3.3 Konfidenzintervalle für Regressionskoeffizienten

Konfidenzintervall (Intervallschätzung):
Angabe des Bereichs, in dem der "wahre" Regressionskoeffizient mit einer großen Wahrscheinlichkeit liegen wird

Konstruktion eines Konfidenzintervalls für den unbekannten Regressionskoeffizienten β_j

Hierzu gehen wir von dem t-Wert des Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_j$ (standardisierter Regressionskoeffizient) aus,

(3.15) $$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}}$$

der t-verteilt ist mit n-k Freiheitsgraden. Die Wahrscheinlichkeit, dass der standardisierte Regressionskoeffizient in einem symmetrischen Intervall um seinen Erwar-tungswert 0 liegt, ist durch

$$P\left(-t_{n-k;1-\alpha/2} \le t \le t_{n-k;1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$t_{n-k;1-\alpha/2}$: (1-α/2)-Quantil der t-Verteilung mit n-k Freiheitsgraden

gegeben. Mit (3.15) erhält man

$$P\left(-t_{n-k;1-\alpha/2} \le \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}} \le t_{n-k;1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

und nach weiterer Umformung

(3.16) $$P\left(\hat{\beta}_j - t_{n-k;1-\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}} \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + t_{n-k;1-\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}\right) = 1-\alpha$$

Gleichung (3.16) gibt das Konfidenzintervall für β_j zum Konfidenzniveau (=Vertrauenswahrscheinlichkeit) 1-α an. Bei Normalverteilung der Störvariablen u liegt der unbekannte Regressionskoeffizient β_j mit einer Wahrscheinlichkeit von 1-α in dem Intervall

$$\hat{\beta}_j \pm t_{n-k;1-\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}$$

Konfindenzintervalle für β_1 und β_2 bei einfacher Regression:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{n-2;1-\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}}$$

und

$$\hat{\beta}_2 \pm t_{n-2;1-\alpha/2}\cdot\hat{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{n}{n\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}}$$

Beispiel:

Als Punktschätzer für die marginale Konsumquote c_1 der makroökonomischen Konsumfunktion ist der Wert 0,9335 ermittelt worden. Bei wirtschaftspolitischen Maßnahmen ist jedoch von Interesse, in welchem Bereich die marginale Konsumquote mit einem hohen Konfidenzniveau liegen wird. Aus diesem Grund ist die Punktschätzung für die marginale Konsumquote ist durch ein **Konfidenzintervall** zu ergänzen.

Ein **95%-Konfidenzintervall** für die marginale Konsumquote ist durch

$$\hat{c}_1 \pm t_{n-2;0,975} \cdot \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n}{n\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}}$$

gegeben. Bekannt sind die Größen, die zur Berechnung der Standardabweichung von c_1 benötigt werden:

$$\hat{\sigma} = 8{,}1103, \quad n = 19, \quad \sum x_t^2 = 37472832, \quad \sum x_t = 26529{,}9$$

Unter Verwendung des 0,975-Quantils $t_{17;0,975}$ =2,110 der t-Verteilung mit 17 Freiheits-graden erhält man damit das **Konfidenzintervall**

$$\left[0{,}9335 - 2{,}110 \cdot 8{,}11 \cdot \sqrt{\frac{19}{19 \cdot 37472832 - 26529{,}9^2}};\quad 0{,}9335 + 2{,}110 \cdot 8{,}11 \cdot \sqrt{\frac{19}{19 \cdot 37472832 - 26529{,}9^2}}\right]$$

$$\left[0{,}9335 - 2{,}110 \cdot 0{,}0124;\quad 0{,}9335 + 2{,}110 \cdot 0{,}0124\right] = \left[0{,}9074\,;\,0{,}9596\right]$$

für die marginale Konsumquote zum **Konfidenzniveau von 95 %**. □

Beispiel:

In der Geldpolitik werden zu verschiedenen Zwecken Bereiche für die Größenordnung monetärer Variablen verwendet. Hier soll eine Intervallschätzung der Einkommens- und Zinselastizität der Geldnachfrage vorgenommen werden. Die **95%-Konfidenzintervalle** für die Einkommens- und Zinselastizität lauten

$$\hat{\beta}_2 \pm t_{0,975;n-3} \cdot \sqrt{\widehat{VAR}\left(\hat{\beta}_2\right)}$$

und

$$\hat{\beta}_3 \pm t_{0,975;n-3} \cdot \sqrt{\widehat{VAR}\left(\hat{\beta}_3\right)}$$

Das 0,975-Quantil der t-Verteilung mit 16 Freiheitsgraden, die sich aus dem Stichpro-benumfang von n=19 ergeben, beträgt 2,120. Mit den Schätzern

$$\hat{\beta}_2 = 2,81 \qquad \text{und} \qquad \hat{\beta}_3 = -0,189$$

und den Standardabweichungen

$$\sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2\right)} = 0,159 \quad \text{und} \qquad \sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_3\right)} = 0,0297$$

erhält man für die Einkommenselastizität das 95%-Konfidenzintervall

$$\left[2{,}81 - 2{,}120 \cdot 0{,}159\,; \quad 2{,}81 + 2{,}120 \cdot 0{,}159\right] = \left[2{,}4747; \quad 3{,}1478\right]$$

und für die Zinselastizität das 95%-Konfidenzintervall

$$\left[-0{,}189 - 2{,}120 \cdot 0{,}0297\,; \quad -0{,}189 + 2{,}120 \cdot 0{,}0297\right] = \left[-0{,}2521\,; \quad -0{,}1261\right] \qquad \square$$

Wahl und Interpretation des Konfidenzniveaus 1-α:

Gängige Werte für 1-α: 0,95 und 0,99 (ggf. 0,90)

Wird ein Konfidenzniveau von 0,95 gewählt, hat man eine 95%ige Sicherheit, dass das Konfidenzintervall den unbekannten Regressionskoeffizienten β_j überdeckt.

Konflikt zwischen Genauigkeit (=Länge des Konfidenzintervalls) und Konfidenzniveau (=Vertrauenswahrscheinlichkeit):
Je größer das Konfidenzniveau, um so unpräziser wird die Intervallschätzung.

→ Bei einer gegebenen Stichprobe kann die Genauigkeit der Intervallschätzung nur durch eine Verringerung des Konfidenzniveaus (z.B. von 99% auf 95%) erreicht werden.

Dagegen kann die Gefahr, dass das Konfidenzintervall den unbekannten Regressionskoeffizienten β_j nicht überdeckt nur durch eine Erhöhung des Konfidenzniveaus (z.B. von 95% auf 99%) vermindert werden.

Wenn ein Konfidenzintervall den Wert 0 nicht überdeckt, bedeutet dies gleichzeitig, dass der geschätzte Regressionskoeffizient signifikant verschieden von 0 ist.

3.4 Varianzanalyse und Signifikanz des Gesamtzusammenhangs

Der Determinationskoeffizient ist ein Maß für die Güte der Anpassung, das hauptsächlich deskriptiv interpretiert wird. Jedoch sind die hierin eingehenden Quadratsummen Zufallsvariablen, die eine varianzanalytische Prüfung zulassen. Bei einer Varianzanalyse (Analysis of Variance = ANOVA) eines ökonometrischen Modells wird die Summe der quadrierten Abweichungen der Werte der endogenen Variablen y von ihrem Mittel $\bar{y}$ in die durch die Regression "erklärte" Quadratsumme und die Abweichungsquadratsumme der Residuen aufgeteilt. In einer ANOVA-Tabelle, die die Grundlage eines Signifikanztests über den Gesamtzusammenhang ist, werden zusätzlich die Freiheitsgrade und die mittleren quadratischen Abweichungen ausgewiesen.

Übersicht: ANOVA-Tabelle für eine Regressionsanalyse

Quelle der Streuung	Summe der Abweichungsquadrate	Freiheitsgrade	Mittlere Abweichungsquadratsumme
Regression (erklärt)	$\sum(\hat{y}_t - \bar{y})^2 = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - n\bar{y}^2 = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	k-1	$\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2\right) / (k-1)$
Residuen (unerklärt)	$\sum \hat{u}_t^2 = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$	n-k	$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} / (n-k)$
gesamt	$\sum(y_t - \bar{y})^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2$	n-1	

Nullhypothese für einen Test des Gesamtzusammenhangs:

(3.17) $$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$$

Prüfgröße des Tests:

(3.18a) $$F = \frac{\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2\right) / (k-1)}{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} / (n-k)}$$ oder (3.18b) $$F = \frac{R^2 / (k-1)}{\left(1 - R^2\right) / (n-k)}$$

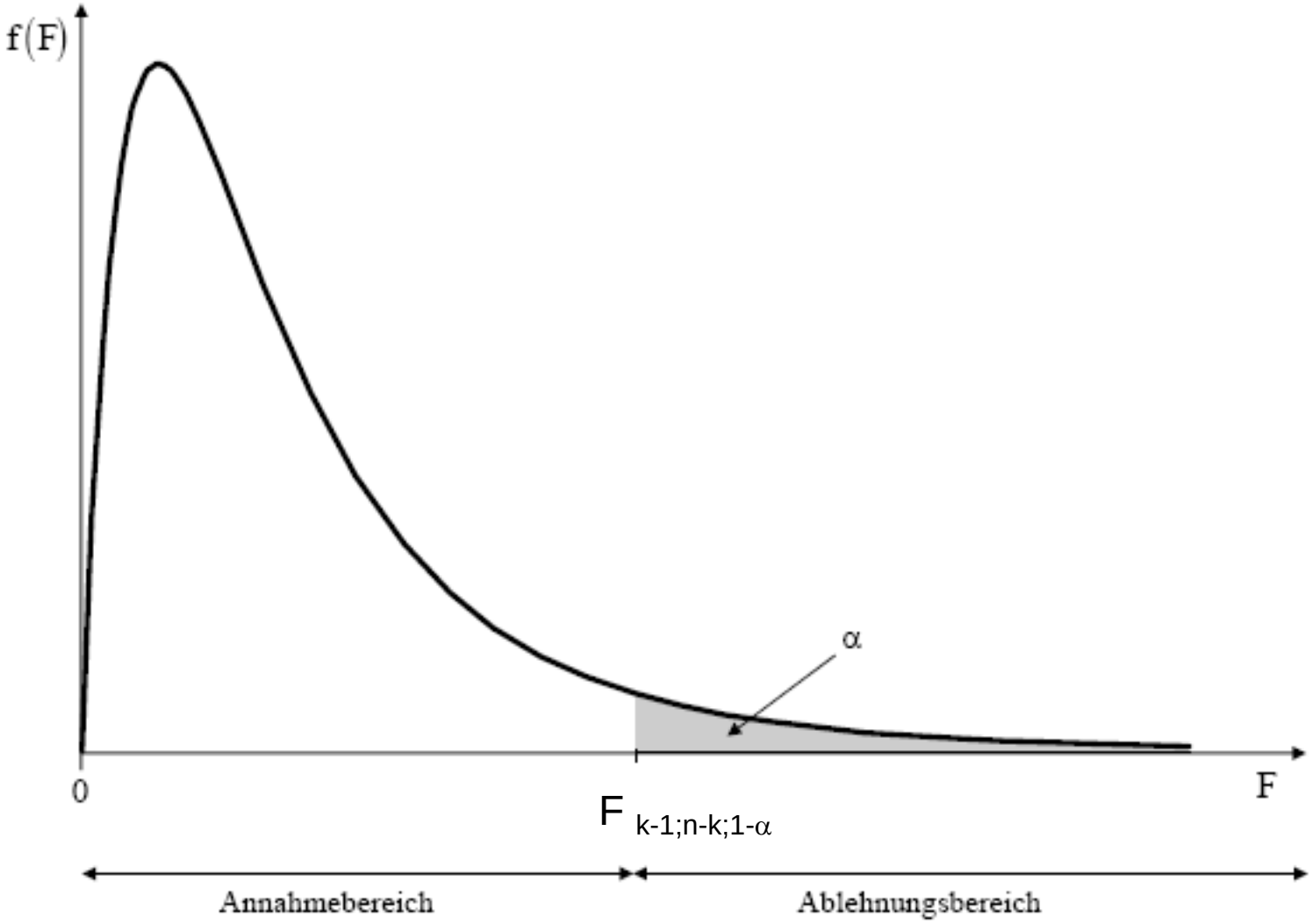
Die Prüfgröße besteht aus dem Verhältnis der durch die Regression erklärten Streuung zur Residualstreuung, wobei die Streuungsmaße in Form der mittleren Abweichungsquadratsummen unter Berück-sichtigung der Freiheitsgrade gebildet worden sind. Unter der Nullhypothese ist die Prüfgröße (3.18a) bzw. (3.18b) des Signifikanztests F-verteilt mit k-1 und n-k Freiheitsgraden.

Testentscheidung:

$$F > F_{1-\alpha;k-1;n-k} \rightarrow H_0 \text{ verwerfen}$$

Im Falle einer Ablehnung der Nullhypothese können bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α nicht mehr alle Regressoren als irrelevant angesehen werden. Das Regressionsmodell leistet insgesamt gesehen dann einen signifikanten Beitrag zur Erklärung der abhängigen Variablen y.

Abbildung: Annahme- und Ablehnungsbereich des F-Tests



Exkurs: Chi-Quadrat-Verteilung und F-Verteilung

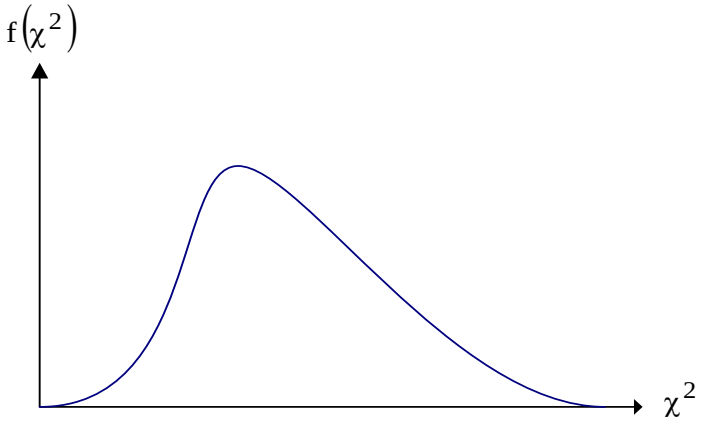
- **Chi-Quadrat-Verteilung**

Es seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$,

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma^2},$$

unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann besitzt die Quadratsumme

$$(*)\ \chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$



eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Hierbei lässt sich die Quadratsumme auch in der Form

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

darstellen.

Wird μ durch den Stichprobenmittelwert geschätzt, dann ist die Quadratsumme

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

χ^2 mit n–1 Freiheitsgraden. Allgemein ist eine Quadratsumme der Form (*) χ^2-verteilt mit n–k Freiheitsgraden, wenn hier in k Parameter aus der Stichprobe zu schätzen sind.

- **F-Verteilung**

Es seien $\chi^2_{v_1}$ und $\chi^2_{v_2}$ zwei unabhängige χ^2-verteilte Zufallsvariablen mit v_1 und v_2 Freiheitsgraden. Dann ist das Verhältnis

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

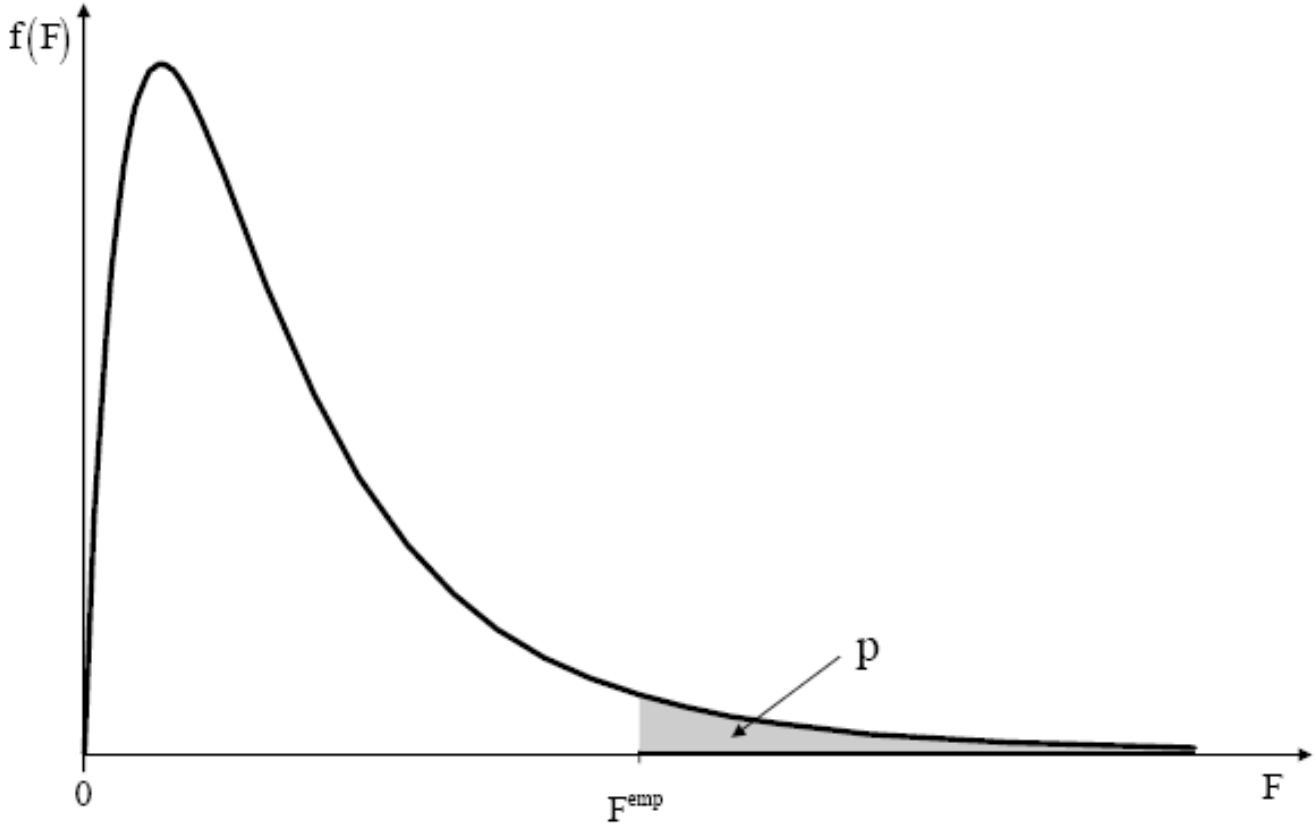
F-verteilt mit v_1 und v_2 Freiheitsgraden. □

F-Test und p-Wert

Signifikante Abweichungen von der Nullhypothese zeigen sich beim F-Test stets anhand eines großen positiven empirischen F-Wertes F_{emp} (= Wert der Prüfgröße F).
Als Quotient zweier unabhängiger χ^2-verteilter Zufallsvariablen nimmt die Prüfgröße stets positive Werte an. Aus diesem Grund ist der F-Test immer ein einseitiger Test.
Der **p-Wert** entspricht dann der **einseitigen Überschreitungswahrscheinlichkeit** .

$$p = P(F > F_{emp}) = 1 - P(F \leq F_{emp}).$$

Abb.: p-Wert beim F-Test



Beispiel:

Bei der ökonometrischen Analyse der gesamtwirtschaftlichen Konsumfunktion für die Bundesrepublik Deutschland im Stützzeitraum ergibt sich folgende ANOVA-Tabelle:

Quelle der Streuung	Summe der Abweichungsquadrate	Freiheits-grade	Mittlere Abweichungs-quadratsumme
Regression (erklärt)	373741,1	1	373741,1
Residuen (unerklärt)	1118,2	17	65,8
Gesamt	395684,8	18	20825,5

Aus ihr lässt sich die Prüfgröße (3.11a) bzw. (3.11b) berechnen:

$$F = \frac{373741{,}1}{65{,}8} = 5679{,}96$$ und $$F = \frac{0{,}997/1}{(1-0{,}997)/17} = 5649{,}67$$ [rundungsbedingte Unterschiede]

Testentscheidung (α = 0,01):

$F = 5679{,}96 > F_{1;17;0{,}99} = 8{,}40$ → H_0 verwerfen

Der Gesamtzusammenhang ist damit statistisch signifikant.

Beispiel:

Bei einem Kapitalmarktmodell mit drei exogenen Variablen (einschl. der Scheinvariablen) beträgt der Determinationskoeffizient 0,303. Das Regressionsmodell ist aus 16 verbundenen Beobachtungen geschätzt worden. Es stellt sich nun die Frage, ob die exogenen Variablen insgesamt einen Einfluss auf die endogene Variable besitzen oder aber substantiell bedeutungslos sind.

Aufschluss hierüber kann ein F-Test auf Signifikanz des Determinationskoeffizienten vermitteln. Bei einem Signifikanzniveau von 5 % ist die Prüfgröße

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{\left(1-R^2\right)/(n-k)} = \frac{0{,}303/(3-1)}{(1-0{,}303)/(16-3)} = 2{,}826$$

mit dem 0,95-Quantil $F_{0,95;2;15}$ der F-Verteilung mit 2 und 13 FG zu vergleichen. Wegen

$$F = 2{,}826 < F_{0,95;2;13} = 3{,}82$$

kann die Nullhypothese (3.10) nicht verworfen werden, d.h. der Einfluss der exogenen Variablen auf die endogene Variable des Kapitalmarktmodells ist nicht statistisch gesichert. □