Aufgaben zur Ökonometrie I

5. Heteroskedastizität

5.1 Was versteht man unter Heteroskedastizität und wodurch kann dieser Modelldefekt verursacht werden?

Lösung:

Die Annahme A.2 lautete, dass die Störgrößen in jeder Periode die gleiche Varianz besitzen, d.h. homoskedastisch sind: $Var\left(u_t^2\right) = \sigma^2$, für t = 1, 2, …, n. Man spricht von Heteroskedastizität, wenn die Varianz der Störgröße nicht konstant ist, sondern in den einzelnen Perioden oder in Abhängigkeit von den Querschnittseinheiten (z.B. Unternehmen, Regionen) verändert. Heteroskedastizität liegt auch dann vor, wenn die Varianz der Störgröße gruppenweise variiert, innerhalb der Grupppen aber konstant ist (z.B. Streuungsunterschiede zwischen West und Ost, aber nicht innerhalb west- und ostdeutscher Regionen).
Potenzielle Gründe für Heteroskedastität:

- bei Zeitreihendaten:
- Unterliegen die exogenen Variablen einen Trend, so kann sich dieser Trend auch in der Störgrößenvarianz niederschlagen.
- bei Querschnittsdaten:
- Bei Gruppen von statistischen Einheiten (z.B. Haushalte), die im oberen Wertebereich bei einer oder mehreren exogenen Variablen wie z.B. dem Einkommen liegen, weist die abhängige Variable wie z.B. der Konsum häufig ebenfalls eine größere Streuung auf. In unserem Beispiel spiegelt sie die größeren Konsummöglichkeiten von Haushalten mit höheren Einkommen wieder. Größere Konsummöglichkeiten zeigen sich darin, dass bei einem gegebenen Einkommen überdurchschnittlich viel konsumiert oder gespart werden kann. Dies bedeutet aber, dass die Abweichungen (Residuen) von der Regressionsgeraden tendenziell größer sind als bei geringen Einkommen, bei denen der Konsumspielraum begrenzt ist. Hierdurch wird ausgedrückt, dass die Störgrößenvarianz bei hohen Einkommen größer ist als bei geringen Einkommen.

5.2 Welche inferenzstatistischen Konsequenzen ergeben sich für die OLS-Parameterschätzer eines multiplen Regressionsmodells im Falle von Heteroskedastizität?

Lösung:

Die OLS-Schätzer der Regressionskoeffizienten bleiben bei Heteroskedastizität zwar erwartungstreu; sie sind aber nicht mehr effizient. Das bedeutet, dass die Standardfehler (=Wurzel aus den Varianzen) der geschätzten Regressionskoeffizienten Schätzer verzerrt sind. Die Folge ist, dass die Signifikanztests über die Regressionskoeffizienten ungültig werden. Außerdem können die Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffzienten nicht mehr valide berechnet werden.

5.3 Erläutern Sie die Grundidee der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate (GLS-Methode) zur Beseitigung der Heteroskedastizität!

Lösung:

Liegt Heteroskedastizität vor, dann unterscheiden sich die Hauptdiagonalelemente der Kovarianzmatrix der Störgrößen:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

bzw. bei $\sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot \omega_t \cdot = \sigma^2 \cdot z_t^\delta$ (ω_t: Skalierungsvariable, für die in der Regel eine quadrierte exogene Variable z_t^2 gewählt wird)

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \begin{pmatrix} \omega_1 \cdot \sigma^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 \cdot \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \cdot \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}}_{\Omega}.$$

Es wird eine Transformationsmatrix **T**:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \end{pmatrix}$$

bestimmt, so dass gilt:

$$\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T} = \mathbf{\Omega}^{-1}.$$

Durch Multiplikation der Regressionsgleichung von links mit **T** erhält man die transformierte Regressionsgleichung:

$$\underbrace{\mathbf{Ty}}_{\mathbf{y}^*} = \underbrace{\mathbf{TX}}_{\mathbf{X}^*} \cdot \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\mathbf{Tu}}_{\mathbf{u}^*}.$$

Die Beobachtungswerte werden also mit den Werten der Transformationsmatrix multipliziert oder gewichtet (deshalb wird das Verfahren auch WLS-Schätzung genannt). Wie gezeigt werden kann, erfüllt die transformierte Störgröße die Standardannahmen des multiplen Regressionsmodells. Wie kann **T** bestimmt werden?

<u>Ansatz 1: Gruppenspezifische Heteroskedastizität</u>

Es werden für alle m Gruppen OLS-Schätzer separat berechnet:

Mit den OLS-Schätzern für die ℓte-Gruppe:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_\ell = \left(\mathbf{X}'_\ell \mathbf{X}_\ell\right)^{-1} \mathbf{X}'_\ell \mathbf{y}_\ell$$

werden die OLS-Residuen:

$$\hat{\mathbf{u}}_\ell = \mathbf{y}_\ell - \mathbf{X}_\ell \hat{\boldsymbol{\beta}}_\ell .$$

und die geschätzte Störgrößenvarianz (=Residualvarianz)

$$\hat{\sigma}_\ell^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}'_\ell \hat{\mathbf{u}}_\ell}{n-k}$$

für die ℓte-Gruppe bestimmt. Die geschätzten gruppenspezifischen Störgrößenvarianzen werden zur Definition der Transformationsmatrix **T** herangezogen:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}_1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\hat{\sigma}_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\hat{\sigma}_m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\hat{\sigma}_m} \end{pmatrix}$$

Der Ansatz ist allerdings nur eingeschränkt anwendbar, da

- die m Gruppen bekannt sein müssen (z.B. West/Ost-Regime).
- die Schätzung in der Regel nur bei geringer Gruppenzahl durchführbar sein wird, da die Schätzung der Störgrößenvarianz wenig präzise ist, wenn sie auf einer zu geringen Zahl von Beobachtungen basiert.

Ansatz 2: Heteroskedastizität in Abhängigkeit der Skalierungsvariablen ω

Die Skalierungsvariable ω wird durch die Potenz eine exogene Variable z vorgegeben, die im Allgemeinen eine erklärende Variable x_j des Regressionsmodells ist (z könnte auch eine exogene Variable sein, die nicht in das Modell zur Erklärung der y-Variablen herangezogen wird wie z.B eine Trendvariable). Im einfachsten Fall wird z mit der j-ten x-Variablen gleichgesetzt. Negative Werte werden von vornherein ausgeschaltet, wenn die x-Werte quadriert werden:

$$\omega_t = z_t^2 = x_{jt}^2 \text{ bzw. } \sigma_t^2 = z_t^2 \cdot \sigma^2 = x_{jt}^2 \cdot \sigma^2 .$$

Die Elemente werden in die Transformationmatrix eingetragen:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{j1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{j2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_{jn}} \end{pmatrix}.$$

Die transformierte Regressionsgleichung lässt sich dann auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \frac{y_t}{x_{jt}} & = & \hat{\beta}_1 & \frac{1}{x_{jt}} & + & \hat{\beta}_2 & \frac{x_{2t}}{x_{jt}} & \dots & + & \hat{\beta}_j & \frac{x_{jt}}{x_{jt}} & + & \dots & + & \hat{\beta}_k & \frac{x_{kt}}{x_{jt}} & + & \frac{\hat{u}_t}{x_{jt}} \\ \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & \uparrow & & \uparrow \\ y_t^* & & & x_{1t}^* & & & x_{2t}^* & & & & x_{jt}^* = 1 & & & & & x_{kt}^* & & \hat{u}_t^* \end{array} .$$

5.4 Testen Sie die Störterme des Modells der Erdgasnachfrage in Abhängigkeit vom Gaspreis (= Energiemodell Ia, Daten s. Aufg. 2.3) mit dem Goldfeld-Quandt-Test auf Heteroskedastizität (α=0,05)!

Lösung:

1. Schritt

Ordnen der Beobachtungsdaten nach den aufsteigenden Werten des j-ten Regressors, auf den die Heteroskedastizität zurückgeführt wird.

Hier ist nur ein echter Regressor vorhanden. Die Beobachtungswerte werden nach dem Gaspreis x_t geordnet:

t	x_t	y_t
5	12,2	1,2
7	12,5	1,4
1	12,9	1,0
6	12,9	1,1
4	13,2	0,9
3	13,7	0,7
2	13,8	0,8

2. Schritt

Aufteilung der Beobachtungsdaten in 2 gleich große Gruppen

Aufgrund der geringen und ungeraden Anzahl von Beobachtungen setzen wir c=1, so dass der mittlere Wert (t=6) des geordneten Datensatzes nicht verwendet wird. Er ist in der folgenden Tabelle grau unterlegt dargestellt. Oberhalb befinden sich die Perioden der ersten Stichprobe und unterhalb der zweiten Stichprobe.

	t	x_t	y_t
1. Stich-probe	5	12,2	1,2
	7	12,5	1,4
	1	12,9	1,0
	6	12,9	1,1
2. Stich-probe	4	13,2	0,9
	3	13,7	0,7
	2	13,8	0,8

3. Schritt

Hypothesenformulierung:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ und $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

4. Schritt

Festlegung des Signifikanzniveaus α: α = 0,05

5. Schritt

Durchzuführende Regressionen

<u>1. Stichprobe:</u>

$y_{1t} = \beta_{11} + \beta_{12} \cdot x_{1t} + u_{1t}$

a) OLS-Schätzer $\hat{\beta}_{11}$ und $\hat{\beta}_{12}$

t	x_t	y_t	x_t^2	$x_t \cdot y_t$
5	12,2	1,2	148,84	14,64
7	12,5	1,4	156,25	17,50
1	12,9	1,0	166,41	12,90
Σ	37,6	3,6	471,50	45,04

OLS-Schätzer der Regressionskoeffizienten β_1 und β_2:

$$\hat{\beta}_{12} = \frac{n_1 \cdot \sum x_{1t} y_{1t} - \sum x_{1t} \sum y_{1t}}{n_1 \cdot \sum x_{1t}^2 - (\sum x_{1t})^2} = \frac{3 \cdot 45{,}04 - 37{,}6 \cdot 3{,}6}{3 \cdot 471{,}5 - 37{,}6^2} = \frac{-0{,}24}{0{,}74} = -0{,}324$$

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{\sum y_{1t}}{n_1} - \hat{\beta}_{12} \cdot \frac{\sum x_{1t}}{n_1} = \frac{3{,}6}{3} - (-0{,}324) \cdot \frac{37{,}6}{3}$$

$$= 1{,}2 + \underbrace{0{,}324 \cdot 12{,}533}_{=4{,}061} = 5{,}261$$

OLS-geschätzte Nachfragefunktion für Erdgas:

$\hat{y}_{1t} = 5{,}261 - 0{,}324 \cdot x_{1t}$, t=5,7,1

b) Regressionswerte

t=5: $\hat{y}_{15} = 5{,}261 - 0{,}324 \cdot (x_{5t}=12{,}2) = 1{,}308$

t=7: $\hat{y}_{17} = 5{,}261 - 0{,}324 \cdot (x_{7t}=12{,}5) = 1{,}211$

t=1: $\hat{y}_{11} = 5{,}261 - 0{,}324 \cdot (x_{1t}=12{,}9) = 1{,}801$

c) Residuen

t=5: $\hat{u}_{15} = y_{15} - \hat{y}_{15} = 1{,}2 - 1{,}308 = -0{,}108$

t=7: $\hat{u}_{17} = y_{17} - \hat{y}_{17} = 1{,}4 - 1{,}211 = 0{,}189$

t=1: $\hat{u}_{11} = y_{11} - \hat{y}_{11} = 1{,}0 - 1{,}081 = -0{,}081$

d) Quadratsumme der Residuen

$$\hat{u}_1' \hat{u}_1 = \begin{pmatrix} -0{,}108 & 0{,}189 & -0{,}081 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}108 \\ 0{,}189 \\ -0{,}081 \end{pmatrix} = 0{,}0539$$

<u>2. Stichprobe:</u>

$y_{2t} = \beta_{21} + \beta_{22} \cdot x_{2t} + u_{2t}$

a) OLS-Schätzer $\hat{\beta}_{11}$ und $\hat{\beta}_{12}$

t	x_t	y_t	x_t^2	$x_t \cdot y_t$
4	13,2	0,9	174,24	11,88
3	13,7	0,7	187,69	9,59
2	13,8	0,8	190,44	11,04
Σ	40,7	2,4	552,37	32,51

	OLS-Schätzer der Regressionskoeffizienten β_1 und β_2: $\hat{\beta}_{22} = \frac{n_2 \cdot \sum x_{2t} y_{2t} - \sum x_{2t} \sum y_{2t}}{n_2 \cdot \sum x_{2t}^2 - (\sum x_{2t})^2} = \frac{3 \cdot 32{,}51 - 2{,}4 \cdot 40{,}7}{3 \cdot 552{,}37 - 40{,}7^2}$ $= \frac{-0{,}15}{0{,}62} = -0{,}242$ $\hat{\beta}_{21} = \frac{\sum y_{2t}}{n_2} - \hat{\beta}_{22} \cdot \frac{\sum x_{2t}}{n_2} = \frac{2{,}4}{3} - (-0{,}242) \cdot \frac{40{,}7}{3}$ $= 0{,}8 + \underbrace{0{,}242 \cdot 13{,}567}_{=3{,}283} = 4{,}083$ OLS-geschätzte Nachfragefunktion für Erdgas: $\hat{y}_{2t} = 4{,}083 - 0{,}242 \cdot x_{2t}$, t=6,5,7 b) Regressionswerte t=4: $\hat{y}_{14} = 4{,}083 - 0{,}242 \cdot (x_{4t}=13{,}2) = 0{,}889$ t=3: $\hat{y}_{13} = 4{,}083 - 0{,}242 \cdot (x_{3t}=13{,}7) = 0{,}768$ t=2: $\hat{y}_{12} = 4{,}083 - 0{,}242 \cdot (x_{2t}=13{,}8) = 0{,}743$ c) Residuen t=4: $\hat{u}_{24} = y_{24} - \hat{y}_{24} = 0{,}9 - 0{,}889 = 0{,}011$ t=3: $\hat{u}_{23} = y_{23} - \hat{y}_{23} = 0{,}7 - 0{,}768 = -0{,}068$ t=2: $\hat{u}_{22} = y_{22} - \hat{y}_{22} = 0{,}8 - 0{,}743 = 0{,}057$ d) Quadratsumme der Residuen $\hat{u}_2' \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}011 & -0{,}068 & 0{,}057 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}011 \\ -0{,}068 \\ 0{,}057 \end{pmatrix} = 0{,}0080$
6. Schritt	**Berechnen der Prüfgröße**: $1/GQ = \frac{\hat{u}_1' \hat{u}_1}{\hat{u}_2' \hat{u}_2} = \frac{0{,}0539}{0{,}0080} = 6{,}738$
7. Schritt	**Tabellarische Ermittlung des kritischen Wertes (α=0,05):** $F_{(n-c)/2-k;(n-c)/2-k;1-\alpha} = F_{(7-1)/2-2;(7-1)/2-2;0{,}95} = F_{1;1;0{,}95} = 161$
8. Schritt	**Testentscheidung**: $1/GQ = 6{,}738 < F_{1;1;0{,}95} = 161$ → H_0 annehmen Der Goldfeld-Quandt-Test weist nicht auf Heteroskedastizität der Störgröße hin.

5.5 Schätzen Sie die Nachfragefunktion nach Erdgas in Abhängigkeit vom Gaspreis (= Energiemodell Ia) unter Verwendung der Spezifikation $\sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot GASP_t^2$ der Störtermvarianz mit der gewichteten Methode der kleinsten Quadrate (WLS-Methode)!

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie die WLS-Schätzer für β_1 und β_2 unter Verwendung der Formeln für die OLS-Schätzer mit $y_t \to y_t^*, x_t \to x_{1t}^*$. Verwenden Sie die transformíerten Variablen sowie $(x_{1t}^*)^2$ und $x_{1t}^* \cdot y_t^*$ mit drei Dezimalstellen!

Lösung:

Die Spezifikation der Störvarianz in der Form

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \cdot GASP_t^2$$

führt zu dem transformierten ökonometrischen Nachfragemodell nach Erdgas ($GASV_t = y_t$, $GASP_t = x_t$):

$$\underbrace{\left(\frac{\widehat{GASV_t}}{GASP_t}\right)}_{y_t^*} = \beta_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{GASP_t}}_{x_{1t}^*} + \beta_2 \cdot \underbrace{\frac{GASP_t}{GASP_t}}_{x_{2t}^* = 1} + u_t^* = \beta_1 \cdot \frac{1}{GASP_t} + \beta_2 + u_t^*$$

Bei der Berechnung der WLS-Schätzer für β_1 und β_2 können die Formeln der OLS-Schätzer in folgender Form unter Verwendung der transformierten Variablen verwendet werden:

$$y_t \quad \to \quad y_t^*, \quad x_t \quad \to \quad x_{1t}^*$$

Arbeitstabelle:

t	x_t	y_t	$x_{1t}^* = 1/x_t$	$y_t^* = y_t / x_t$	$(x_{1t}^*)^2$	$x_{1t}^* \cdot y_t^*$
1	12,9	1,0	0,078	0,078	0,0061	0,0061
2	13,8	0,8	0,072	0,058	0,0052	0,0042
3	13,7	0,7	0,073	0,051	0,0053	0,0037
4	13,2	0,9	0,076	0,068	0,0058	0,0052
5	12,2	1,2	0,082	0,098	0,0067	0,0080
6	12,9	1,1	0,078	0,085	0,0061	0,0066
7	12,5	1,4	0,080	0,112	0,0064	0,0090
Σ	91,2	7,1	0,539	0,550	0,0416	0,0428

WLS-Schätzer der Regressionskoeffizienten β_1 und β_2:

$$\hat{\beta}_{1,WLS} = \frac{n \cdot \sum x_{1t}^* y_t^* - \sum x_{1t}^* \sum y_t^*}{n \cdot \sum (x_{1t}^*)^2 - (\sum x_{1t}^*)^2} = \frac{7 \cdot 0{,}0428 - 0{,}539 \cdot 0{,}550}{7 \cdot 0{,}0416 - 0{,}539^2} = \frac{0{,}00315}{0{,}00068} = 4{,}632$$

$$\hat{\beta}_{2,WLS} = \frac{\sum y_t^*}{n} - \hat{\beta}_{1,WLS} \cdot \frac{\sum x_{1t}^*}{n} = \frac{0{,}550}{7} - 4{,}632 \cdot \frac{0{,}539}{7} = 0{,}079 - \underbrace{4{,}632 \cdot 0{,}077}_{=0{,}357} = -0{,}278$$

WLS-geschätzte Nachfragefunktion für Erdgas:

$$\widehat{GASV}_t = 4{,}632 - 0{,}278 \cdot GASP_t$$

5.6 Der White-Test hat für das Energiemodell III folgendes Resultat erbracht:

White Heteroskedasticity Test:

Obs*R-squared	5.696925	Probability	0.457982

Test Equation: Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample: 1980 1995, Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-29.74777	58.70411	-0.506741	0.6245
GASPR	-25.04399	28.17182	-0.888973	0.3972
GASPR^2	17.07002	15.58422	1.095340	0.3018
FERNWPR	-21.22605	89.98156	-0.235893	0.8188
FERNWPR^2	8.174083	44.31804	0.184441	0.8578
VEINKR	0.068311	0.062335	1.095866	0.3016
VEINKR^2	-2.23E-05	2.03E-05	-1.097094	0.3011

R-squared	0.356058	Mean dependent var	0.376351
Adjusted R-squared	-0.073237	S.D. dependent var	0.682307
S.E. of regression	0.706851	Akaike info criterion	2.443642
Sum squared resid	4.496743	Schwarz criterion	2.781649
Log likelihood	-12.54913	F-statistic	0.829402
Durbin-Watson stat	2.894434	Prob(F-statistic)	0.575525

a) Erläutern Sie die Grundidee des White-Tests mit Bezug auf die durchgeführte Hilfsregression!

Lösung:

Grundidee des White-Tests:

Heteroskedastizität, die auf

- die erklärenden Variablen,
- die quadrierten Werte der erklärenden Variablen (→ Varianzkonzept)

zurückgeführt werden kann, wird modelliert und getestet.

b) Geben Sie die Testentscheidung des hier wiedergegebenen White-Testes unter Verwendung des kritischen Wertes und des p-Wertes an (α=0,10)! Interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung:

Nullhypothese des White-Tests:

H_0: $\sigma^2_t = \sigma^2$ für alle t (Homoskedastizität)

Prüfgröße:

$W = n \cdot R^2 = 16 \cdot 0{,}356058 = 5{,}697$ (R^2 aus Hilfsregression)

Kritischer Wert (α=0,10): $\chi^2_{r;0,90} = \chi^2_{6;0,90} = 10{,}6$

Testentscheidung:

$W = 5{,}697 < \chi^2_{6;0,90} = 10{,}6 \Rightarrow H_0$ beibehalten

oder

$p = 0{,}458 > \alpha = 0{,}10 \Rightarrow H_0$ beibehalten

Interpretation:

Der White-Test hat keine Heteroskedastizität aufgedeckt.

c) Geben Sie die Hilfsregression des vollständigen White-Testes für das Energiemodell III an und interpretieren Sie den hierzu gehörenden verkürzten Output:

White Heteroskedasticity Test:

Obs*R-squared	8.073769	Probability	0.526730

Lösung:

Vollständige Hilfsregression des White-Tests

$$\begin{aligned}\hat{u}_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot GASPR_t + \alpha_2 \cdot FERNWPR_t + \alpha_3 \cdot VEINKR_t + \alpha_{11} \cdot GASPR_t^2 \\ &+ \alpha_{22} \cdot FERNWPR_t^2 + \alpha_{33} \cdot VEINKR_t^2 + \alpha_{12} \cdot GASPR_t \cdot FERNWPR_t \\ &+ \alpha_{13} \cdot GASPR_t \cdot VEINKR_t + \alpha_{23} \cdot FERNWPR_t \cdot VEINKR_t + v_t\end{aligned}$$

mit $\hat{u}_t$ als Residuum der Nachfragefunktion nach Erdgas

Prüfgröße: $W = n \cdot R^2 = 8{,}074$

Testentscheidung:

Da $p = 0{,}527$ größer ist als alle gängigen Signifikanzniveaus ($\alpha=0{,}01$, $\alpha=0{,}05$. $\alpha=0{,}10$), kann die Nullhypothese einer homoskedastischen Störvarianz, H_0: $\sigma_t^2 = \sigma^2$ für alle t, nicht abgelehnt werden kann.

5.7 Bei einer Regression der Erdgasnachfrage auf den Gaspreis (= Energiemodell Ia, Daten s. Aufg. 2.3) ergeben sich folgende OLS-Residen:

t	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{u}_t$	-0,062	0,069	-0,067	-0,051	-0,119	0,038	0,191

a) Vergleichen Sie den Standardfehler des Regressionskoeffizienten des Gaspreises unter Annahme homoskedastischer Störterme mit Whites Heteroskedastizität-konsistentem Schätzer!

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der beiden Standardfehler die jeweiligen Summenformeln!

Lösung:

Gaspreis: x_t

t	x_t	$\hat{u}_t$	$x_t - \bar{x}$	$(x_t - \bar{x})^2$	$\hat{u}_t^2$	$(x_t - \bar{x})^2 \cdot \hat{u}_t^2$
1	12,9	-0.062	-0,129	0,016641	0,003844	0,000064
2	13,8	0,069	0,771	0,594441	0,004761	0,002830
3	13,7	-0,067	0,671	0,450241	0,004489	0,002021
4	13,2	-0,051	0,171	0,029241	0,002601	0,000076
5	12,2	-0,119	-0,829	0,687241	0,014161	0,009732
6	12,9	0,038	-0,129	0,016641	0,001444	0,000024
7	12,5	0,191	-0,529	0,279841	0,036481	0,010209
Σ	91,2	-0,001≈0	-0,003≈0	2,074287	0,067781	0,024956

$$\bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{t=1}^{7} x_t = \frac{1}{7} \cdot 91{,}2 = 13{,}029$$

• Standardfehler von $\hat{\beta}_2$ bei homoskedastischen Störtermen:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\sum \hat{u}_t^2 = \frac{1}{7-2} \cdot 0{,}067781 = 0{,}013556$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2{,}074287} \cdot 0{,}013556 = 0{,}006535$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0{,}006535} = 0{,}080839$$

• Whites Heteroskedastizitäts-konsistenter Standardfehler von $\hat{\beta}_2$:

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum (x_t - \bar{x})^2 \cdot \hat{u}_t^2}{\left[\sum (x_t - \bar{x})^2\right]^2} = \frac{0{,}024956}{2{,}074287^2} = 0{,}005800$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0{,}005800} = 0{,}076158$$

b) Geben Sie Whites Heteroskedastizität-konsistente Schätzer der Standardfehler der beiden Regressionskoeffizienten mit Hilfe der Kovarianzmatrix $\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ an!

Lösung:

Whites Heteroskedastizität-konsistente Schätzer Kovarianzmatrix $\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, ..., \hat{u}_n^2)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Beobachtungsmatrix **X**:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 12{,}9 \\ 1 & 13{,}8 \\ 1 & 13{,}7 \\ 1 & 13{,}2 \\ 1 & 12{,}2 \\ 1 & 12{,}9 \\ 1 & 12{,}5 \end{bmatrix}$$

Produktmatrix **X'X**:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12{,}9 & 13{,}8 & 13{,}7 & 13{,}2 & 12{,}2 & 12{,}9 & 12{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 12{,}9 \\ 1 & 13{,}8 \\ 1 & 13{,}7 \\ 1 & 13{,}2 \\ 1 & 12{,}2 \\ 1 & 12{,}9 \\ 1 & 12{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 91{,}2 \\ 91{,}2 & 1190{,}28 \end{bmatrix}$$

Inverse der Produktmatrix **X'X**:

$$(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 81{,}975207 & -6{,}280992 \\ -6{,}280992 & 0{,}482094 \end{bmatrix}$$

Geschätzte Kovarianzmatrix der Störterme:

$$\hat{\mathrm{Cov}}(\mathrm{u}) = \mathrm{diag}(\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, ..., \hat{u}_n^2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}003844 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004761 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}004489 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}002601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}014161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}036481 \end{bmatrix}$$

Whites Heteroskedastizität-konsistente Schätzer Kovarianzmatrix $\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{diag}(\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, ..., \hat{u}_n^2)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 81{,}975207 & -6{,}280992 \\ -6{,}280992 & 0{,}482094 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12{,}9 & 13{,}8 & 13{,}7 & 13{,}2 & 12{,}2 & 12{,}9 & 12{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 0{,}003844 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}004761 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}004489 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}002601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}014161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}036481 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 12{,}9 \\ 1 & 13{,}8 \\ 1 & 13{,}7 \\ 1 & 13{,}2 \\ 1 & 12{,}2 \\ 1 & 12{,}9 \\ 1 & 12{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 81{,}975207 & 6{,}280992 \\ 6{,}280992 & 0{,}482094 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}032797 & 0{,}077475 \\ 0{,}077475 & 0{,}005817 \end{bmatrix}$$

Heteroskedastizität-konsistente Standardfehler der Regressionskoeffizienten:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{1{,}032797} = 1{,}016266$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{0{,}005817} = 0{,}076269$$

5.8 Erörtern Sie die Vor- und Nachteile einer Verwendung von Heteroskedastizitäts-konsistenten (HC) Standardfehlern anstelle einer GLS-Schätzung (verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Schätzung) des Regressionsmodells!

Lösung:

Während bei der GLS-Schätzung eine Hypothese über das Zustandekommen der Heteroskedastizität aufzustellen ist, braucht bei der Verwendung Heteroskedastizitäts-konsistenter (HC) Standardfehler keine spezielle Form der Heteroskedastizität unterstellt zu werden. Vielmehr wird prominent auf die Quadrate der OLS-Residuen, , als Schätzer der heteroskedastischen Varianzen der Störgröße, , abgestellt. Da oft statt einer genauen Kenntnis nur Anhaltspunkte über die Ursache der Heteroskeastizität vorhanden sind, werden in der ökonometrischen Praxis vorzugsweise Heteroskedastizitäts-konsistenter (HC) Standardfehler eingesetzt.

Unabhängig von der Wahl einer der beiden Verfahrensweisen, einer GLS-Schätzung oder einer Verwendung Heteroskedastizitäts-konsistenter (HC) Standardfehler, sind die geschätzten Regressionskoeffizienten erwartungstreu. Für beide Verfahrensweisen lässt sich zeigen, dass die Verzerrung geschätzten Standardfehler der Regressionskoeffizienten mit wachsendem Stichprobenumfang gegen null geht. Durch die Verwendung von Anpassungsfaktoren für endliche Stichproben, soll die Gültigkeit der Signifikanztest und Konfidenzintervalle auch bei geringen Stichprobenumfängen hergestellt werden.

Die beste Präzision (Effizienz) der geschätzten Regressionskoeffizienten lässt sich dagegen nicht bei Verwendung Heteroskedastizitäts-konsistenter (HC) Standardfehler, sondern nur durch eine verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Schätzung (GLS-Schätzung). Der Genauigkeitsvorteil tritt allerdings nur dann ein, wenn die Quelle und Form der Heteroskedastizität bekannt und daher explizit bei der GLS-Schätzung Berücksichtigung finden können.

5.9 Warum kommt der originäre White-Schätzer bei einer HC-Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ in der Regel in modifizierter Form zur Anwendung? Erläutern Sie die drei Modifikationen des White-Schätzers, die in dem Statistik-Programm R verfügbar sind!

Lösung:

Der originäre White-Schätzer für $\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ ist konsistent, d.h. er nähert sich mit wachsendem Stichprobenumfang immer besser an die Varianz-Kovarianz-Matrix der geschätzten Regres-sionskoeffizienten an. Die Konsistenz beinhaltet eine Aussage über das asymptotische Verhalten des Schätzers, sagt jedoch noch nichts über seine Eigenschaften bei endlichen Stichproben aus. Simulationsstudien deuten darauf hin, dass die originäre White-Korrektur die „wahren" Varianzen der geschätzten Regressionskoeffizienten bei kleinen Stichproben unterschätzt. Aus diesem Grund sind verschiedene Endlichkeitskorrekturen vorgeschlagen worden, die darauf abzielen, den White-Schätzer bei vorhandener Heteroskedastizität nach Vornahme einer Modifikation auch im Falle von kleinen Stichproben einsetzen zu können.

Im Programm R ist der White-Schätzer in den Pakten car und sandwich unter der Bezeich-nung „hc0" bzw. „HC0" verfügbar. Die verschiedenen Modifikationen des White-Schätzers in den beiden R-Paketen, „hc1", „hc2", „hc3" und „hc4" bzw. „HC1", „HC2", „HC3" und „HC4", beinhalten unterschiedliche Formen der Endlichkeitskorrektur. Hier sei die Erläuterung auf die ersten drei Modifikationen des White-Schätzers beschränkt.

Der HC1-Schätzer („hc1" bzw. „HC1") geht davon aus, dass Erwartungstreue oft durch Ersetzung der Beobachtungszahl n durch die Anzahl der Freiheitsgrade hergestellt werden kann. Da einer Berechnung der Varianzen $\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)$ aufgrund der Schätzung der Regres-sionskoeffizienten β_j, 1=1,2,…,k, k Restriktionen zugrunde liegen, wird nach diesem Prinzip der Faktor 1/n in der $\hat{\mathbf{S}}_0$-Matrix durch den Faktor 1/(n-k) ersetzt. Damit ergibt sich der HC1-Schätzer aus dem HC0-Schätzer (White-Schätzer) durch Multiplikation mit dem Korrekturfaktor n/(n-k).

Der HC2-Schätzer geht von einer Differenzierung zwischen der Varianz der Störgrößen u_t, $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma_t^2$, und der Varianz der OLS-Residuen $\hat{u}_t$, $\mathrm{Var}(\hat{u}_t) = \sigma_t^2(1-h_{tt})$ aus. Die Größen h_{tt} sind dabei die Hauptdiagonalelemente der Hat-Matrix (Projektionsmatrix) $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. Wegen $1/n \le h_{tt} \le 1$ sind die Varianzen $\mathrm{Var}(\hat{u}_t)$ der OLS-Residuen allgemein kleiner als die Varianzen σ_t^2 der Störgrößen. Dementsprechend bei einer Verwendung der Größen $\hat{u}_t^2/(1-h_{tt})$ an Stelle der quadrierten Residuen $\hat{u}_t^2$ zur Schätzung der Varianzen σ_t^2 der Störgrößen ein Abbau der Unterschätzung bei endlichen Stichproben zu erwarten.

Bei dem HC3-Schätzer wird die Nennergröße des HC2-Schätzers analog zu der Zählergröße $\hat{u}_t^2$ in quadrierter Form $\hat{u}_t^2/(1-h_{tt})^2$ verwendet. Formal ist diese Korrektur jedoch schwieriger mit der sog. Jackknife-Technik zu begründen. In Simulationsstudien zeigt der HC3-Schätzer im Falle kleiner Stichproben eine superiore Performance, die dazu geführt hat, dass dieser Schätzer die Voreinstellung in den R-Funktionen car und sandwich ist.

5.10 Einige Modifikationen des White-Schätzers machen von der Hat-Matrix (Projektionsmatrix)) $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}$Gebrauch.

a) Zeigen Sie, dass sich der Vektor der Regressionswerte $\hat{\mathbf{y}}$ mit Hilfe der Hat-Matrix $\mathbf{H}$ aus dem Vektor der abhängigen Variablen $\mathbf{y}$ berechnen lässt!

Lösung:

Mit dem OLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$,

(1) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$

lässt sich der Vektor der Regressionswerte $\hat{\mathbf{y}}$ durch

(2) $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}$

berechnen. Setzt man (1) in (2) ein, erhält man die Beziehung

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y},$$

die sich unter Verwendung der Definition der Hat-Matrix **H**,

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'},$$

in der Form

(3) $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{y}$

schreiben lässt.

b) Stellen Sie die Beziehung zwischen dem Vektor der OLS-Residuen, $\hat{\mathbf{u}}$, und dem Vektor der Störgrößen, $\mathbf{u}$, mit Hilfe der Hat-Matrix $\mathbf{H}$ dar!

Lösung:

Der Vektor der OLS-Residuen, $\hat{\mathbf{u}}$, ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Vektor der abhängigen Variablen, **y**, und dem Vektor der Regressionswerte, $\hat{\mathbf{y}}$:

(4) $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

Setzt man hierin Gleichung (3) aus Teil a) ein, ergibt sich die Gleichung

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{y},$$

die nach Ausklammern von **y** in die Beziehung

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{y}$$

mit **I** als nxn Einheitsmatrix übergeht.