Aufgaben zur Ökonometrie I

6. Autokorrelation

6.1 Welche Problematik ist mit einer Autokorrelation der Störterme eines ökonometrischen Modells verbunden?

Lösung:

- Die OLS-Schätzer sind nicht mehr effizient, d.h. die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Schätzung verliert an Genauigkeit. Sie lässt sich mit modifizierten Schätzmethoden verbessern.
- Die Standardfehler (=Wurzel aus den Varianzen) der Regressionskoeffizienten werden mit OLS verzerrt geschätzt. Damit sind die t-Tests und die Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten nicht mehr valide (gültig).

6.2 Wodurch ist ein Markov-Prozess gekennzeichnet?

Lösung:

Ein Markov-Prozess ist ein autoregressiver Prozess erster Ordnung (AR(1)-Prozess).. Bei einem Markov-Prozess ist die aktuelle Störgröße von der Störgröße der Vorperiode abhängig,

$$u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t \,, \quad |\phi| < 1 \,,$$

wobei für die Stögröße (Innovation) v_t Standardannahmen (white noise) gelten.

ϕ ist der autoregressive Parameter, der absolut kleiner als eins sein muss, weil sonst „shocks“ aus der Vergangenheit persistent (Dauerhaft) wären. Genauer käme es zu einer explosiven Entwicklung Ein Schock, der in der Periode t auftritt, würde sich dann im Laufe der Zeit kontinuierlich verstärken.

6.3 Die Residuen der Nachfragefunktion für Erdgas in Abhängigkeit vom Gaspreis (≙ Energiemodell Ia) lauten:

t	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{u}_t$	-0,062	0,069	-0,067	-0,051	-0,119	0,038	0,191

Bestimmen Sie die Autokorrelationskoeffizienten 1., 2. und 3. Ordnung!

Lösung:

Arbeitstabelle:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_{t-2}$	$\hat{u}_{t-3}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-3}$	$\hat{u}_t^2$
1	-0,062	-	-	-	-	-	-	0,0038
2	0,069	-0,062	-	-	-0,0043	-	-	0,0048
3	-0,067	0,069	-0,062	-	-0,0046	0,0042	-	0,0045
4	-0,051	-0,067	0,069	-0,062	0,0034	-0,0035	0,0032	0,0026
5	-0,119	-0,051	-0,067	0,069	0,0061	0,0080	-0,0082	0,0142
6	0,038	-0,119	-0,051	-0,067	-0,0045	-0,0019	-0,0025	0,0014
7	0,191	0,038	-0,119	-0,051	0,0073	-0,0227	-0,0097	0,0365
Σ					0,0034	-0,0159	-0,0172	0,0678

Autokorrelationskoeffizienten 1. Ordnung:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{7} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{7} \hat{u}_t^2} = \frac{0{,}0034}{0{,}0678} = 0{,}050$$

Autokorrelationskoeffizienten 2. Ordnung:

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{7} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}}{\sum_{t=1}^{7} \hat{u}_t^2} = \frac{-0{,}0159}{0{,}0678} = -0{,}235$$

Autokorrelationskoeffizienten 3. Ordnung:

$$\hat{\rho}_3 = \frac{\sum_{t=4}^{7} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-3}}{\sum_{t=1}^{7} \hat{u}_t^2} = \frac{-0{,}0172}{0{,}0678} = -0{,}254$$

6.4 Testen Sie die Störgröße (Residuen s. Aufg. 6.3) der Nachfragefunktion nach Erdgas in Abhängigkeit vom Gaspreis (≙ Energiemodell Ia) mit dem Durbin-Watson-Test auf Autokorrelation (α=0,05)! (mit Extrapolation)

Lösung:

Schritt 1: **Formulierung der Nullhypothese**: $H_0 : \phi = 0 \quad (\hat{=}\ \rho_1 = 0)$

Schritt 2: **Festlegung des Signifikanzniveaus α:** $\alpha = 0{,}05$

Schritt 3: **Berechnen der Prüfgröße**

Arbeitstabelle:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}$	$(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$	$\hat{u}_t^2$
1	-0,062	-	-	-	0,0038
2	0,069	-0,062	0,131	0,0172	0,0048
3	-0,067	0,069	-0,136	0,0185	0,0045
4	-0,051	-0,067	0,016	0,0003	0,0026
5	-0,119	-0,051	-0,068	0,0046	0,0142
6	0,038	-0,119	0,157	0,0246	0,0014
7	0,191	0,038	0,153	0,0234	0,0365
Σ				0,0886	0,0678

Durbin-Watson-Statistik:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{7}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{7}\hat{u}_t^2} = \frac{0{,}0886}{0{,}0678} = 1{,}307$$

Schritt 4: **Bestimmung der kritischen Werte**:

Da für n = 7, k = 2 (einschl. Scheinvariable), keine Tabellenwerte verfügbar sind, bestimmen wir d_u und d_o durch Extrapolation:

Differenz der d_u-Werte für n=15 und 16 (1,08 und 1,10): 0,02

→ untere Schranke für n=7: $d_u = 1{,}08 - 8 \cdot 0{,}02 = 1{,}08 - 0{,}16 = 0{,}92$

Differenz der d_o-Werte für n=15 und 16 (1,36 und 1,37): 0,01

→ obere Schranke für n=7: $d_o = 1{,}36 - 8 \cdot 0{,}01 = 1{,}36 - 0{,}08 = 1{,}28$

Schritt 5: **Testentscheidung:**

$DW = 1{,}307 \in [d_o = 1{,}28;\ 4 - d_o = 4 - 1{,}28 = 2{,}72]$

$\Rightarrow$ keine Autokorrelation

6.5 Bestimmen Sie Regressionskoeffizienten β_1 und β_2 der Nachfragefunktion für Erdgas in Abhängigkeit vom Gaspreis (≙ Energiemodell Ia, Daten s. Aufg. 2.3) mit der Cochran-Orcutt-Methode!

Hinweis: Berechnen Sie die transformierten Variablen mit drei Dezimalstellen!

Lösung:

1. Schritt:

Durchführung der OLS-Regression (originäre Variablen):

$$\underbrace{\widehat{GASV}_t}_{\hat{y}_t} = 5{,}809 - 0{,}368 \cdot \underbrace{GASP_t}_{x_t}$$ → (s. Aufg. 2.3)

OLS-Residuen (s. Aufg. 6.3):

t	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{u}_t$	-0,062	0,069	-0,067	-0,051	-0,119	0,038	0,191

2. Schritt:

Durchführung der Hilfsregression

$$\hat{u}_t = \phi \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t$$

OLS-Schätzer für den autoregressiven Parameter ϕ:

$$\hat{\phi} \approx \frac{\sum_{t=2}^{7} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{7} \hat{u}_t^2} = \frac{0{,}0034}{0{,}0678} = 0{,}050$$ (Zähler und Nenner s. Aufg. 6.3)

3. Schritt

Variablentransformationen

Abhängige Variable: $y_t^* = y_t - \hat{\phi} \cdot y_{t-1} = y_t - 0{,}050 \cdot y_{t-1}$

t=2: $y_2^* = y_2 - \hat{\phi} \cdot y_1 = 0{,}8 - 0{,}050 \cdot 1{,}0 = 0{,}750$

t=3: $y_3^* = y_3 - \hat{\phi} \cdot y_2 = 0{,}7 - 0{,}050 \cdot 0{,}8 = 0{,}660$

t=4: $y_4^* = y_4 - \hat{\phi} \cdot y_3 = 0{,}9 - 0{,}050 \cdot 0{,}7 = 0{,}865$

t=5: $y_5^* = y_5 - \hat{\phi} \cdot y_4 = 1{,}2 - 0{,}050 \cdot 0{,}9 = 1{,}155$

t=6: $y_6^* = y_6 - \hat{\phi} \cdot y_5 = 1{,}1 - 0{,}050 \cdot 1{,}2 = 1{,}040$

t=7: $y_7^* = y_7 - \hat{\phi} \cdot y_6 = 1{,}4 - 0{,}050 \cdot 1{,}1 = 1{,}345$

Unabhängige Variable: $x_t^* = x_t - \hat{\phi} \cdot x_{t-1} = x_t - 0{,}050 \cdot x_{t-1}$

t=2: $x_2^* = x_2 - \hat{\phi} \cdot x_1 = 13{,}8 - 0{,}050 \cdot 11{,}9 = 13{,}155$

t=3: $x_3^* = x_3 - \hat{\phi} \cdot x_2 = 13{,}7 - 0{,}050 \cdot 13{,}8 = 13{,}010$

t=4: $x_4^* = x_4 - \hat{\phi} \cdot x_3 = 13{,}2 - 0{,}050 \cdot 13{,}7 = 12{,}515$

t=5: $x_5^* = x_5 - \hat{\phi} \cdot x_4 = 12{,}2 - 0{,}050 \cdot 13{,}2 = 11{,}540$

t=6: $x_6^* = x_6 - \hat{\phi} \cdot x_5 = 12{,}9 - 0{,}050 \cdot 12{,}2 = 12{,}290$

t=7: $x_7^* = x_7 - \hat{\phi} \cdot x_6 = 12{,}5 - 0{,}050 \cdot 12{,}9 = 11{,}855$

4. Schritt:

Durchführung der GLS-Regression (transformierte Variablen)

$$y_t^* = \beta_1 \cdot (1-\phi) + \beta_2 \cdot x_t^* + u_t^*$$

Arbeitstabelle:

t	x_t^*	y_t^*	$(x_t^*)^2$	$x_t^* y_t^*$
2	13,155	0,750	173,054	9,8663
3	13,010	0,660	169,260	8,5866
4	12,515	0,865	156,625	10,8255
5	11,540	1.155	133,172	13,3287
6	12,290	1,040	151,044	12,7816
7	11,855	1,345	140,541	15,9450
Σ	74,365	5,815	923,696	71,337

GLS-Schätzer für β_1 und β_2 nach der Cochran-Orcutt-Methode:

$$\hat{\beta}_{2,GLS}^{*CO} = \hat{\beta}_{2,GLS}^{CO} = \frac{(n-1)\cdot \sum x_{1t}^* y_t^* - \sum x_{1t}^* \sum y_t^*}{(n-1)\cdot \sum (x_{1t}^*)^2 - (\sum x_{1t}^*)^2}$$

$$= \frac{6 \cdot 71{,}3337 - 74{,}365 \cdot 5{,}815}{6 \cdot 923{,}696 - 74{,}365^2} = \frac{-4{,}4303}{12{,}0228} = -0{,}368$$

$$\hat{\beta}_{1,GLS}^{*CO} = \frac{\sum y_t^*}{n-1} - \hat{\beta}_{2,GLS}^{CO} \cdot \frac{\sum x_{1t}^*}{n-1}$$

$$= \frac{5{,}815}{6} - (-0{,}368) \cdot \frac{74{,}365}{6} = 0{,}969 + \underbrace{0{,}368 \cdot 12{,}394}_{=4{,}561} = 5{,}530$$

$$\hat{\beta}_{1,GLS}^{CO} = \hat{\beta}_{1,GLS}^{*CO} / (1-\hat{\phi}) = 5{,}530 / (1-0{,}050) = 5{,}821$$

GLS-geschätzte Nachfragefunktion für Erdgas (Cochran-Orcutt-Verfahren):

$$\widehat{GASV}_t = 5{,}821 - 0{,}368 \cdot GASP_t$$

6.6 Bei der OLS-Schätzung des Energiemodells III (n=16, k=4) ist eine Durbin-Watson-Statistik von 1.461 ausgewiesen worden (s. EViews-Output in Aufg. 3.8). Der Breusch-Godfrey-Test hat folgendes Ergebnis erbracht:

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.829749	Probability	0.464089
Obs*R-squared	2.277282	Probability	0.320254

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 01/25/07 Time: 15:21
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.082397	5.704853	0.365022	0.7227
GASPR	-1.018045	3.637415	-0.279881	0.7853
FERNWPR	-0.029593	4.465805	-0.006627	0.9948
VEINKR	-0.000772	0.002214	-0.348600	0.7346
RESID(-1)	0.314813	0.313126	1.005389	0.3384
RESID(-2)	-0.340237	0.367477	-0.925873	0.3763

R-squared	0.142330	Mean dependent var	-5.90E-16
Adjusted R-squared	-0.286505	S.D. dependent var	0.633593
S.E. of regression	0.718648	Akaike info criterion	2.457107
Sum squared resid	5.164552	Schwarz criterion	2.746828
Log likelihood	-13.65685	F-statistic	0.331899
Durbin-Watson stat	2.257740	Prob(F-statistic)	0.882416

a) Wie groß ist der empirische Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung der Residuen?

Lösung:

Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnun

$$DW \approx 2\cdot(1 - \hat{\phi}) = 2 - 2\cdot\hat{\phi}$$

$$2\cdot\hat{\phi} \approx 2 - DW$$

$$\hat{\phi} \approx 1 - 0{,}5\cdot DW = 1 - 0{,}5\cdot 1{,}461$$

$$= 1 - 0{,}731 = 0{,}269 \ (\approx \hat{\rho}_1)$$

b) Setzen Sie den Durbin-Watson-Test zur Überprüfung der Störgröße auf Autokorrelation ein (α=0,05) und interpretieren Sie das Testergebnis!

Lösung:

Durbin-Watson-Test:

DW = 1,461 (s. Angabe in der Aufg.stellung)

Nullhypothese: H_0: $\rho_1 = 0$

Kritische Werte (α=0,05; n=16; k=4):

$d_u = 0{,}86$; $d_o = 1{,}73$

Testentscheidung:

DW = 1,461 $\in [d_u = 0{,}86\ ;\ d_o = 1{,}73]$

$\Rightarrow$ Keine Aussage über Autokorrelation 1. Ordnung möglich, da DW im unteren Unschärfeberich liegt

c) Was wird mit dem hier gegebenen Ergebnissen des Breusch-Godfrey Tests überprüft? Geben Sie die Testentscheidung unter Verwendung des kritischen Wertes und des p-Wertes an (α=0,05)!

Lösung:

Breusch-Godfrey-Test:

Prüft hier die Störvariable auf Autokorrelation 2. Ordnung, da in der Hilfsregression die um eine und zwei Perioden verzögerten Residuen enthalten sind

Nullhypothese H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Prüfgröße:

$BG = n \cdot R^2 = 16 \cdot 0{,}14233 = 2{,}277$ (R^2 aus Hilfsregression)

Kritischer Wert: (α=0,05 bei 2 Freiheitsgraden):

$\chi^2_{2;0,95} = 5{,}991$

Testentscheidung:

$BG = 2{,}277 < \chi^2_{2;0,95} = 5{,}991 \Rightarrow H_0$ beibehalten

oder

$p = 0{,}320 > \alpha = 0{,}05 \Rightarrow H_0$ beibehalten

d) Die ersten fünf Residuen lauten: 0.5015, 0.6295, 0.7923, 0.7100, 0.0579. Geben Sie die jeweils die ersten fünf Werte der Reihen RESID(-1) und RESID(-2) an, die beim Breusch-Godfrey-Test verwendet werden!

Lösung:

RESID(-1): 0 0,5015 0,6295 0,7923 0,7100

RESID(-2): 0 0 0,5015 0,6295 0,7923