_{k+1}} \tag{6.16}$$

mit
$$A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_k) = \frac{A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_{k-1}) - A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_{k-1}, \phi_k)}{\phi_0 - \phi_k} \tag{6.17}$$

Das k-te newtonsche Polynom kann dann angegeben werden durch:

$$N_k(\phi) = A_1(\phi_0) + \sum_{n=1}^k (\phi - \phi_0) \dots (\phi - \phi_{k-1}) A_1(\phi_0, \phi_1 \dots \phi_{k-1}, \phi_k) \tag{6.18}$$

Nach drei Interpolationen kann das Interpolationspolynom dritter Ordnung für die Approximation der Entwicklungsfunktion $A_1(\Phi)$ ermittelt werden:

$$A_1(\phi) = N_3(\phi) = 0,66 - (\phi - 0,0825) \cdot 2,28 + (\phi - 0,0825) \cdot (\phi - 0,15) \cdot 7,5 - (\phi - 0,0825)(\phi - 0,15)(\phi - 0,3125) \cdot 7,15 \quad (6.19)$$

Der Fehler des Interpolationspolynoms ist mit folgendem Polynom zu berechnen:

$$|e(\phi)| \leq \frac{M_n}{n+1} \prod_{i=0}^n (\phi - \phi_i), \quad (6.20)$$

wobei $M_n = \max(f^{n+1}(\zeta))$ mit $\zeta \in [\phi_0, \phi_n]$.

Analog können die Entwicklungsfunktionen $A_2(\Phi)$ und $C_1(\Phi)$ auch mit der Newtonschen Methode approximiert werden. Die Einflussfunktion $C_2(\Phi)$ lässt sich hingegen durch eine kubische Splineinterpolation bestimmen. Durch Einsatz der Einflussfunktionen in die Gleichung 6.15 ergibt sich somit die optimierte Konstruktion zur Beschreibung der Beziehung zwischen dem dimensionslosen Wärmewiderstand, der dimensionslosen Kontaktfläche und der effektiven Biot-Zahl.

Der dimensionslose Wärmewiderstand in Gleichung 6.15 ist eine normierte Größe, wobei $\frac{\delta}{\lambda_k \cdot A_2}$ als Bezugswert genommen wird. Dieser Bezugswert wird als Materialwärmewiderstand der Kühlkörperbasis bezeichnet und er ist dann eine Konstante, sobald ein bestimmter Kühlkörper ausgewählt worden ist. Mit der Bezeichnung $\frac{\delta}{\lambda_k \cdot A_2} = R_{th_M}$ ergibt sich der maximale Wärmewiderstand des Kühlkörpers:

$$R_{th_max} = R_{th_M} \lambda_1 \cdot A_1(\phi) \cdot C_1(Bi_{eff}) + R_{th_M} \lambda_2 \cdot A_2(\phi) \cdot C_2(Bi_{eff}) \quad (6.21)$$

6.3.4 Wärmewiderstand der Montagestelle

Die bisher ermittelte Entwicklungsfunktion des Wärmewiderstands hat die Voraussetzung, dass die Wärmequelle sich zentral auf der Basisoberfläche des Kühlkörpers befindet. Ein besonderes Problem bei der Kühlung mit Kühlkörper ist die Ermittlung des thermischen Widerstands des Kühlkörpers mit Berücksichtigung der Montagestelle. Grundsätzlich ist der thermische Widerstand der Montagestelle eine Funktion der gleichen Parameter wie bei der zentral

gelegenen Quelle, mit dem zusätzlichen Parameter der Position. Mit dieser Überlegung lässt sich der dimensionslose Wärmewiderstand der Montagestelle darstellen:

$$\psi_p = f(\psi_z, x, y) \quad (6.22)$$

ψ_z : Dimensionsloser Wärmewiderstand mit zentral gelegener Wärmequelle
 ψ_p : Dimensionsloser Wärmewiderstand der Montagestelle unter gleichen Versuchsbedingungen von ψ_z

x, y : x- und y-Koordinate des Mittelpunkts der Wärmequelle, bezogen auf den Mittelpunkt der Kühlkörperoberfläche von (0,0).

Die x- und y- Werte unterscheiden sich, je nachdem in welcher Position sich die Wärmequelle aus dem Ursprung befindet. Wie in Abbildung 6.9 dargestellt wird der x- Wert als negativ bezeichnet (P_1, P_2), wenn die Montagepositionen sich auf der Seite des Lüfters befinden, während die Positionen auf der anderen Seite des Lüfters mit positiven x- Werten (P_3, P_4) bezeichnet werden.

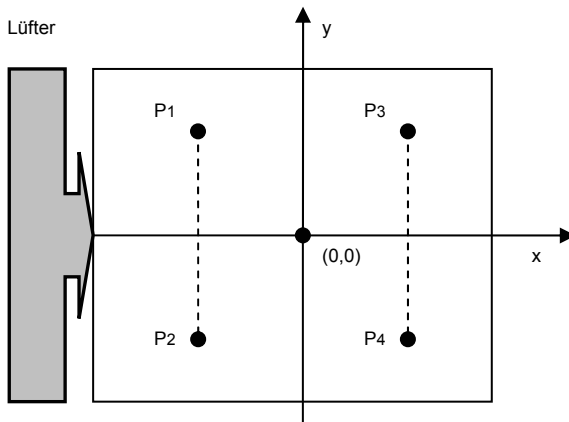


Abbildung 6.9: Montagepositionen im Bezug auf Ursprung und Lüfter

Ist die X- Koordinate fest, so weisen die Punkte mit entgegengesetzter y-Koordinate aufgrund der Symmetrie das gleiche thermische Verhalten auf (z.B. P_1 und P_2 sowie P_3 und P_4). Mit der weiteren Überlegung, dass die Anzahl der Einflussfaktoren möglichst gering sein soll und damit die spätere numerische Datenbearbeitung erleichtert werden kann, sind die Temperaturentfernung zu vernachlässigen, wenn die Wärmequelle sich an unterschiedlichen Stellen auf

Linien $x = \text{konstant}$ (z.B. Linie P_1P_2) befindet. Die dadurch entstehenden Abweichungen weisen dann darauf hin, dass die Wärmequelle im Vergleich zum Kühlkörper sehr klein ist und weiter von dem Kühlkörpermittelpunkt entfernt ist. Daher wird bei weiteren Untersuchungen der Einfluss der y - Koordinate nicht berücksichtigt. Die Gleichung 6.22 vereinfacht sich zu:

$$\psi_p = f(\psi_z, x) \quad (6.23)$$

Mit dem in Abschnitt 6.3.2 vorgestellten Verfahren kann ein optimiertes Funktionssystem aus empirischen Daten bestimmt werden. Daher sind wieder die Experimente nach der statistischen Versuchsplanung durchzuführen. Es liegen schließlich folgende Messergebnisse vor:

	$X_1(mm)$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
	-103	-77	-44	0	50	66	78	103
$\psi_{z1}=31,68$	46,56	35,93	30,18	31,68	35,01	40,50	44,09	55,54
$\psi_{z2}=43,73$	62,84	49,27	44,05	43,73	48,33	54,84	57,64	75,15

Tabelle 6.5 Messergebnisse der thermischen Wärmewiderständen der Montagestelle

Um die numerische Auswertbarkeit zu erleichtern, werden nur zwei Stufen von ψ_z berücksichtigt. Der dimensionslose Wärmewiderstand der Montagestelle kann dann durch die Reiheentwicklung

$$\psi_p = \sum_{v=1}^2 \sqrt{\lambda_v} \cdot A(\psi_z)_v \cdot C(x)_v^T \quad (6.24)$$

vollständig beschrieben werden. λ_v sind Eigenwerte, welche durch das Eigenwertproblem

$$\lambda \underline{A} = \underline{\psi}_p \cdot \underline{\psi}_p^T \cdot \underline{A} \quad (6.25)$$

zu ermitteln sind.

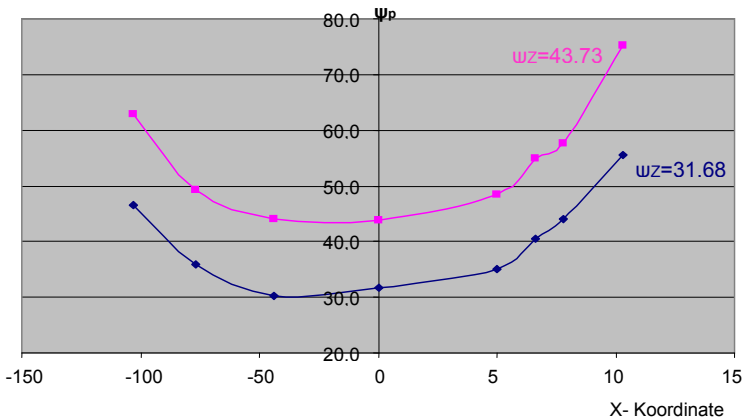


Abbildung 6.10: Abhängigkeit des dimensionslosen Wärmewiderstands der Montagestelle von Ψ_Z und der x- Koordinate der Montagestelle

An der Abbildung 6.10 kann man deutlich erkennen, dass der Mittelpunkt (0,0) nicht die günstigste Montagestelle für die Wärmequelle ist, da der Wärmewiderstand in diesem Fall nicht den kleinsten Wert aufweist. Es existiert eine optimierte Montagestelle für das Leistungsmodul.

6.4 Zusammenfassung

Die empirische Formel zur Berechnung des maximalen Wärmewiderstands eines Kühlkörpers wird durch die Modellierung mit verschiedenen Einflussgrößen unter Nutzung diskreter Messergebnisse gewonnen. Begonnen werden muss schon in der Phase der Versuchsvorbereitung den Experimentieraufwand zu verringern. Dafür bietet die Dimensionsanalyse die Möglichkeit, die Anzahl der Einflussgrößen durch deren Kombinationen zu verringern und somit ein einfaches quantitatives Modell zu bilden. Mit Hilfe einer nach Gesichtspunkten der vollständigen Versuchsplanung kann ein optimiertes Funktionssystem zur Beschreibung der inneren Modellstruktur aus den Daten selbst bestimmt werden. Die optimierte Modellierung bezieht sich auf eine Minimierung der Varianz der Resultate, wodurch die zufälligen Fehler untergedrückt werden können. Bei der Datenanalyse werden geeignete Basisfunktionen durch Vorgabe der Struktur des Zusammenhanges zwischen den Prozessparametern ausgewählt und anhand der vollständigen Versuchsplanung ermittelt. Das Modell der Wärmeübertragung

mit Kühlkörper lässt sich somit durch eine lineare Kombination von Basisfunktionen beschreiben, welche die gesuchten Entwicklungsfunktionen punktweise repräsentieren. Da die Basisfunktionen eindimensional sind, ist die Approximation der diskreten Messdaten zur Festlegung des Ausdrucks der Basisfunktionen wesentlich einfacher als bei mehreren Dimensionen. Die Methode der Approximation ist je nach den vorliegenden Messdaten auszuwählen. Die ermittelte empirische Formel für den maximalen Wärmewiderstand eines ausgewählten Kühlkörpers ist eine Funktion von zwei dimensionslosen Einflussfaktoren Φ und Bi_{eff} . Aufgrund der Eigenschaften der Approximation ist diese Entwicklungsfunktion nur in bestimmten Bereichen der Einflussfaktoren gültig, in denen die Versuche durchgeführt wurden. Um die Gültigkeit der empirischen Formel in die breiten Bänder der Einflussfaktoren ziehen zu können, sind noch mehrere Experimente mit z.B. extremer Konvektionsbedingung und geometrischen Verhältnisse durchzuführen. Der dimensionslose Wärme-widerstand der Montagegestelle Ψ_p ist eine Funktion von der Montageposition und dem dimensionslosen Wärmewiderstand Ψ_z bei zentraler Wärmequelle mit den gleichen geometrischen und konvektiven Bedingungen. Die Abhängigkeit von Ψ_z und x - Position ist wiederum durch die Entwicklungsfunktion des optimierten Funktions-satzes mit Anwendung der Approximation der Messdaten dargestellt.

Die in diesem Kapitel angewendete Methode ist ein Bestandteil der Forschung. Dimensionsanalyse, Versuchsplanung und Approximation von Messdaten mit optimiertem Funktionsansatz sind wirksame Hilfsmittel zur Erhaltung der Abhängigkeit von Komponenten eines technischen Modells. Sie bieten Verfahren, mit denen die innere Struktur eines technischen Systems durch Experimente gezeigt werden kann.

Kapitel 7

Abschlussdiskussion

Die Leistungselektronik ist heutzutage in vielen Bereichen weit verbreitet. Insbesondere in der elektrischen Energieversorgung und der Nutzung erneuerbarer Energie spielt sie eine gewichtige Rolle. Daher ist eine möglichst hohe thermische Belastbarkeit leistungselektronischer Geräte sicherzustellen, indem thermische Eigenschaften einzelner Leistungshalbleiter analysiert werden. Durch die thermische Analyse können die Betriebstemperaturen von Bauelementen und Modulen vorhergesagt werden, so dass eine effiziente Kühlung entworfen werden kann, um die leistungselektronische Anlage vor thermischem Versagen zu schützen.

In dieser Arbeit wurden zuerst die Temperaturabhängigkeit und die Möglichkeiten der Wärmeerzeugung von Leistungshalbleitern untersucht. Die analytische Ermittlung der Verlustleistung wurde am Beispiel eines IGBT- Wechselrichters durchgeführt. Es wurde auch gezeigt, dass nicht nur Temperaturerhöhung sondern auch die Temperaturschwankung die Lebensdauer von Leistungsmodul stark beeinflussen kann. Da die Temperaturschwankung bzw. die transiente Wärmeübertragung mit den Betriebsarten von den Leistungshalbleitern verbunden sind, ist die Bestimmung der Verlustleistung bei unterschiedlichen Betriebsarten des Powermoduls der erste Schritt der thermischen Analyse. Danach muss es den Auswahl von Kühlsystem getroffen werden, damit die entstehende Wärme rechtzeitig abgeführt werden. Aufgrund der Kosten und der Zuverlässigkeit des Kühlsystems sind luftgekühlte Kühlkörper eine häufig angewendete Technologie. Daher konzentriert sich diese Arbeit schwerpunktmäßig auf die Erfassung der Kenngröße R_{th} von Kühlkörpern mit der Wärmespreizung und unterschiedlich platzierter Wärmequelle.

Es wurde ein vereinfachtes zwei- dimensionales Wärmeübertragungsmodell für Kühlplatten mit zentral gelegter Wärmequelle entwickelt. Die analytische Lösung der Temperaturverteilung bzw. des Wärmewiderstands $R_{th,max}$ wurde in geschlossener Form angegeben. Der Vorteil dieses Modells ist, dass man anhand der vorhandenen Daten von Kühlkörperherstellern den auf der Maximaltemperatur bezogenen Spreizungswärmewiderstand des Kühlkörpers schnell ermitteln kann. Die wesentlichen Nachteile liegen an der Rechengenauigkeit und dem begrenzten Anwendungsbereich. Bei effizienteren Kühlungen (Wasserkühlung) kann der Berechnungsfehler mit dem vorgestellten

2D-Modell auf über 10% steigen. Außerdem ist das 2D-Modell für beliebig platzierte Wärmequellen nicht mehr anzuwenden, so dass eine präzise dreidimensionale Analyse der Wärmeübertragung notwendig ist. Mit Hilfe Green'scher Funktionen kann das stationäre Feld in einem geschlossenen Raum mit ungleichmäßig verteilter Quelle unter Berücksichtigung der Randbedingung und Anfangsbedingung analytisch ermittelt werden. Dabei wird der als Kühlplatte vereinfachte Kühlkörper als ein räumlich geschlossenes Gebiet betrachtet. Auf den 6 Randflächen des Gebiets sind unterschiedliche Randbedingungen zu definieren, wobei die Wärmequellen durch ihre Positionskordinaten und Flussdichten in den Randbedingungen zu repräsentieren sind. Die gesuchte Green'sche Funktion lässt sich einer entsprechenden Green'sche Funktion in freiem Raum und zugehörigen Randbedingung herleiten. Das ermittelte stationäre Temperaturfeld ist dann in Form einer Integralgleichung mathematisch angegeben.

Zur praktischen Anwendung ist aber diese analytische Lösung bei vielen komplexen Modellen nicht möglich oder ohne Bedeutung. Eine aussagefähige Modellierung der Verfahrenszusammenhänge aus empirischen Untersuchungsergebnissen ist die Extraktion von Basisfunktionen aus Experimenten zur Darstellung eines komplexen physikalischen Vorgangs. Es wurde in dieser Arbeit diese Methode auch verwendet, um den Wärmewiderstand des Kühlkörpers R_{th_max} direkt durch dimensionslose Kenngrößen und Messergebnisse zu erhalten. Mittels Ähnlichkeitstheorie und Dimensionsanalyse kann die Wärmeübertragung eines Kühlkörpers durch einige dimensionslose Kenngrößen, deren Anzahl im Vergleich zu den relevanten Einflussgrößen schon stark reduziert ist, beschrieben werden. Dabei kann der gesuchte Wärmewiderstand R_{th_max} als normierter Wärmewiderstand erhalten werden. Durch Ansatz des optimierten Funktionssystems sowie die Approximation von Messdaten ergibt sich der mathematische Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Kenngrößen in objektivierter Form.

Die Lebensdauer von Leistungsmodulen zu gewährleisten, ist heute ein integrierter Ansatz. Die höhere Belastbarkeit ist nicht mehr durch singuläre Ansätze wie z.B. allein durch Ansatz von hochtemperaturfesten Leistungshalbleitern(SiC) oder durch verbesserte Kühlbedingungen zu realisieren. Die Aufbau- und Verbindungstechnik, die Halbleitertechnologie und die Systemauslegung müssen aufeinander abgestimmt werden, um zu einer langfristigen Lösung zu führen. Die Wärmespreizung sowohl in der

Verparkungsstruktur als auch in der Systemebene muss genau untersucht und optimiert werden.

Ein Ansatzpunkt für weitere Arbeiten könnte die Bestimmung der optimalen Kühlkörperabmessung und Montagestelle sein, sodass die Kühlkörper bei jener Anwendung immer mit dem günstigsten R_{th} - Wert zum Einsatz gebracht werden können.

8 Mathematischer Anhang

8.1 Die Ermittlung der Wärmeübergangszahl für das Kühlsystem QLS 200.18

Die technischen Daten des Kühlsystems sind in folgender Tabelle gelistet:

Breite des Kühlkörpers	$b = 200 \text{ mm}$
Länge des Kühlkörpers	$l = 200 \text{ mm}$
Wärmeleitfähigkeit von Aluminium	$\lambda = 200 \text{ W/mK}$
Dicke der Kühlkörperbasis	$H = 16,5 \text{ mm}$
Anzahl der Rippe	$n = 18$
Höhe der Rippe	$t_r = 66,5 \text{ mm}$
Dicke der Rippe	$b_r = 2,5 \text{ mm}$
Breite der Kühlkanal	$b_k = 9,1 \text{ mm}$
Fläche der Rippe	$A_{ri} = 0,4556 \text{ m}^2$
Luftleistung	$V_m = 170 \text{ m}^3/\text{h}$
Gesamte Kühlfläche	$A_{ges} = 0,4956 \text{ m}^2$
Fläche der Wärmequelle	$88 \times 67 \text{ mm}^2$
Verlustleistung	$P_v = 350 \text{ W}$
Eingangstemperatur des Fluids	$t_1 = 22 \text{ C}^\circ$

1. Bestimmung der charakteristischen Größen

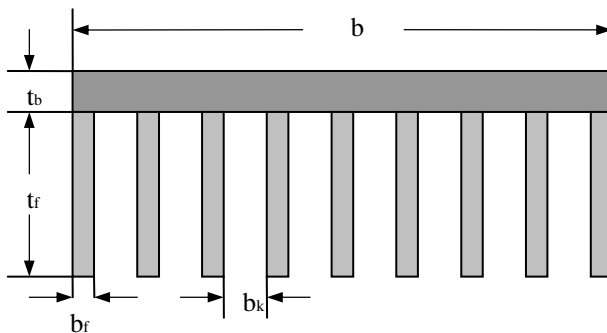


Abb. 8.1 Zur Berechnung der charakteristischen Größen

- Charakteristische Länge d_e des Kanals

$$d_e = \frac{4b_k \cdot t_f}{2(b_k + t_f)} = \frac{2 \cdot 0,0091 \cdot 0,0665}{(0,0091 + 0,0665)} = 0,016m$$

- Der Querschnitt des Kühlkanals per Flächeneinheit S_1

$$S_1 = \frac{2(b_k + t_f) \cdot b \cdot l}{b_k + b_f} = \frac{2 \cdot (0,0091 + 0,0665) \cdot 0,04}{(0,0091 + 0,0025)} = 0,54m^2 / m^2$$

- Der Querschnitt des Kühlkanals per Bereiteinheit S_2

$$S_2 = \frac{b_k \cdot (t_f - b_f) \cdot b}{b_k + b_f} = \frac{0,0091 \cdot (0,0665 - 0,0025) \cdot 0,2}{(0,0091 + 0,0025)} = 0,01m^2 / m$$

2. Bestimmung der Referenztemperatur zur Ermittlung von physikalischen Eigenschaften des Fluids

- Die Referenztemperatur t_f

$$t_f = \frac{1}{4} \cdot (2t_s + t_1 + t_2)$$

t_1	Die Eingangstemperatur des Fluids;
t_2	Die Ausgangstemperatur des Fluids
t_s	Die mittlere Temperatur der Kühlerbasis

$$t_2 = \Delta t + t_1; \quad \text{mit} \quad \Delta t = \frac{P_v}{q_m \cdot c_p}$$

Δt	Die Temperaturerhöhung des Fluids
q_m	Massegeschwindigkeit des Fluids
c_p	Spezifische Wärmekapazität des Fluids

$$q_m = V_m \cdot \rho_{lu_{-25^\circ}} = 170m^3 / h \cdot \frac{h}{3600s} \cdot 1,185 \frac{kg}{m^3} = 0,056kg / s$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{P_v}{q_m \cdot c_p} = \frac{350W \cdot kg \cdot K \cdot s}{0,056kg \cdot 1005J} = 6,21K$$

Mit der Annahme $t_s = 80^\circ C$ ergibt sich t_f :

$$t_f = \frac{1}{4} \cdot (2t_s + t_1 + t_2) = 52,55^\circ C$$

3. Ermittlung der Massegeschwindigkeit des Fluids per Flächeneinheit g_m

$$g_m = \frac{q_m}{A_C} \text{ mit } A_C = b \cdot S_2$$

$$g_m = \frac{q_m}{A_C} = \frac{0,056 \text{ kgm}}{0,2 \cdot \text{m} \cdot 0,01 \text{ m}^2 \text{ s}} = 28 \text{ kg} / \text{m}^2 \text{ s}$$

4. Berechnung der Reynolds-Zahl Re

$$Re = \frac{d_e \cdot g_m}{\mu}$$

μ ist dynamische Zähigkeit des Fluids. Es wird den Wert für Luft bei $t_f = 50^\circ\text{C}$ genommen mit $\mu_{Lu, 50^\circ\text{C}} = 19,85 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

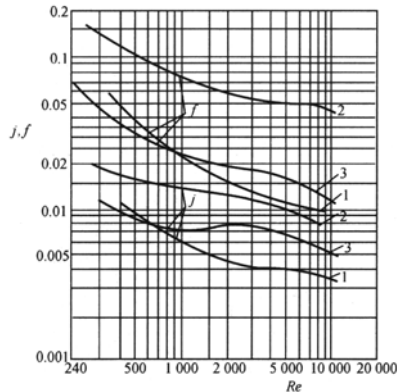
$$Re = \frac{d_e \cdot g_m}{\mu} = \frac{0,016 \text{ m} \cdot 28 \text{ kg} / \text{m}^2 \text{ s} \times 10^6}{19,85 \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 20151$$

5. Berechnung der Wärmeübergangszahl h_{eff}

$$h_{eff} = j \cdot g_m c_p \text{ Pr}^{2/3}$$

j -Wert ist von der Grafik abzulesen.

Pr ist die Prandtl-Zahl der Luft und sie beträgt bei einer Temperatur von 50°C den Wert 0,708



1- plattformig; 2- sägezahnförmig; 3- mit Löchern- Anfertigung an den Rippen
 Abb. 10 Die j - und f -Kurve verschiedener Rippen aus experimentalen Versuchen

$$h_{eff} = j \cdot g_m c_p \text{ Pr}^{3/2} = 0,0033 \cdot 28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \cdot 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 0,708^{3/2} \approx 58 \text{ W} / \text{m}^2 \text{ K}$$

8.2 Mathematischer Beweis des π -Theorems

Es wird von einer modifizierten Darstellung der funktionalen Abhängigkeit ausgegangen:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n, y) = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

Hierbei sein die Größen x_1, \dots, x_r die ausgewählten physikalischen Größen mit den unabhängigen Maßeinheiten. Das Maßeinheitensystem hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} [x_1] &= A_1 \\ &\vdots \\ [x_r] &= A_r \\ [x_{r+1}] &= \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{jr+1}} \\ &\vdots \\ [x_n] &= \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{jn}} \\ [y] &= \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{j0}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Das Größe y kann durch die Abhängigkeit von n Variablen x_1, \dots, x_n geschrieben werden:

$$f(z_1 \cdot A_1, \dots, z_r \cdot A_r, z_{r+1} \cdot \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{jr+1}}, \dots, z_n \cdot \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{jn}}, z_0 \cdot \prod_{j=1}^r A_j^{\alpha_{j0}}) = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

Da eine solche Gleichung auch bei der Verwendung anderer Maßstäbe für die unabhängigen Maßeinheiten wahr bleiben muss, ist auch die Darstellung

$$f(\beta_1 z_1 \cdot A_1, \dots, \beta_r z_r \cdot A_r, z_{r+1} \cdot \prod_{j=1}^r (\beta_j A_j)^{\alpha_{jr+1}}, \dots, z_n \cdot \prod_{j=1}^r (\beta_j A_j)^{\alpha_{jn}}, z_0 \cdot \prod_{j=1}^r (\beta_j A_j)^{\alpha_{j0}}) = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

möglich. Wählt man speziell für $\beta_i = (z_i \cdot A_i)^{-1}$ unter der Voraussetzung, dass z_i ungleich Null ist, so ergibt sich

$$f(\underbrace{1, \dots, 1}_r, z_{r+1} \cdot \prod_{j=1}^r \left(\frac{A_j}{z_j A_j}\right)^{\alpha_{jr+1}}, \dots, z_n \cdot \prod_{j=1}^r \left(\frac{A_j}{z_j A_j}\right)^{\alpha_{jn}}, z_0 \cdot \prod_{j=1}^r \left(\frac{A_j}{z_j A_j}\right)^{\alpha_{j0}}) = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

Nach der Umkehrung der Substitution von A.2.2 lässt sich die Funktion in A.2.5 in der folgenden Form schreiben:

$$f\left(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \frac{x_{r+1}}{\prod_{j=1}^r (x_j)^{\alpha_{jr+1}}}, \dots, \frac{x_n}{\prod_{j=1}^r (x_j)^{\alpha_{jn}}}, \frac{y}{\prod_{j=1}^r (x_j)^{\alpha_{j0}}}\right) = 0 \tag{A.2.6}$$

Die Beziehung in A.2.6 ist die Verallgemeinerung des π - Theorems.
 Wenn es eine Beziehung zwischen m Parametern in der Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{A.2.7}$$

gibt, dann kann man eine äquivalente Form der Beziehung finden mit m dimensionslosen Produktkomplexen:

$$f(\prod_1, \prod_2, \dots, \prod_m) = 0 \tag{A.2.8}$$

Dabei ist Anzahl m bestimmt durch $m = n - r$.

- n : Anzahl der Parameter in der Gleichung A.2.7
- r : größtmögliche Anzahl dimensionsmäßig unabhängiger Größen aus der Menge der Einflussgrößen

8.3 Die Definitionen in der Varianzanalyse (F- Test)

1. Der Messwert y_i

$$y_i = \eta_i + \varphi_i + \kappa_i \tag{A3.1}$$

η_i Der Modellgemäß ermittelte Wert

$$\eta_i \approx \bar{y}_i = \frac{F \cdot A}{r} \tag{A3.2}$$

\bar{y}_i Der Mittelwert der Messung

$$\bar{y}_i = \left(\sum_{j=1}^r y_{ij}\right) / r \tag{A3.3}$$

φ_i Statistische Messfehler

κ_i Systematische Beschreibungsfehler

r Die Anzahl der Stichprobe

2. Die Summe der Messfehlerquadrate S_1

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \tag{A3.4}$$

y_{ij} Der Messwert bei der Stelle i und der Stichprobenmessung j

3. Die Summe der Abweichung der ermittelten Messwerte vom Gesamtmittelwert des Messdatensatzes s_2

$$S_2 = \sum_{i=1}^n r(\bar{y}_i - \bar{Y})^2 \quad (\text{A3.5})$$

\bar{Y} Der gesamtmittelwert des Messdatensatzes

$$\bar{Y} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r y_{ij} \right) / (r \cdot n) \quad (\text{A3.6})$$

4. Die gesamte Variation (total variation): der Fehler zwischen dem Messwert Y_{ij} und dem Mittelwert der Messungen \bar{Y}

$$S_0 = S_1 + S_2 \quad (\text{A3.7})$$

Ersetzt der Mittelwert der Messung \bar{y}_i durch den modellgemäß ermittelten Wert η_i in Gleichung A3.4 und A3.5, ergibt sich die Gleichung A3.8

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n r(\bar{y}_i - \bar{Y})^2}_{S_1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \eta_i)^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n r(\eta_i - \bar{Y})^2}_{S_2} \quad (\text{A3.8})$$

5. Varianz des Messfehlers

$$\delta_1^2 = \frac{S_1}{V_1}$$

V_1 Freiheitsgrad der Messung $V_1 = n(r-1)$

6. Varianz des Modellfehlers

$$\delta_2^2 = \frac{S_1' - S_1}{V_2} + \frac{S_1}{V_1}$$

V_2 Freiheitsgrad des Modells $V_2 = n - k$

k Die Anzahl der Glieder des Koeffizientenvektors

7. F- Wert nach Ronald Fisher

$$F = \frac{\text{Varianz des Modellfehlers}}{\text{Varianz des Messfehlers}} = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}$$

8.4 Approximationsmethodik für eine optimale Beschreibung mit dem Messdatenansatz der Multiplikation

Eine vollständige Versuchsplanung mit den gemessenen Größen y_{ij} und den Einflussfaktoren x_i, z_j hat folgende Darstellung

		Einflussfaktor z \longrightarrow			
		z_1	z_2	..	z_m
Einflussfaktor x \downarrow	x_1	y_{11}	y_{12}	..	y_{1m}
	x_2	y_{21}	y_{22}	..	y_{2m}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	x_n	y_{n1}	y_{n2}	..	y_{nm}

Für die Modellstruktur kann der Ansatz

$$y_{ij} \approx a_i \cdot c_j \text{ bzw. } \underline{Y} \approx \underline{A} \cdot \underline{C}^T \tag{A.4.1}$$

gewählt werden.

Die Forderung einer optimalen Beschreibung von \underline{Y} ist die Minimierung der Varianz des Approximationsfehlers

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_{ij} - a_i \cdot c_j)^2 \Rightarrow \text{Min.} \tag{A.4.2}$$

Die notwendige Bedingung für das Minimum der Varianz erhält man durch Differenzieren nach den unbekanntenen Werten a_i und c_j zu:

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij} \cdot c_j}{\sum_{j=1}^m c_j^2} \quad \text{und} \quad c_j = \sum_{i=1}^n (y_{ij} \cdot a_i) \cdot \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{-1} \tag{A.4.3}$$

Nach dem wechselseitigen Einsetzen und Umordnen der Elemente in Gleichung A.4.3 ergibt sich zur Bestimmung des Vektors \underline{A} oder \underline{C} das Eigenwertproblem

$$\lambda a_v = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m y_{vj} y_{ij} \quad \text{für} \quad \text{alle } v=1, \dots, n$$

$$\text{oder} \quad \underline{\lambda A} = \underline{Y} \cdot \underline{Y}^T \cdot \underline{A} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\lambda C} = \underline{Y} \cdot \underline{Y}^T \cdot \underline{C} \quad (\text{A.4.4})$$

$$\text{mit} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^m c_j^2$$

Dieses Eigenwertproblem hat maximal $r = \min(n, m)$ von Null verschiedene Eigenwerte λ_v und den Eigenwerte zugeordnete Eigenvektoren \underline{A}_v und \underline{C}_v . Der Messdatensatz \underline{Y} lässt sich dann durch die Summe dyadischer Produkte

$$\underline{Y} = \sum_{v=1}^r \sqrt{\lambda_v} \cdot \underline{A}_v \cdot \underline{C}_v^T \quad (\text{A.4.5})$$

vollständig beschreiben, wenn die Eigenvektoren \underline{A}_v und \underline{C}_v nach euklidischen Norm normiert sind. Es gilt $|\underline{A}_v| = |\underline{C}_v| = 1$.

Bei drei Einflussfaktoren lautet der formale Ansatz beispielsweise

$$y_{ijk} \approx a_i \cdot b_j \cdot c_k \quad \text{mit} \quad i=1 \dots n; j=1 \dots m; k=1 \dots l \text{ sowie } l < m < n$$

Das Eigenwertproblem für den zu bestimmenden Vektor \underline{C} hat die Form

$$\lambda c_p = \sum_{k=1}^l c_k \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ijk} y_{ijv}; \quad p = 1, \dots, l \quad (\text{A.4.6})$$

Der Messdatensatz lässt sich durch die Lösung dieses Problems und dazu analogen für \underline{A} und \underline{B} wie folgend beschreiben

$$y_{ijk} = \sum_{p=1}^l \sqrt{\lambda_p} c_{pk} \cdot \sum_{v=1}^m \sqrt{\lambda_{pv}} a_{pvj} \cdot b_{pvj} \quad (\text{A.4.7})$$

Literaturverzeichnis

- [1] Günter Cerbe, Hans- Joachim Hoffmann, „Einführung in die Wärmelehre: von der Thermodynamik zur technischen Anwendung“ 9. Auflage; Hanser Verlag München Wien 1990
- [2] Maximilian Wutz, „Wärmeabfuhr in der Elektronik“, Braunschweig, Vieweg Verlag, 1991
- [3] Prof. Dr. –Ing. W. klose „Skript zur Vorlesung Wärmeübertragung“, Universität Kassel 2006
- [4] Prof. Dr. –Ing. M. Pfitzner, „Wärme- und Stoffübertragung“, Lehrstuhl für Thermodynamik; Universität der Bundeswehr München
- [5] Joseph H. Spurk, „Einführung in die Theorie der Strömungen“, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1996
- [6] Thorsten Schabacker, „Ein Beitrag zur Optimierung der Wärmeabfuhr in der Elektronik durch Kühlkörper“, Dissertation, Universität Kassel 1999
- [7] Gottfried Gotter, „Erwärmung und Kühlung elektrischer Maschinen“, Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954
- [8] Dierk Schröder, „Leistungselektronische Bauelemente“ 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2006
- [9] Arendt Wintrich, „Verhaltensmodellierung von Leistungshalbleitern für den rechnergestützten Entwurf leistungselektronischer Schaltungen“, Dissertation, Technischen Universität Chemnitz 1997
- [10] Prof. Dr. –Ing. P. Zacharias (Editor), „Use of Electronic-Based Power Conversion for Distributed and Renewable Energy Sources“, Institut für Solare Energieversorgungstechnik (ISET) Kassel 2008
- [11] Use Condition Based Reliability Evaluation of New Semiconductor Technologies; SEMATECH Technology Transfer #99083810A-XFR

- [12] Engineering Statistics Handbook
www.itl.nist.gov/div898/handbook/apr/section1/apr153.htm
www.itl.nist.gov/div898/handbook/apr/section2/apr24.htm
- [13] www.weibull.com/acceltestwebcontents.htm
- [14] EIA Engineering Bulletin „Acceleration Factors“ SB-1.003; Oct. 1999; Electronic Industries Alliance/Government Electronics and Information Technology Association (GEIA) /Engineering Department
- [15] H. Berg, eupec QM, IGBT_Reliability 9910, 28. 04. 1999
- [16] Th. Schütze, eupec SM, Application Note AN2003-04
- [17] VDI- Wärmeatlas, 7. Auflage, VDI- Verlag GmbH, Düsseldorf 1994
- [18] Stefan Hohmann, „Ein Beitrag zur Modellierung und Simulation von elektromechanischen Systemen“, Dissertation, Universität Kassel 2004
- [19] Robert E. Simons, „Advances in High-Performance Cooling for Electronics“, Clemens J.M. Lasance, ElectronicsCooling, November 2005, Volume 11, Number 4
- [20] Jim Wilson, Bruce Guenin, „Cooling Solutions in The Past Decade“, ElectronicsCooling, November 2005, Volume 11, Number 4
- [21] Guenin, B., "The Many Flavors of BGA Packages," ElectronicsCooling, Vol. 8, No. 1, February 2002
- [22] Thyrum, G., "Critical Aspects of Modeling Heat Pipe Assisted Heat Sinks," <http://www.thermacore.com/pdfs/critical.pdf>
- [23] Kern D Q, Kraus A D, „extended surface heat transfer“, New York, Mc-Graw- Hill, 1972
- [24] Pautsch, G., and Bar-Cohen, A., "An Overview on the System Packaging of the Cray SV2 Supercomputer," Ipack 2001 Conference, Kauai, HI, 2001.

- [25] Li Tena and Liu Jing, "Latest Research Advancement and Assessment of Chip Cooling Techniques", Journal of Cooling system, Volume 3, 2004
- [26] Yu Nianzu, „Thermal Design and Analysis Techniques of Electronic Equipment“, Higher Education Press, Beijing 2002
- [27] Kennedy, D. P., 1960, "Spreading Resistance in Cylindrical Semiconductor Devices," Journal of Applied Physics, Vol. 31, pp. 1490-1497.
- [28] Yovanovich, M. M., and Burde, S. S., 1977, "Centroidal and area average resistances of nonsymmetric, singly connected contacts," AIAA Journal, Vol. 15, No. 10, pp. 1523-1525.
- [29] Yovanovich, M. M., Burde, S. S., and Thompson, J. C., 1977, "Thermal constriction resistance of arbitrary planar contacts with constant flux," AIAA progress in astronautics and aeronautics, Thermo physics of spacecraft and Outer Planet Entry Probes, Vol. 56, edited by A.M. Smith, New York, pp. 127-139.
- [30] Lee, S., Song, S., Au, V., and Moran, K.P., 1995, "Constriction/-Spreading resistance model for electronics packaging", Paper submitted for presentation at the 4th ASME/JSME thermal engineering joint conference, March 19-24, Maui, Hawaii
- [31] Song, S., Lee, S., and Au, V., 1994, "Closed-Form equation for thermal constriction/spreading resistances with variable resistance boundary conditions" Proceedings of the 1994 international electronics packaging conference, Atlanta, Georgia, pp. 111-121.
- [32] Negus, K. J., and Yovanovich, M. M., 1987, "Thermal computations in a semi-conductor die using surface elements and Infinite images," Proceedings of the international symposium on cooling technology for electronic equipment, pp. 474-485.
- [33] Yovanovich, M .M. 1976, "Thermal constriction resistance of contacts on a half-space: integral formulation," AIAA progress in astronautics and aeronautics, Radiative transfer and thermal control, Vol. 49, edited by A.M. Smith, New York, pp. 397-418.

- [34] Chang, An-ding., Zhou, Da-hai., 2000, "Solution to nonhomogeneous Bessel equation" Basic Sciences Journal of textile universities, Vol. 13, No. 3, Xian
- [35] York C Gerstenmaier, Gerhard K. M. Wachutka, „Transient Temperature Fields with General Nonlinear Boundary Conditions in Electronic System“, IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies, Vol. 28. No.1. March 2005
- [36] Xu Xianquan, "Methods of Solving the Second Electrostatic Boundary Value Problems by Means of Green's Function", Journal of the Normal University ChongQing, September 1990, Volume 7, Number 3
- [37] Evans M. Harrell II and James V. Herod, "Linear Methods of Applied Mathematics Orthogonal series, boundary-value problems, and integral operators", WWW textbook, <http://www.mathphysics.com/pde/>
- [38] ANSYS Inc., Release 10.0 Documentation for ANSYS
- [39] Prof. Dr. -Ing. P. Zacharias, „Elektrophysikalische- und Elektrochemische Abtragsverfahren – Ihre technische Entwicklung und empirische Modellierung“, Dissertation, Technische Hochschule Otto von Güricke Magdeburg 1985
- [40] Prof. Dr. rer. nat. Thomas Morgenstern, „Methoden und Werkzeuge des Qualitätsmanagements“, Dezember 2005, <http://tmorgenstern.hs-harz.de/Qualität>
- [41] Vargar, Richard S, „Functional analysis and approximation theory in numerical analysis“, Philadelphia, Pa.: Soc. for Industrial and Applied Mathematics, 1991
- [42] Günther Nürnberger, "Approximation by spline function", Springer Verlag, Berlin, 1989