Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Institut für Volkswirtschaftslehre
Universität Kassel

Formelsammlung
zur
Ökonometrie I
(Ökonometrische Eingleichungsmodelle)

1. **Das multiple Regressionsmodell**
2. **Signifikanztests und Konfidenzintervalle**
3. **Multikollinearität**
4. **Heteroskedastizität**
5. **Autokorrelation**

1. Das multiple Regressionsmodell

1.1 Modellspezifikation

Multiples Regressionsmodell für die t-te Periode (bzw. t-te statistische Einheit):

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_{2t} + \ldots + \beta_j \cdot x_{jt} + \ldots + \beta_k \cdot x_{kt} + u_t \text{, t=1,2,...,n}$$

oder $$y_t = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot x_{jt} + u_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t \text{, t=1,2,...,n}$$

mit $\underset{1\times k}{\mathbf{x}_t'} = (1 \quad x_{2t} \quad \ldots \quad x_{kt})$ und $\underset{1\times k}{\boldsymbol{\beta}'} = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \ldots \quad \beta_k)$

- y_t: t-te Beobachtung der abhängigen (endogenen, zu erklärenden) Variablen
- β_1: absolutes Glied (Regressionskoeffizient der Scheinvariablen x_1)
- β_j: Regressionskoeffizienten
- x_{jt}: t-te Beobachtung der j-ten unabhängigen (exogenen, erklärenden) Variablen
- u_t: Störvariable (Fehlervariable, latenten Variable) der t-ten Periode (bzw. der t-ten statischen Einheit)

Modellannahmen:

- $E(u_t) = 0$ für alle t=1,2,…,n
- $Var(u_t) = E(u_t^2) = \sigma^2$ für alle t=1,2,…, n
- $Cov(u_t, u_{t-j}) = E(u_t, u_{t-j}) = 0$ für j≠0

Geschätzte Regressionsgleichung für die t-te Periode (bzw. t-te statistische Einheit):

$$y_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_{2t} + \ldots + \hat{\beta}_k \cdot x_{kt} + \hat{u}_t, \; t = 1, 2, \ldots, n$$

mit:

- $\hat{y}_t$: t-te geschätzte Beobachtung der abhängigen (endogenen, zu erklärenden) Variablen
- β_1: geschätztes absolutes Glied (Regressionskoeffizient der Scheinvariablen x_1)
- β_j: geschätzte Regressionskoeffizienten
- x_{jt}: t-te Beobachtung der j-ten unabhängigen (exogenen, erklärenden) Variablen
- $\hat{u}_t$: geschätzter t-ter Wert der Störvariablen (= Residuum, Residualwert)

Multiples Regressionsmodell für alle n Perioden (bzw. alle n statistischen Einheiten):

- ohne Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{lllllll} y_1 & = & \beta_1 + & \beta_2 x_{21} + & \beta_3 x_{31} + & \ldots + & \beta_k x_{k1} \\ y_2 & = & \beta_1 + & \beta_2 x_{22} + & \beta_3 x_{32} + & \ldots + & \beta_k x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & = & \beta_1 + & \beta_2 x_{2n} + & \beta_3 x_{3n} + & \ldots + & \beta_k x_{kn} \end{array}$$

- in Matrixschreibweise:

$$\underset{(nx1)}{\mathbf{y}} = \underset{(nxk)}{\mathbf{X}} \cdot \underset{(kx1)}{\boldsymbol{\beta}}$$

mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \vdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & & x_{k2} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{2n} & & x_{kn} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$$

Modellannahmen:

- $E(\mathbf{u}) = \underset{(n\times 1)}{\mathbf{0}}$
- $Cov(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 \underset{(n\times n)}{\mathbf{I}}$

Regressionswerte (= geschätzte Werte der abhängigen Variablen):

- Regressionswerte der t-ten Periode:

  $\hat{y}_t = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_{2t} + \ldots + \beta_j \cdot x_{jt} + \ldots + \hat{\beta}_k \cdot x_{kt}$, t=1,2,…,n
- Vektor der Regressionswerte:

$$\underset{(nx1)}{\hat{\mathbf{y}}} = \underset{(nxk)}{\mathbf{X}} \cdot \underset{(kx1)}{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$$

mit:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}.$$

Residuen (= geschätzte Werte der Störvariablen):

- Residuen der t-ten Periode:

  $\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t$, t=1,2,…,n

- Vektor der Residuen:

$$\underset{(nx1)}{\hat{\mathbf{u}}} = \underset{(nx1)}{\mathbf{y}} - \underset{(nx1)}{\hat{\mathbf{y}}}$$

1.2 Methode der kleinsten Quadrate

Kleinst-Quadrate-Kriterium:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} u_t^2 = \mathbf{u}'\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \rightarrow \underset{\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{Min}}!$$

Rangbedingung: rg(**X**) = rg(**X**'**X**) = k < n

[für Berechnung der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$]

Kleinst-Quadrate-Schätzer (OLS-Schätzer):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

beim Modell der einfachen Regression (k=2) $y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_t + u_t$:

Steigungsmaß: $$\hat{\beta}_2 = \frac{n\Sigma x_t y_t - \Sigma x_t \Sigma y_t}{n\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2}$$

Absolutes Glied: $$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma x_t^2 \Sigma y_t - \Sigma x_t \Sigma x_t y_t}{n\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2}$$

oder (mit $\hat{\beta}_2$)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma y_t}{n} - \hat{\beta}_2 \cdot \frac{\Sigma x_t}{n}$$

Eigenschaften der OLS-Schätzung:

Vektor der OLS-Residuen (Residualvektor):

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Normalgleichungen:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = X'y \quad \text{oder} \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

Orthogonalitätsbedingung:

$$\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Die Orthogonalitätsbedingung impliziert:

$$\bar{\hat{u}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t = 0 \qquad \text{(= Mittelwert der Residuen gleich 0)}$$

$$s_{\hat{u},x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t \cdot x_{jt} = 0 \qquad \text{(= Residuen und exogene Variablen unkorreliert)}$$

1.3 Schätzeigenschaften der OLS-Methode

Gauß-Markow-Theorem

Der OLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ist die beste lineare unverzerrte Schätzfunktion [best linear unbiased estimator (blue)].

Erwartungstreue

$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$, d.h. $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ für alle j=1,2,…,k.

Varianz-Kovarianzmatrix des OLS-Schätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}}))(\hat{\boldsymbol{\beta}} - E(\hat{\boldsymbol{\beta}}))'\right] \\
&= E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right] \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \dots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = E(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 & \dots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \dots & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_k) = E(\hat{\beta}_k - \beta_k)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\
&= \sigma^2 \begin{bmatrix} x^{11} & x^{12} & \dots & x^{1k} \\ x^{21} & x^{22} & \dots & x^{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x^{k1} & x^{k2} & \dots & x^{kk} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

x^{jj}: j-tes Diagonalelement der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

x^{ij}, $i \neq j$: Nichtdiagonalelemente der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$

Effizienz

$\hat{\beta}_j$: OLS-Schätzer für β_j

$\tilde{\beta}_j$: alternativer linearer Schätzer für β_j

$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j) \leq \mathrm{Var}(\tilde{\beta}_j)$ für alle j=1,2,…,k

Der OLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ wird als bester (=effizienter) Schätzer bezeichnet, da seine Komponenten $\hat{\beta}_j$ von allen linearen Schätzern die kleinste Varianz besitzen.

Konsistenz

Der OLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ist eine konsistente Schätzfunktion für den Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$, da er stochastisch gegen $\boldsymbol{\beta}$ konvergiert:

1. $\lim_{n \to \infty} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ und 2. $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$

1.4 Bestimmheitsmaß und multipler Korrelationskoeffizient

Streuungszerlegung

Varianz von y $\left(s_y^2\right) =$

Varianz der Regressionswerte $\hat{y}$ $\left(s_{\hat{y}}^2\right)$ + Varianz der Residuen $\hat{u}$ (Residualvarianz $s_{\hat{u}}^2$)

$$s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\mathbf{y}'\mathbf{y} - \bar{y}^2$$

$$s_{\hat{y}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \hat{y}_t^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}^2$$

(wegen $\bar{\hat{y}}_n = \bar{y}$)

$$s_{\hat{u}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 = \frac{1}{n}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} \quad (\text{wegen } \bar{\hat{u}} = 0)$$

Bestimmtheitsmaß (Determinationskoeffizient)

$$R^2 = \frac{\text{durch die Regression "erklärte" Varianz von y}}{\text{Gesamtvarianz von y}} = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_{\hat{u}}^2}{s_y^2}$$

Eigenschaft: $0 \le R^2 \le 1$

Berechnungsformeln für R^2:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = \frac{\sum \hat{y}_t^2 - n\cdot\bar{y}^2}{\sum y_t^2 - n\cdot\bar{y}^2} = \frac{\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - n\cdot\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\cdot\bar{y}^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\cdot\bar{y}^2}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\cdot\bar{y}^2}$$

Multipler Korrelationskoeffizient
(=Korrelation zwischen den endogenen Variablen y und den Regressionswerten $\hat{y}$):

$$|R| = \left|r_{y\hat{y}}\right| = \left|r_{yx_{1,2,\ldots,k}}\right|$$

bei einfacher Regression:

$$|R| = \left|r_{xy}\right| \quad \text{mit} \quad r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Korrigiertes Bestimmtheitsmaß

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}\left(1 - R^2\right)$$

2. Signifikanztests und Konfidenzintervalle

2.1 Signifikanztests für einzelne Regressionskoeffizienten

Testablauf:

1. Schritt	**Hypothesenformulierung:** **Nullhypothese:** H_0: $ß_j = 0$ **Alternativhypothese:** H_1: $ßj \neq 0$ (bei zweis. Test)
2. Schritt	**Festlegung des Signikanzniveaus α**
3. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße:** $t = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\beta}_j)}} = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}}$ mit: der Residualvarianz $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}}{n-k}$ und x^{jj} als j-tem Diagonalelement der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
4. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes:** $t_{n-k;1-\alpha/2}$
5. Schritt	**Testentscheidung:** $\lvert t \rvert > t_{n-k;1-\alpha/2}$ → Nullhypothese ablehnen

Varianzschätzer für $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ bei einfacher Regression (k=2):

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

Verallgemeinerung des Signifikanztests::

Die **Nullhypothese**

H_0: $ß_j = c$

lässt sich analog unter Verwendung folgender Prüfgröße testen:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - c}{\sqrt{V\hat{a}r(\hat{\beta}_j)}} = \frac{\hat{\beta}_j - c}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}}$$

2.2 Tests von linearen Restriktionen

Lineare Restriktion: $r_1ß_1 + r_2ß_2 + \ldots + r_kß_k = \mathbf{r'ß} = c$

Testablauf:

1. Schritt	**Hypothesenformulierung:** **Nullhypothese:** H_0: $\mathbf{r'ß} = c$ mit $\mathbf{r}' = (r_1 \;\; r_2 \ldots r_k)$ **Alternativhypothese:** H_1: $\mathbf{r'ß} \neq c$ (bei zweis. Test)
2. Schritt	**Festlegung des Signikanzniveaus α**
3. Schritt	**a) t-Test** **Berechnen der Prüfgröße:** $t = \frac{\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}}}$ mit der Residualvarianz $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}}{n-k}$ und **b) F-Test** **Berechnen der Prüfgröße:** $F = \frac{(\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c)^2}{\hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}}$
4. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes:** a) bei t-Test: $t_{n-k;1-\alpha/2}$, b) bei F-Test: $F_{1;n-k;1-\alpha}$
5. Schritt	**Testentscheidung:** a) bei t-Test: $\lvert t \rvert > t_{n-k;1-\alpha/2}$ → Nullhypothese ablehnen b) bei F-Test: $F > F_{1;n-k;1-\alpha}$ → Nullhypothese ablehnen

2.3 Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten

Ablauf der Intervallschätzung:

1. Schritt	**Festlegung des Konfidenzniveaus 1 - α**
2. Schritt	**(1-α)-Konfidenzintervall für ß$_j$** $P(\hat{\beta}_j - t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}) =$ $P(\hat{\beta}_j - t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}} \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}) = 1-\alpha$ mit: der Residualvarianz $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}}{n-k}$ und x^{jj} als j-tem Diagonalelement der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
3. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des (1-α/2)-Quantils der t-Verteilung:** $t_{n-k;1-\alpha/2}$
4. Schritt	**Bestimmung des konkreten (1-α)-Konfidenzintervalls:** $\left[\hat{\beta}_j - t_{n-k;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}; \hat{\beta}_j - t_{n-k;\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}\right] =$ $\left[\hat{\beta}_j - t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}; \hat{\beta}_j + t_{n-k;1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \cdot \sqrt{x^{jj}}\right]$

Varianzschätzer für $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ bei einfacher Regression (k=2):

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

2.4 Varianzanalyse und Signifikanz des Gesamtzusammenhangs

ANOVA-Tabelle für eine Regressionsanalyse

Quelle der Streuung	Summe der Abweichungsquadrate	Freiheits-grade	Mittlere Abweichungs-quadratsumme
Regression (erklärt)	$\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2 = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - n\bar{y}^2 = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	k-1	$\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2\right)/(k-1)$
Residuen (unerklärt)	$\sum \hat{u}_t^2 = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$	n-k	$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}/(n-k)$
gesamt	$\sum(y_t - \bar{y})^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	n-1	

Testablauf:

1. Schritt	**Formulierung der Nullhypothese** H_0: $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$
2. Schritt	**Festlegung des Signikanzniveaus**
3. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße:** 1. Variante: mit OLS Schätzer $\hat{\beta}$ $F = \frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n \cdot \bar{y}^2)/(k-1)}{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}/(n-k)}$ 2. Variante: mit Bestimmtheitsmaß R^2 $F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$
4. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes:** $F_{k-1;n-k;1-\alpha}$ k-1: Zahl der Freiheitsgrade des Zählers n-k: Zahl der Freiheitsgrade des Nenners
5. Schritt	**Testentscheidung:** $F > F_{k-1;n-k;1-\alpha}$ → Nullhypothese ablehnen

3. Multikollinearität

3.1 Begriff und Auswirkungen der Multikollinearität

- **Perfekte Multikollinearität**

Lineare Abhängigkeit der Spalten der Beobachtungsmatrix **X**:

$$\mathrm{rg}(\mathbf{X}) = \mathrm{rg}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) < k \ .$$

Die Inverse $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ existiert dann nicht, so dass der OLS-Schätzer nicht berechenbar ist.

[Anmerkung: Da perfekte lineare Zusammenhänge (|r|=1) zwischen ökonomischen Variablen in der Regel nur aufgrund definitorischer Zusammenhänge auftreten, liegt im Fall einer perfekten Multikollinearität im Allgemeinen ein Spezifikationsfehler vor.]

- **Nicht-perfekte Multikollinearität**

Die Spalten der Beobachtungsmatrix sind zwar nicht exakt linear abhängig, d.h. es gilt

$$\mathrm{rg}(\mathbf{X}) = \mathrm{rg}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = k\,,$$

jedoch führen absolut hohe Korrelationen zwischen den x-Variablen dazu, dass nicht mehr ihre Einzeleinflüsse, sondern nur noch der Gesamteinfluss zuverlässig geschätzt werden kann.

Regressionsmodell:

$$\tilde{y}_t = \beta_2 \cdot \tilde{x}_{2t} + \beta_3 \cdot \tilde{x}_{3t} + u_t$$

mit $\tilde{y}_t = y_t - \bar{y},\ \tilde{x}_{2t} = x_{2t} - \bar{x}_2$ und $\tilde{x}_{3t} = x_{3t} - \bar{x}_3$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_n^2}{(1 - r_{23}^2)\sum \tilde{x}_{2t}^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_n^2}{(1 - r_{23}^2)\sum \tilde{x}_{3t}^2}$$

Korrelation zwischen den Regressionskoeffizienten: $r_{\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3} = -r_{23}$

3.2 Aufdeckung von Multikollinearität

- **Einfache Korrelationsanalyse**

  Paarweise Beurteilung der Korrelationskoeffizienten $r_{23}, r_{24}, \ldots, r_{k-1,k}$ der X-Variablen

  Faustregel: $|r_{ij}|>0{,}8$, $i,j=2,3,\ldots k;\ i \neq j$

- **Erweiterte einfache Korrelationsanalyse**

  $r_{ij} > R_{y \cdot x_{2,3,\ldots,k}}$, $i, j = 2,3,\ldots,k;\ i \neq j$

  $R_{y \cdot x_{2,3,\ldots,k}}$: multipler Korrelationskoeffzient

- **Determinante der Korrelationsmatrix und der Produktmatrix X'X**

  R: Korrelationsmatrix der x-Variablen

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ r_{32} & 1 & \cdots & r_{3k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k2} & r_{k3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

  bei perfekter Multikollinearität: $|\mathbf{R}|=0$ und $|\mathbf{X'X}|=0$

  bei nicht-perfekter Multikollinearität: $|\mathbf{R}|\approx 0$ und $|\mathbf{X'X}|\approx 0$

- **- Konditionszahl der Produktmatrix X'X**

Konditionszahl: $C = \sqrt{\lambda_{max} / \lambda_{min}}$

λ_{max}: größter Eigenwert von **X'X**, λ_{min}: kleinster Eigenwert von **X'X**

Faustregel: Multikollinearität falls C > 30

- **Verfahren der Hilfsregressionen (auxiliary regressions)**

  Für jede der k-1 (echten) exogenen Variablen wird eine Regression auf die Scheinvariable x1 und die verbleibenden (echten) k-2 Regressoren durchgeführt:

  Regression von x_{2t} auf $x_{1t}, x_{3t}, \ldots, x_{kt}$
  Regression von x_{3t} auf $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, (x_{3t}), \ldots, x_{kt}$
  $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$
  Regression von x_{kt} auf $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{k-1,t}$

  Bestimmheitsmaße der Hilfsregressionen: R_j^2

  - F-Test:

  Prüfgröße: $F_j = \dfrac{R_j^2/(k-2)}{(1-R_j^2)/(n-k+1)} \sim F_{k-2;n-k+1},\ j = 2,3,\ldots,k$

  - Toleranzkoeffizienten: $tol_j = 1 - R_j^2$

  bei Multikollinearität: $tol_j \cong 0 \rightarrow$ Faustregel: $tol_j < 0.05$

  - Variance inflation factors (VIP): $VIP_j = 1 / tol_j$

3.3 Überwindung der Multikollinearität

- Erweiterung der Datenbasis (z.B. Paneldaten)
- Externe Informationen über bestimmte Parameter
- Verfahren der Variablenunterdrücken
- Verfahren der Differenzenbildung
- Hauptkomponentenregression

4. Heteroskedastizität

4.1 Form und Auswirkungen des Modelldefekts

- **Verletzung der Annahme:**

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$$

- **Heteroskedastizität:**

Unterschiedliche Varianzen der Störvariablen in den verschiedenen Perioden (bzw. für verschiedene statistische Einheiten):

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Annahme:

$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}((\mathbf{uu}') = \sigma^2 \cdot \mathbf{\Omega}$

$$\text{mit } \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}$$

ω_t: Skalierungsvariable

- **Auswirkung auf die OLS-Schätzung**:

- Der OLS-Schätzer $\hat{\beta}$ ist nicht mehr der beste lineare unverzerrte Schätzer (Verlust der Effizienzeigenschaft).

- Verzerrte Varianzschätzer für $\hat{\beta}_j$ führen zu verzerrten t-Werten, so dass die Konfidenzintervalle und Signifikanztests nicht mehr valide sind

4.2 Tests auf Heteroskedastizität

• **Goldfeld-Quandt-Test**

Testablauf:

1. Schritt	**Ordnen der Beobachtungsdaten** nach den aufsteigenden Werten des j-ten Regressors, auf den die Heteroskedastizität zurückgeführt wird.
2. Schritt	**Aufteilung der Beobachtungsdaten in 2 gleich große Gruppen** mit jeweils (n-c)/2 Beobachtungen unter Herauslassung der c mittleren Werte. Faustregel: c=4 für n=30 und c=10 für n=60
3. Schritt	**Hypothesenformulierung**: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
4. Schritt	**Festlegung des Signifikanzniveaus α**
5. Schritt	**Durchzuführende Regressionen:** 1. Stichprobe: $\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u}_1$ Residualvektor: $\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{X}_1\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ 2. Stichprobe: $\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}_2$ Residualvektor: $\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{X}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$
6. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße**: $GQ = \frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2}{\hat{u}_1'\hat{u}_1}$ Falls $\hat{u}_1'\hat{u}_1 > \hat{u}_2'\hat{u}_2$ gilt, wird anstelle von GQ der Kehrwert 1/GQ als Prüfgröße verwendet.
7. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes:** $F_{(n-c)/2-k;(n-c)/2-k;1-\alpha}$
8. Schritt	**Testentscheidung**: $GQ > F_{(n-c)/2-k;(n-c)/2-k;1-\alpha}$ → H_0 ablehnen

• **Breusch-Pagan-Test**

Ansätze: $\sigma_t^2 = \exp(\mathbf{z}_t \cdot \alpha)$ oder $\sigma_t^2 = (\mathbf{z}'_t \cdot \alpha)^2$

Der Vektor $\mathbf{z}_t$ enthält hierbei eine oder mehrere exogene Variablen, auf die die Heteroskedastizität zurückgeführt wird.

Fall einer z-Variablen: $\sigma_t^2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot z_t$

z ist hierin eine bestimmte exogene Variablen z.B. x_2 oder x_2^2, auf die die Heteroskedastizität zurückgeführt wird

Testablauf:

1. Schritt	**Formulierung der Nullhypothese** $H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_p = 0,$ d.h. $\sigma_t^2 = \sigma^2$ für alle $t = 1,2,\ldots,n$
2. Schritt	**Festlegung des Signifikanzniveaus α**
3. Schritt	**Durchführung der Regression** $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t \rightarrow$ Residuen: $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}$
4. Schritt	**Durchführung der Hilfsregression**: $\hat{u}_t^2 / \hat{\sigma}_{ML}^2 = \mathbf{z}_t'\boldsymbol{\alpha} + v_t$ mit $\hat{\sigma}_{ML}^2 = \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 / n$ Fall einer z-Variablen: $\hat{u}_t^2 / \hat{\sigma}_{ML}^2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot z_t + v_t$
5. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße:** a) $BP_1 = \frac{1}{2} SS_E$ mit $SS_E = SS_T - SS_R$ SS_T: Summe der Abweichungsquadrate von $\hat{u}_t^2 / \hat{\sigma}_{ML}^2$ SS_E: erklärte Summe der Abweichungsquadrate der Hilfsregression SS_R: Summe der quadrierten Residuen der Hilfsregression b) $BP_2 = n \cdot R^2$ R^2: Bestimmtheitsmaß der Hilfsregression
6. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes:** $\chi^2_{p-1;1-\alpha}$
7. Schritt	**Testentscheidung**: $BP_1 (BP_2) > \chi^2_{p-1;1-\alpha}$ → H_0 ablehnen

- **White-Test**

Testablauf:

1. Schritt	**Formulierung der Nullhypothese** $H_0 : \sigma_t^2 = \sigma^2 \quad \text{für alle } t = 1,2,\ldots,n$
2. Schritt	**Festlegung des Signifikanzniveaus α**
3. Schritt	**Durchführung der Regression**: $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t \rightarrow \quad \text{Residuen}: \ \hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}$
4. Schritt	**Durchführung der Hilfsregression** $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \cdot x_{it} + \sum_{i=2}^{k} \sum_{j \geq i}^{k} \alpha_{ij} \cdot x_{it} x_{jt}$ <u>Anmerkung:</u> Bei großer Anzahl von Regressoren kann der White-Test unter Vernachlässigung der Kreuzprodukte $x_{ti} \cdot x_{tj}$, $i \neq j$, durchgeführt werden.
5. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße:** $W = n \cdot R^2$ R^2: Bestimmtheitsmaß der Hilfsregression
6. Schritt	**Tabellarische Bestimmung des kritischer Wertes:** $\chi^2_{r;1-\alpha}$ $\text{mit } r = \begin{cases} (k-1)(k+2)/2 & \text{mit Kreuzprodukte} \\ k & \text{ohne Kreuzprodukte} \end{cases}$
7. Schritt	**Testentscheidung**: $W > \chi^2_{r;1-\alpha} \quad \rightarrow \quad H_0 \text{ ablehnen}$

4.3 WLS-Schätzung bei Heteroskedastizität

WLS-Methode: **Gewichtete Kleinst-Quadrate-Methode (Weighted Least Squares)**
[Spezialfall der verallgemeinerten Kleinst-Quadrate-Methode (GLS, Generalized Least Squares)]

Ansatz:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot z_t^2, \quad t = 1,2,\ldots,n$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbf{\Omega} = \sigma^2 \begin{bmatrix} z_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & z_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & z_n^2 \end{bmatrix}$$

Wahl für z: j-te exogene Variable x_j

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot x_{jt}^2, \quad t = 1,2,\ldots,n$$

Transformiertes Regressionsmodell:

$$(*) \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^*$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{Ty}, \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{TX}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{Tu}$$

T: Transformationsmatrix mit der Eigenschaft $\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathbf{T'T}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/x_{j1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_{j2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/x_{jn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x_{j1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/x_{j2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/x_{jn}^2 \end{bmatrix}$$

Transformierte Regressionsgleichung für die t-te Periode (bzw. t-te statistische Einheit):

$$\underset{\substack{\uparrow \\ y_t^*}}{\frac{y_t}{x_{jt}}} = \hat{\beta}_1 \underset{\substack{\uparrow \\ x_{1t}^*}}{\frac{1}{x_{jt}}} + \hat{\beta}_2 \underset{\substack{\uparrow \\ x_{2t}^*}}{\frac{x_{2t}}{x_{jt}}} \ldots + \hat{\beta}_j \underset{\substack{\uparrow \\ x_{jt}^* = 1}}{\frac{x_{jt}}{x_{jt}}} + \ldots + \hat{\beta}_k \underset{\substack{\uparrow \\ x_{kt}^*}}{\frac{x_{kt}}{x_{jt}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{u}_t^*}}{\frac{\hat{u}_t}{x_{jt}}}$$

Transformierter Vektor der abhängigen Variablen y:

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* = y_1 \cdot 1/x_{j1} \\ y_2^* = y_2 \cdot 1/x_{j2} \\ \vdots \\ y_n^* = y_n \cdot 1/x_{jn} \end{pmatrix}$$

Transformierte Beobachtungsmatrix $\mathbf{X}^*$:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* = \frac{1}{x_{j1}} & x_{21}^* = \frac{x_{21}}{x_{j1}} & \cdots & x_{j1}^* = \frac{x_{j1}}{x_{j1}} = 1 & \cdots & x_{k1}^* = \frac{x_{k1}}{x_{j1}} \\ x_{12}^* = \frac{1}{x_{j2}} & x_{22}^* = \frac{x_{22}}{x_{j2}} & \cdots & x_{j2}^* = \frac{x_{j2}}{x_{j2}} = 1 & \cdots & x_{k2}^* = \frac{x_{k2}}{x_{j1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1j}^* = \frac{1}{x_{jj}} & x_{2j}^* = \frac{x_{2j}}{x_{jj}} & \cdots & x_{jj}^* = \frac{x_{jj}}{x_{jj}} = 1 & \cdots & x_{kj}^* = \frac{x_{kj}}{x_{jj}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1n}^* = \frac{1}{x_{jn}} & x_{2n}^* = \frac{x_{2n}}{x_{jn}} & \cdots & x_{jn}^* = \frac{x_{jn}}{x_{jn}} = 1 & \cdots & x_{kn}^* = \frac{x_{kn}}{x_{jn}} \end{pmatrix}$$

Die Schätzung des Parametervektors $\boldsymbol{\beta}$ in dem transformierten Modell (*) mit der OLS-Methode führt zu dem **WLS-Schätzer** (weighted least-squares) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{WLS}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{WLS} = \left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^* = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}\,.$$

beim Modell der einfachen Regression (k=2):

Absolutes Glied: $\hat{\beta}_{1,WLS} = \dfrac{n \cdot \sum x_{1t}^* y_t^* - \sum x_{1t}^* \sum y_t^*}{n \cdot \sum (x_{1t}^*)^2 - (\sum x_{1t}^*)^2}$

Steigungsmaß: $\hat{\beta}_{2,WLS} = \dfrac{\sum y_t^*}{n} - \hat{\beta}_{1,WLS} \cdot \dfrac{\sum x_{1t}^*}{n}$

Geschätzte Kovarianzmatrix von $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{WLS}$:

$$\hat{\text{Cov}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{WLS}\right) = \hat{\sigma}_{WLS}^2\left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*\right)^{-1} = \hat{\sigma}_{WLS}^2\left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

mit $\hat{\sigma}_{WLS}^2 = \dfrac{\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^*}{n-k}$

WLS-Residuen: $\hat{\mathbf{u}}^* = \mathbf{y}^* - \mathbf{X}^*\hat{\beta}_{WLS}$

4.4 Heteroskedastizitäts-konsistente (HC) Varianz-Kovarianz-Matrix

• **Varianz-Kovarianz-Matrix** von $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bei **heteroskedastischen Störtermen**:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

mit $$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

oder

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Unter Verwendung der Matrix

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2)\mathbf{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sigma_t^2 \cdot \mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'$$

lautet die **Varianz-Kovarianz-Matrix** von $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{S}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

• **Whites Heteroskedastizitäts-konsistenter (HC) Schätzer** für $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\mathbf{S}}_0(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

mit $$\hat{\mathbf{S}}_0 = \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, ..., \hat{u}_n^2)\mathbf{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 \cdot \mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'$$

oder

$$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, ..., \hat{u}_n^2)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

HC-Schätzer für Steigungsmaß $\hat{\beta}_2$ bei **einfacher Regression** (k=2):

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum(x_t - \bar{x})^2 \cdot \hat{u}_t^2}{\left[\sum(x_t - \bar{x})^2\right]^2}$$

• **Modifikationen** des **HC-Schätzers von White** (= **HC0-Schätzer**):

- **HC1-Schätzer**

$$\mathrm{HC1} = \frac{n}{n-k} \cdot \mathrm{HC0} \quad \text{(Adjustierungsfaktor: } \frac{n}{n-k}\text{)}$$

- **HC2-Schätzer**

$$\mathrm{HC2} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{diag}[\hat{u}_1^2/(1-h_{11}), ..., \hat{u}_n^2/(1-h_{nn})]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

h_{tt}: Hauptdiagonalelemente der Hat-Matrix **H** (Projektionsmatrix):

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$h_{tt} = \mathbf{x}_t'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_t$$

$\mathbf{x}_t'$: t-te Zeile der Beobachtungsmatrix **X**

- HC3-Schätzer

$$HC3 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\,\mathrm{diag}[\hat{u}_1^2/(1-h_{11})^2,\ldots,\hat{u}_n^2/(1-h_{nn})^2]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

5. Autokorrelation

5.1 Form und Auswirkungen des Modelldefekts

- **Verletzung der Annahme:**

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$$

- **Autokorrelation :**

Abhängigkeit der Störvariablen in den verschiedenen Perioden

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Annahme:

$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \sigma^2\cdot\mathbf{\Omega}$

bei autoregressivem Prozess 1. Ordnung mit $\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & \ldots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \cdots & \phi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Autoregressiver Prozess 1. Ordnung (Markov-Prozess):

$$u_t = \phi\cdot u_{t-1} + v_t, \quad |\phi| < 1$$

ϕ: Autoregressiver Parameter (Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung)

- **Auswirkung auf die OLS-Schätzung**:

- Der OLS-Schätzer $\hat{\beta}$ ist nicht mehr der beste lineare unverzerrte Schätzer (Verlust der Effizienzeigenschaft).

- Verzerrte Varianzschätzer für $\hat{\beta}_j$ führen zu verzerrten t-Werten, so dass die Konfidenzintervalle und Signifikanztests nicht mehr valide sind

5.2 Autokorrelationskoeffizient

Konzept: Messung der Autokorrelation der Störgröße u

- **Theoretische Autokorrelationskoeffizient j-ter Ordnung**:
- $$\rho_j = \frac{\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-j})}{\mathrm{Var}(u_t)} = \frac{E(u_t \cdot u_{t-j})}{E(u_t^2)} = \frac{\sigma_{t,t-j}}{\sigma^2}$$

  <u>Annahme</u>**:** homoskedastischer Störprozess

  bei unkorrelierten Störgrößen:

  $\rho_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots$

- **Empirischer Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung**:

  Korrelation zwischen den Paaren $(\hat{u}_2, \hat{u}_1), (\hat{u}_3, \hat{u}_2), \ldots, (\hat{u}_n, \hat{u}_{n-1})$

  $$\hat{\rho}_1 = \hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

- **Empirischer Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung**

  Korrelation zwischen den Paaren $(\hat{u}_3, \hat{u}_1), (\hat{u}_4, \hat{u}_2), \ldots, (\hat{u}_n, \hat{u}_{n-2})$

  $$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

- **Empirischer Autokorrelationskoeffizient j-ter Ordnung**:

  $$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-j}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}, \quad j = 1,2,\ldots$$

5.3 Kovarianzmatrix der Störgröße bei Autokorrelation

• **Autoregressiver Prozess 1. Ordnung** [AR(1)-Prozess, Markov-Prozess]:

$$u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t, \quad |\phi| < 1$$

v_t: White-Noise-Störvariable

• **Erwartungswert der Störvariablen u**

$$E(u_t) = 0,\ t=1,2,...,n$$

• **Varianz der Störvariablen u**

$$\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\phi^2},\ t = 1,2,...,n$$

• **Autokovarianzen der Störvariablen u**

- Autokovarianz 1. Ordnung:

$$\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-1}) = \phi \cdot \frac{\sigma_v^2}{1-\phi^2} = \phi \cdot \mathrm{Var}(u_t) = \phi \cdot \sigma^2$$

- Autokovarianz j-ter Ordnung:

$$\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-1}) = \phi^j \cdot \frac{\sigma_v^2}{1-\phi^2} = \phi^j \cdot \mathrm{Var}(u_t) = \phi^j \cdot \sigma^2$$

• **Autokorrelationskoeffizienten der Störvariablen u**

- Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

  $\rho_1 = \rho = \phi$

- Autokorrelationskoeffizient j-ter Ordnung:

  $\rho_j = \phi^j, \quad j=1,2,...$

• **Kovarianzmatrix der Störvariablen** u

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 \cdot \mathbf{\Omega} = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \phi & \cdots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \cdots & \phi^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

5.4 Tests auf Autokorrelation

- **Durbin-Watson-Test**

Durbin-Watson-Test: Test auf Autokorrelation 1. Ordnung

- **Autoregressiver Prozess 1. Ordnung** (Markov-Prozess):

  $u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t\,, \quad |\phi| < 1, \quad t = 1,2,\ldots,n$

  v_t: White-Noise-Störvariable

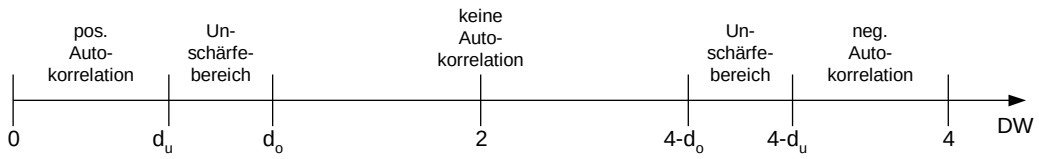
- **Schätzgleichung für den autoregressiven Parameter ϕ:**

  $\hat{u}_t = \phi \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t\,, \quad |\phi| < 1$

  $\hat{u}_t$: OLS-Residuen aus multiplem Regressionsmodell $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$

- **OLS-Schätzer für ϕ:** $\hat{\phi} \cong \dfrac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} \quad [= \hat{\rho}_1]$

Testablauf:

Schritt 1:	**Formulierung der Nullhypothese**: $H_0 : \phi = 0 \quad (\hat{=}\ \rho_1 = 0)$
Schritt 2:	**Festlegung des Signifikanzniveaus α**
Schritt 3:	Berechnen der Prüfgröße: $DW = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}, \quad [DW \cong 2(1 - \hat{\rho}_1)]$
Schritt 4:	**Bestimmung der kritischen Werte**:  Die kritischen Werte d_u und d_o für die DW-Statistik sind im Anhang B (Tabelle B5) für Signifikanzniveaus von 5% und 1% tabelliert.
Schritt 5:	**Testentscheidung:** $DW \in [0; d_u] \Rightarrow$ pos. Autokorr. $DW \in [4 - d_u; 4] \Rightarrow$ neg. Autokorr. $DW \in [d_u; d_o] \cup [4 - d_o; 4 - d_u] \Rightarrow$ keine Aussage über Autokorr. $DW \in [d_o; 4 - d_o] \Rightarrow$ keine Autokorr.

• **Breusch-Godrey-Test**

Breusch-Godfrey-Test: Test auf Autokorrelation beliebiger Ordnung

- **Multiples Regressionsmodell**

(*) $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$

Das multiple Regressionsmodell (*) kann um m verzögerte endogene Variablen $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-m}$ erweitert werden:

$$y_t = \mathbf{y}_t^{-'}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{X}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$$

mit $\underset{1\times m}{\mathbf{y}^{-'}} = (y_{t-1}\ y_{t-2} \cdots y_{t-m})$

und $\underset{1\times m}{\boldsymbol{\gamma}'} = (\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_m)$

- **Autoregressiver Prozess ρ-ter Ordnung für die Störvariable u**:

$$u_t = \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots + \alpha_\rho \cdot u_{t-\rho} + v_t$$

v_t: White-Noise-Störvariable

Testablauf:

Schritt 1:	**Formulierung der Nullhypothese**: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\rho = 0$
Schritt 2:	**Festlegung des Signifikanzniveaus α**
Schritt 3:	**Durchführung der Hilfsregression:** $\hat{u}_t = \alpha_0 + \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \alpha_1\hat{u}_{t-1} + \alpha_2\hat{u}_{t-2} + \ldots + \alpha_\rho\hat{u}_{t-\rho} + v_t$ Allgemeinerer Ansatz: $\hat{u}_t = \alpha_0 + \mathbf{z}_t'\boldsymbol{\delta} + \alpha_1\hat{u}_{t-1} + \alpha_2\hat{u}_{t-2} + \ldots + \alpha_\rho\hat{u}_{t-\rho} + v_t$ $\mathbf{z}_t' = (\mathbf{y}_t^{-'}\ \ x_t'),\quad \boldsymbol{\delta}' = (\boldsymbol{\gamma}'\ \ \boldsymbol{\beta}')$
Schritt 4:	**Berechnen der Prüfgröße**: $BG = n \cdot R^2$ R^2: Bestimmtheitsmaß der Hilfsregression
Schritt 5:	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes**: $\chi^2_{\rho;1-\alpha}$
Schritt 6:	**Testentscheidung:** $BG > \chi^2_{\rho;1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

5.5 Schätzverfahren bei autokorrelierten Störvariablen

- **Cochran-Orcutt-Methode**

- Multiples Regressionsmodell mit autokorrelierten Störvariablen:

$$y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$$

mit $u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t$ (Markov-Prozess)

- Transformiertes Modell:

$$y_t^* = \mathbf{x}_t^{*'}\boldsymbol{\beta} + v_t$$

mit $y_t^* = y_t - \phi \cdot y_{t-1}$ und $\mathbf{x}_t^* = \mathbf{x}_t - \phi \cdot \mathbf{x}_{t-1}$

Schätzverfahren:

1. Schritt:	**Durchführung der Regression (originäre Variablen):** $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$ $\rightarrow$ OLS-Residuen: $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}$
2. Schritt:	**Durchführung der Hilfsregression:** $\hat{u}_t = \phi \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t$ $\rightarrow$ OLS-Schätzer für ϕ: $\hat{\phi} \cong \dfrac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$
3. Schritt:	**Variablentransformation:** $y_t^* = y_t - \hat{\phi} \cdot y_{t-1}, \quad t = 2,3,\ldots,n$ $\mathbf{x}_t^* = \mathbf{x}_t - \hat{\phi} \cdot \mathbf{x}_{t-1}$
4. Schritt:	**Durchführung der Regression (transformierte Variablen):** (*) $y_t^* = \mathbf{x}_t^{*'}\boldsymbol{\beta} + v_t$ $\rightarrow$ OLS-Schätzung des Parameters β im transformierten Regressionsmodell (*) führt zum **GLS-Schätzer** nach dem **Cochran-Orcutt-Verfahren**: $\underset{kx1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}^{CO}} = \left(\underset{kx(n-1)}{\mathbf{X}^{*'}} \underset{(n-1)xk}{\mathbf{X}^*} \right)^{-1} \underset{kx(n-1)}{\mathbf{X}^{*'}} \underset{(n-1)x1}{\mathbf{y}^*}$ <u>Anmerkung</u>: Durch die Variablentransformation im 3. Schritt vermindert sich die Anzahl der Beobachtungen um 1, d.h. **X*** ist eine (n-1)xk-Matrix und **y*** ist ein (n-1)x1 Vektor.

	beim Modell der einfachen Regression (k=2): Steigungsmaß: $\hat{\beta}_{2,GLS}^{*CO} = \hat{\beta}_{2,GLS}^{CO} = \dfrac{(n-1)\cdot\sum x_{1t}^{*} y_t^{*} - \sum x_{1t}^{*} \sum y_t^{*}}{(n-1)\cdot\sum (x_{1t}^{*})^2 - (\sum x_{1t}^{*})^2}$ Absolutes Glied: $\hat{\beta}_{1,GLS}^{*CO} = \dfrac{\sum y_t^{*}}{n-1} - \hat{\beta}_{2,GLS}^{CO} \cdot \dfrac{\sum x_{1t}^{*}}{n-1}$ und $\hat{\beta}_{1,GLS}^{CO} = \hat{\beta}_{1,GLS}^{*CO} / (1-\hat{\phi})$

● **Prais-Winston-Methode**

Modellansatz: wie **Cochran-Orcutt-Methode**

Schätzverfahren:

1. Schritt	wie **Cochran-Orcutt-Methode**
2. Schritt	wie **Cochran-Orcutt-Methode**
3. Schritt:	**Variablentransformation:** $y_1^{*} = \sqrt{1-\hat{\phi}^2} \cdot y_1$ und $\mathbf{x}_1^{*} = \sqrt{1-\phi^2} \cdot \mathbf{x}_1$ $y_t^{*} = y_t - \hat{\phi} \cdot y_{t-1}$ und $\mathbf{x}_t^{*} = \mathbf{x}_t - \hat{\phi} \cdot \mathbf{x}_{t-1}, \quad t = 2,3,\ldots,n$
4. Schritt:	**Durchführung der Regression (transformierte Variablen):** $y_t^{*} = \mathbf{x}_t^{*'} \boldsymbol{\beta} + v_t$ → **GLS-Schätzer** (**Prais-Winston-Verfahren**): $\underset{kx1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}^{PW}} = \left(\underset{kxn}{\mathbf{X}^{*'}} \underset{nxk}{\mathbf{X}^{*}}\right)^{-1} \underset{kxn}{\mathbf{X}^{*'}} \underset{nxk}{\mathbf{y}^{*}}$ $= \left(\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{y}$ mit $\underset{n\times n}{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -\hat{\phi} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & -\hat{\phi} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\phi} & 1+\hat{\phi}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\hat{\phi} & -\hat{\phi} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\phi} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T'T}$

	und der Transformationsmatrix $\underset{n\times n}{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\hat{\phi}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\hat{\phi} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\phi} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{\phi} & 1 \end{bmatrix}$ <u>Anmerkung</u>: Im Unterschied zum Cochran-Orcutt-Verfahren bleibt die Anzahl der Beobachtungen bei der Modellschätzung erhalten, d.h. . **X*** ist eine nxk-Matrix und **y*** ist ein nx1 Vektor.

- **Verfahren nach Hildreth und Lu**

Schätzverfahren:

1. Schritt:	**Durchführung der Regression (originäre Variablen):** $y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$ $\rightarrow$ OLS-Residuen: $\hat{u}_t = y_t - \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta}$ damit: → Test auf Autokorrelation Testergebnis: signifikante Autokorrelation der OLS-Residuen
2. Schritt:	**OLS-Schätzung des transformierten Modells:** $(y_t - \phi y_{t-1}) = (\mathbf{x}_t' - \phi \cdot \mathbf{x}_{t-1}') \cdot \boldsymbol{\beta} + v_t$ für ein Gitter von ϕ-Werten: bei pos. Autokorrelation z.B. $\phi = 0{,}1,\ \phi = 0{,}2,\ \ldots,\ \phi = 0{,}9,\ \phi = 1{,}0$
3. Schritt:	**Berechnung der Residuenquadratsummen $\sum \hat{v}_t^2$ für die verwendeten ϕ-Werte** Wahl des ϕ-Wertes, ϕ_{min}, der die Residuenquadratsumme $\sum \hat{v}_t^2$ minimiert
4. Schritt:	**Durchführung der Regression (transformierte Variablen):** $(y_t - \phi_{min} \cdot y_{t-1}) = (\mathbf{x}_t' - \phi_{min} \cdot \mathbf{x}_{t-1}') \cdot \boldsymbol{\beta} + v_t$ $\rightarrow \hat{\beta}_{GLS}^{HL} = \left(\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{y}$

	mit $\underset{n\times n}{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_{min} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_{min} & 1+\phi_{min}^2 & -\phi_{min} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{min} & 1+\phi_{min}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\phi_{min} & -\phi_{min} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_{min} & 1 \end{bmatrix}$

5.6 Heteroskedastizitäts- und Autokorrelations-konsistente (HAC) Varianz-Kovarianz-Matrix

• **Varianz-Kovarianz-Matrix** von $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bei **autokorrelierten Störtermen** unter Berücksichtigung von potenziell vorhandener **Heteroskedastizität**:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

mit $$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Unter Verwendung der Matrix

$$\mathbf{S}_x = \sigma^2(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X})/n = \left(\sum_t \sum_s \sigma_{ts}\mathbf{x}_t\mathbf{x}_s'\right)/n$$

lautet die **Varianz-Kovarianz-Matrix** von $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{S}_x(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

• **Newey-Wests Heteroskedastizitäts- und Autokorrelations-konsistente (HAC) Schätzer** für $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\mathbf{S}}_x(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

mit $$\hat{\mathbf{S}}_x = \left(\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'\right)/n + \left(\sum_{j=1}^p \sum_{t=j+1}^n (1-w_j)\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}_{t-j}' + \mathbf{x}_{t-j}\mathbf{x}_t')\right)/n$$

Gewichte: $w_j = \dfrac{j}{p+1}$ mit $p \approx n^{1/4}$ (max. Lag nach Greene, 2003)

- bei ausschließlicher Berücksichtigung von Autokorrelation 1. Ordnung (p=1):

$$\hat{\mathbf{S}}_x = \left(\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t'\right)/n + \left(0{,}5 \cdot \sum_{t=2}^n \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}(\mathbf{x}_t\mathbf{x}_{t-1}' + \mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}_t')\right)/n$$

- **Newey-West HAC-Schätzer** für Steigungsmaß $\hat{\beta}_2$ bei **einfacher Regression** (k=2):

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)_{\mathrm{HAC}} = \frac{1}{[\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2]^2}\left[\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2(x_t - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{t=j+1}^{n}(1 - w_j)\hat{u}_t\hat{u}_{t-j}(x_t - \bar{x})(x_{t-j} - \bar{x})\right]$$

- **Modifikation** des **HAC-Schätzers von Newey und West** (= **HAC0-Schätzer**):

- **HAC1-Schätzer**

$$\mathrm{HAC1} = \frac{n}{n-k} \cdot \mathrm{HAC0} \quad \text{(Adjustierungsfaktor: } \frac{n}{n-k}\text{)}$$