3. Signifikanztests und Konfidenzintervalle

3.1 Signifikanztests über einzelne Regressionskoeffizienten

Wenn das multiple Regressionsmodell mit der ökonomischen Theorie im Einklang steht, ist zu erwarten, dass die exogenen Variablen x_j einen Einfluss in einer bestimmten Richtung auf die endogene Variable y zeigen. In dem ökonometrischen Modell müssen die geschätzten Regressionskoeffizienten daher das theoretisch erwartete Vorzeichen aufweisen.

Zusätzlich ist zu prüfen, ob die Einflussgrößen überhaupt eine Relevanz für die Erklärung der endogenen Variablen besitzen. Denn wenn ein Regressionskoeffizient das erwartete Vorzeichen aufweist und nur zufallsbedingt von 0 abweicht, weist die erklärende Variable keinen systematischen Einfluss auf die zu erklärende Variable auf. Ob von einer unabhängigen Variablen ein systematischer Einfluss auf die abhängige Variable ausgeht, kann mit einem **Signifikanztest** geprüft werden.

Wird die **Nullhypothese**

$$H_0 : \beta_j = 0$$

der **Alternativhypothese**

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

gegenübergestellt, liegt ein zweiseitiger Signifikanztest vor. Erst wenn die Nullhypothese widerlegt werden kann, ist empirisch die Relevanz der exogenen Variablen zur Erklärung der endogenen Variablen gezeigt.

Unter der Nullhypothese ist der Schätzvektor $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ aufgrund der Normalverteilung der Störvariablen u normalverteilt mit dem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\beta}$ und der Kovarianzmatrix $\sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}$:

(3.1) $$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1})$$

Die Varianzen der Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_j$ sind daher durch

$$Var(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 \cdot x^{jj}$$

gegeben, wobei die Größen x^{jj} die Hauptdiagonalelemente der Inversen $(\mathbf{X'X})^{-1}$ bezeichnen. Man erhält Schätzer der Varianzen $Var(\hat{\beta}_j)$, indem man die unbekannte Störvarianz σ^2 durch den erwartungstreuen Schätzer

(3.2) $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2$$

ersetzt:

(3.3) $$\hat{Var}(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}^2 \cdot x^{jj} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k} \cdot x^{jj}$$

Bei dem erwartungstreuen Schätzer $\hat{\sigma}^2$ wird die Summe der Residualquadrate nicht durch die Anzahl n der Residuen, sondern durch die Anzahl n-k der Freiheitsgrade der Schätzung geteilt.

Spezialfall der einfachen Regression:

(3.4) $$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

und

(3.5) $$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

Beispiel:

Die Schätzung der Varianz $\hat{\sigma}^2$ der Störvariablen soll hier für die makroökonomische Konsumfunktion

$$\hat{C}_t = -38{,}522 + 0{,}9335 \cdot Y_t^V$$

erfolgen. Hierzu wird eine Arbeitstabelle angelegt, in der die zur Berechnung des Schätzers

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{n-k} = \frac{\sum (C_t - \hat{C}_t)^2}{n-k}$$

benötigten Größen berechnet werden. $\hat{C}_t$ ist der Regressionswert des privaten Verbrauchs in der Periode t, der z.B. für 1994

$$\hat{C}_1 = -38{,}522 + 0{,}9335 \cdot 1159{,}39 = 1043{,}81$$

lautet. Auf diese Weise lassen sich die weiteren Regressionswerte berechnen, die in die Arbeitstabelle übernommen werden:

t	Y_t^v	C_t	$\hat{C}_t$	$C_t - \hat{C}_t$	$(C_t - \hat{C}_t)^2$
1	1159,39	1032,75	1043,81	11,06	122,30
2	1190,61	1066,47	1072,95	6,48	42,04
3	1212,71	1088,64	1093,59	4,95	24,46
4	1231,47	1110,82	1111,10	0,28	0,08
5	1251,21	1130,14	1129,53	-0,61	0,38
6	1278,66	1161,86	1155,15	-6,71	45,00
7	1300,70	1195,04	1175,73	-19,31	372,99
8	1347,78	1233,43	1219,68	-13,75	189,12
9	1363,26	1240,58	1234,13	-6,45	41,62
10	1394,62	1264,51	1263,41	-1,11	1,22
11	1419,00	1283,61	1286,17	2,56	6,53
12	1448,13	1306,98	1313,36	6,38	40,68
13	1480,52	1339,54	1343,60	4,06	16,45
14	1502,37	1356,73	1363,99	7,26	52,75
15	1541,25	1389,62	1400,29	10,67	113,83
16	1533,14	1391,55	1392,72	1,17	1,36
17	1578,89	1433,16	1435,43	2,27	5,14
18	1630,14	1487,66	1483,27	-4,39	19,26
19	1666,05	1521,59	1516,80	-4,79	22,99
Σ					1118,20

Die Summe der Abweichungsquadrate beträgt also 1118,20. Mit n=19 und k=2 erhält man hiermit den erwartungstreuen Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1118{,}20}{19-2} = 65{,}7765$$

für die Störvarianz σ^2. Die Standardabweichung $\hat{\sigma}$ der Residuen gibt den Stan_ dardfehler der Schätzung (standard error of regression (SER)) wieder:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{65{,}7765} = 8{,}1103$$

□

Prüfgröße und kritischer Wert

Die Prüfgröße des Signifikanztests

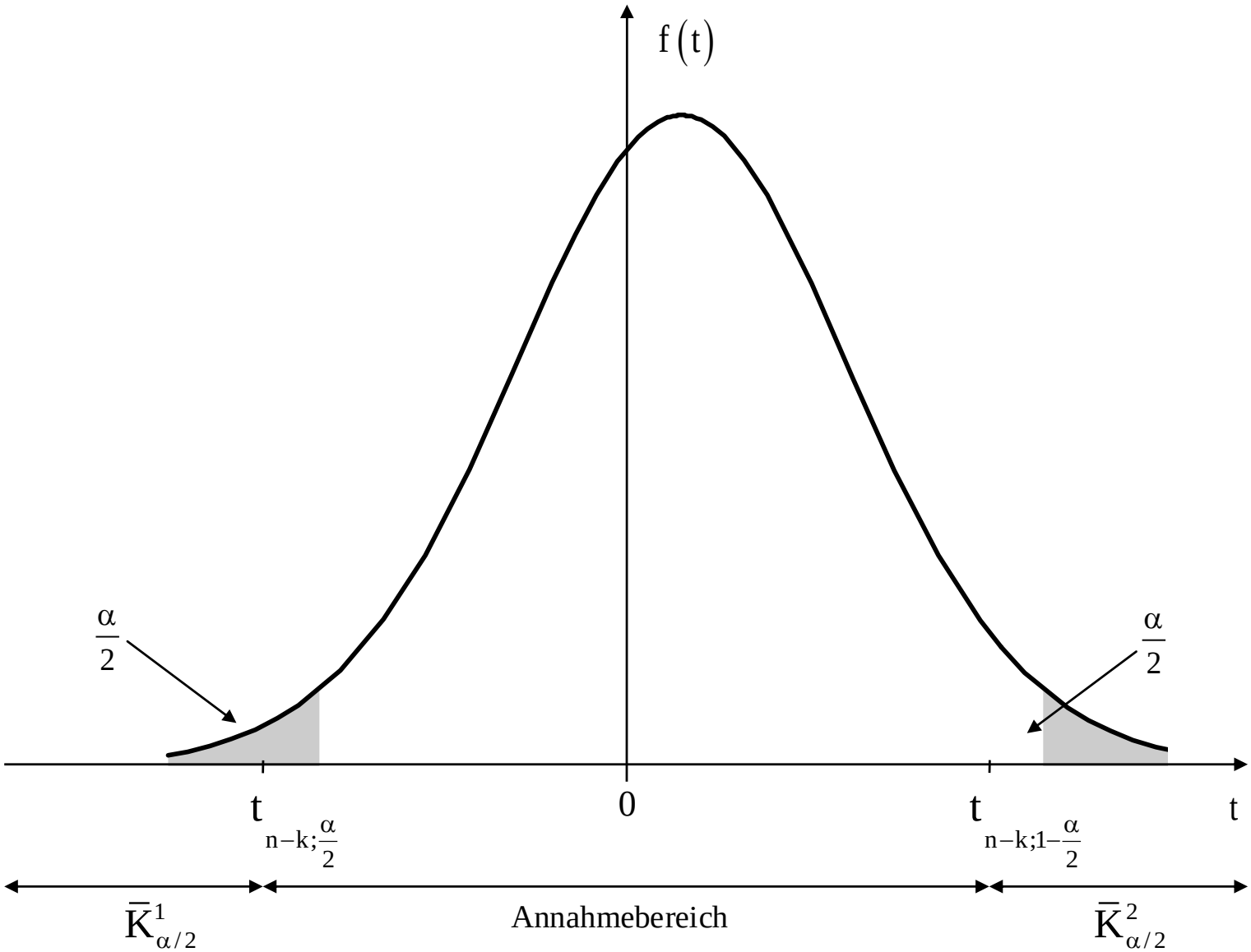
(3.6) $$t = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}}$$

ist t-verteilt mit n-k Freiheitsgraden. Bei einem zweiseitigen Test wird die Nullhypothese H_0 bei einem Signifikanzniveau von verworfen, wenn der absolute Wert der Prüfgröße t den **kritischen Wert**, d.h. das (1-α/2)-Quantil $t_{n-k;1-\alpha/2}$ der t-Verteilung mit n-k Freiheitsgraden übersteigt:

$$|t| > t_{n-k;1-\alpha/2} \rightarrow H_0 \text{ verwerfen}$$

In diesem Fall fällt die Prüfgröße in den Ablehnbereich $\overline{K}_\alpha = \overline{K}^1_{\alpha/2} \cup \overline{K}^2_{\alpha/2}$ (s. Abbildung). Bei einem Signifikanzniveau von z.B. 5% (α = 0,05) ist die Wahrscheinlichkeit einer so großen Abweichung von dem unter der Nullhypothese behaupteten Wert $\beta_j = 0$ kleiner als 5%. Während kleine Abweichungen (Prüfgröße t liegt im Annahmebereich K_α) als zufallsbedingt hingenommen werden, interpretiert man derart große Abweichungen als substanziell oder **signifikant**.

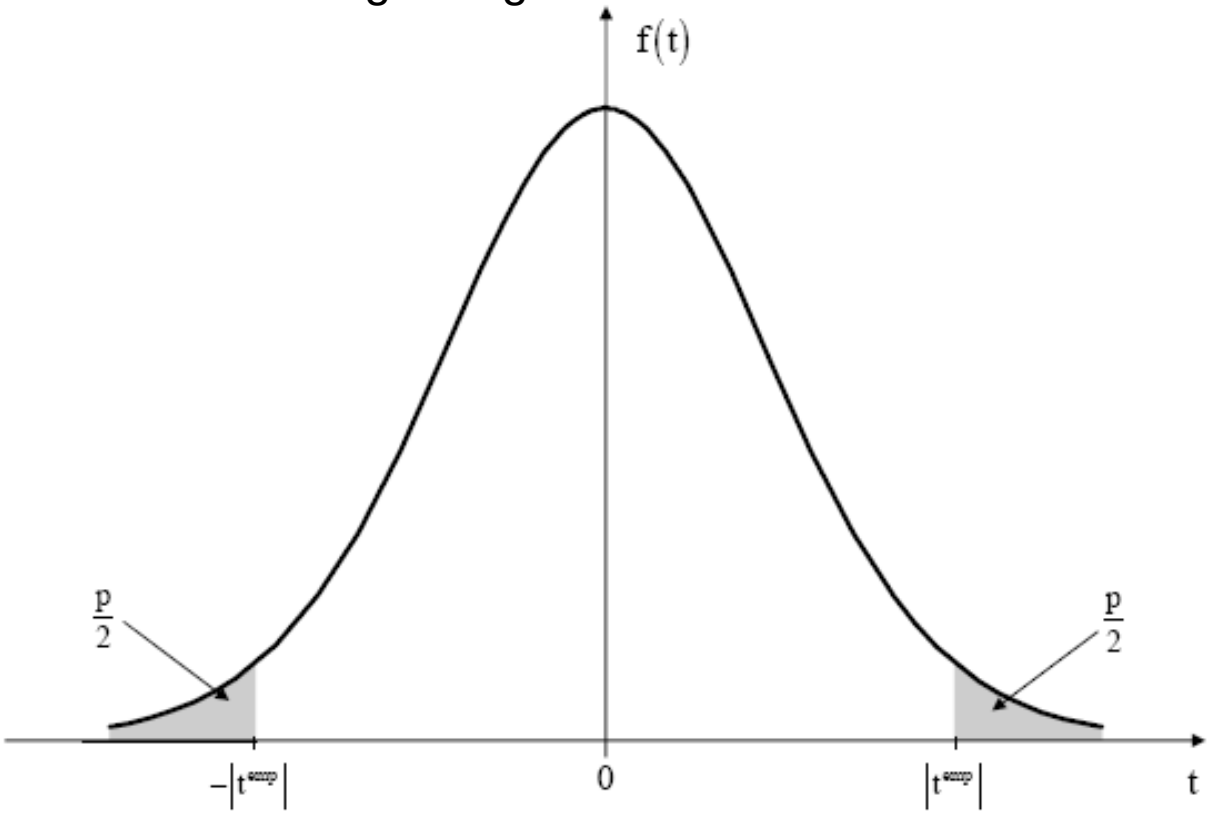
Abbildung: Annahme- und Ablehnungsbereiche bei dem zweiseitigen Signifikanztest



Signifikanztest und p-Wert

Statistische Programme wie z.B. Eviews, Stata und R weisen in der Tabelle des Regressionsoutputs unter „Prob.“ oder „Sign.“ für die Regressionskoeffizienten. sog. **p-Werte** aus. Aus der Gafik geht hervor, dass der **p-Wert** die **zweifache Überschreitungswahrscheinlichkeit** des absoluten empirischen t-Wertes $|t_{emp}|$bei der t-Verteilung mit n-k Freiheitsgraden angibt.

Abb.: p-Wert beim zweiseitigen Signifikanztest



In den Programmen werden im Allgemeinen die Ergebnisse eines zweiseitigen Signifikanztestes ausgewiesen. Der p-Wert gibt dann die Wahrscheinlichkeit für $P(T>|t_{emp}|)$ und $P(T<-|t_{emp}|)$ an. Aufgrund der
Symmetrie der t-Verteilung gilt

$$p = P(T<-|t_{emp}| + P(T>|t_{emp}| = 2\cdot P(T>|t_{emp}|) = 2\cdot P(T<-|t_{emp}|),$$

d.h. der p-Wert entspricht der zweifachen schattierten rechten (=linken) Fläche in der vorstehenden Abbildung.

Während α das **vorgegebene Signifikanzniveau** (**nominales Signifikanzniveau**) ist, entspricht gibt der p-Wert dem **tatsächlichen Signifikanzniveau**, d.h. der tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeit, des Tests. Insofern vermittelt der p-Wert mehr Informationen als der Vergleich des empirischen t-Wert mit dem kritischen Wert $t_{n-1;1-\alpha/2}$. Unter Verwendung des p-Wertes lautet die Testentscheidung:

$$p < \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Nullhypothese ablehnen}$$

$$p \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Nullhypothese beibehalten}$$

Testentscheidungen bei einseitigen Signifikanztests:

- Rechtsseitiger Signifikanztest

$t > t_{n-k;1-\alpha} \rightarrow H_0$ verwerfen

oder

$p/2 < \alpha$ und $t > 0$ → H_0 verwerfen

- Linksseitiger Signifikanztest

$t < t_{n-k;\alpha} = -t_{n-k;1-\alpha} \rightarrow H_0$ verwerfen

oder

$p/2 < \alpha$ und $t < 0$ → H_0 verwerfen

Beispiel:

Für die makroökonomische Konsumfunktion haben wir für den Zeitraum von 1994 bis 2012 die OLS-Schätzer $\hat{\beta}_1$ = -38,522 und $\hat{\beta}_2$ = 0,9335 ermittelt. Unter der Voraussetzung einer normalverteilten Störvariablen u sind dies zugleich die ML-Schätzer. Für einen Signifikanztest der Regressionskoeffizienten benötigen wir zusätzlich ihre Varianzen. Mit dem Schätzer $\hat{\sigma}^2$ = 65,7767 für die Störvarianz sowie den Größen n=19, $\sum x_t = 26529{,}9 \; und \; \sum x_t^2 = 37472832$ erhält man

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$= 65{,}7767 \cdot \frac{37472832}{19 \cdot 37472832 - 26529{,}9^2}$$

$$= 65{,}7767 \cdot 4{,}5989 = 302{,}5$$

und

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$= 65{,}7767 \cdot \frac{19}{19 \cdot 37472832 - 26529{,}9^2}$$

$$= 65{,}7767 \cdot 2{,}3318 \cdot 10^{-6}$$

$$= 0{,}00015338$$

Damit ergeben sich für die geschätzten Regressionskoeffizienten die t-Werte

$$t(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{-38{,}522}{\sqrt{302{,}5}} = -2{,}2149$$

und

$$t(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{0{,}9335}{\sqrt{0{,}00015338}} = 75{,}3755$$

Bei einem zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau beträgt der kritische Wert $t_{17;0,975}$ der t-Verteilung mit 17 Freiheitsgraden 2,110. Wegen

$$\left|t\left(\hat{\beta}_1\right)\right| = 2{,}2149 > t_{17;0,975} = 2{,}110$$

und

$$\left|t\left(\hat{\beta}_2\right)\right| = 73{,}3755 > t_{17;0,975} = 2{,}110$$

sind die beiden geschätzten Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ signifikant von 0 verschieden. Der Regressionskoeffizient $\hat{\beta}_2$ ist sogar als hochsignifikant zu bezeichnen, da sein t-Wert auch bereits die kritische Grenze eines Signifikanz-tests auf dem 1 %-Niveau ($t_{17;0,995}$=2,898) übersteigt.

Bei bestimmten Problemstellungen ist nicht nur von Interesse, ob eine Einflussgröße überhaupt eine substantielle Wirkung auf eine zu erklärende Variable hat. Vielmehr möchte man wissen, ob die empirischen Daten mit einer Hypothese

$$H_0 : \beta_j = c, \quad c \neq 0$$

vereinbar sind. Zur Prüfung dieser Nullhypothese kann der erörterte t-Test unter Verwendung der modifizierten Prüfgröße

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - c}{\hat{\sigma}\sqrt{x^{jj}}} \tag{3.7}$$

in ansonsten unveränderter Form herangezogen werden.

Beispiel:

Bei der Geldnachfragefunktion interessiert nicht allein, ob die erklärenden Variablen Einkommen und Zinssatz einen statistisch gesicherten Einfluss auf die Geldnachfrage ausüben. Zusätzlich ist für die Geldpolitik von Bedeutung, inwieweit sich Größenvorteile oder -nachteile bei der Geldhaltung einstellen. Wenn von Größenvorteilen im Sinne einer rationelleren Geldhaltung ausgegangen werden kann, müsste die Einkommenselastizität der Geldnachfrage signifikant kleiner als 1 sein. Umgekehrt treten diseconomies of scale auf, wenn die Einkommenselastizität signifikant größer als 1 ist. Ein Signifikanztest der Einkommenselastizität auf 1 gibt somit Aufschluss darüber, ob die durch den Schätzer der entsprechenden Regressionskoeffizienten angezeigten Größenvorteile oder –nachteile tatsächlich substanziell interpretiert werden können.

Zunächst soll jedoch die Signifikanz der Einflussgrößen überhaupt geprüft werden. Hier benötigen wir die Varianzen der Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 \text{ und } \hat{\beta}_3$.
Bei einer Residualquadratsumme von

$$\sum \hat{u}_t^2 = \hat{u}'\hat{u} = 0,054376$$

erhält man mit n=20 und k=3 den erwartungstreuen Schätzer $\hat{\sigma}^2$ der Störvarianz σ^2 aus

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k}\hat{u}'\hat{u} = \frac{0,054376}{19-3} = 0,003398$$

Unter Verwendung der Diagonalelemente

x^{11}=451,821, x^{22}=7,4157 und x^{33}=0,2598

lassen sich die erwartungstreuen Schätzer für die Varianzen der geschätzten Regressionskoeffizienten berechnen:

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \cdot x^{11} = 0,003398 \cdot 451,821 = 1,5355$$

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \cdot x^{22} = 0,003398 \cdot 7,4157 = 0,0252$$

und

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3) = \hat{\sigma}^2 \cdot x^{33} = 0,003398 \cdot 0,2598 = 0,00088296$$

Damit erhält man die Prüfgrößen für die Signifikanztests der geschätzten Regressionskoeffizienten auf 0:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{-15,0174}{\sqrt{1,5355}} = -12,1191$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{2,8112}{\sqrt{0,0252}} = 17,7084$$

und

$$t = \frac{\hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_3)}} = \frac{-0,1891}{\sqrt{0,00088296}} = -6,3641$$

Alle Regressionskoeffizienten sind auf einem Signifikanzniveau von 5% statistisch gesichert, da ihre t-Werte absolut größer sind als der kritische Wert $t_{16;0,975}$=2,120 eines zweiseitigen Tests.

Bei einem Test der Einkommenselastizität auf 1,

$$H_0 : \beta_2 = 1 ,$$

lautet die Prüfgröße

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}\left(\hat{\beta}_2\right)}} = \frac{2,8112 - 1}{\sqrt{0,0252}} = 11,4092$$

Die Nullhypothese ist bei einem zweiseitigen Signifikanztest ($t_{0,975;16}$=2,120) und Erst recht bei einem einseitigen (rechtsseitigen) Signifikanztest ($t_{0,95;16}$=1,746) zu verwerfen. Was die Geldmenge M1 betrifft, so ist innerhalb des Beobachtungszeitraums von 1994 bis 2012 somit tatsächlich von "diseconomies of scale" der Geldhaltung auszugehen. □

3.2 Test von linearen Restriktionen

In den vorgestellten Tests sind die Regressionskoeffizienten separat betrachtet worden. Ökonometrische Studien haben jedoch gleichermaßen gemeinsame Effekte von Einflussgrößen aufzudecken. So ist z.B. bei einer Schätzung der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

(3.8) $$y_t = \beta_1 \cdot L_t^{\beta_2} \cdot K_t^{\beta_3} \cdot e^{u_t}$$

in der der Output y von den Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital K abhängig ist, von Interesse, ob konstante Skalenerträge vorliegen. Mathematisch müsste die Produktionsfunktion dann linear-homogen (d.h. homogen vom Grade 1) sein. In diesem Fall würde eine gleichzeitige Vervielfachung der beiden Produktionsfaktoren um einen Faktor λ zu dem Output $\lambda \cdot y_t$ führen. Die sich aus der linearisierten Produktionsfunktion

(3.9) $$\ln y_t = \ln ß_1 + ß_2 \cdot \ln L_t + ß_3 \cdot \ln K_t + u_t$$

Ergebenden OLS-Schätzer $\hat{\beta}_2 \text{ und } \hat{\beta}_3$ der Produktionselastizitäten müssten dann mit der Hypothese

$$H_0: ß_2 + ß_3 = 1$$

im Einklang stehen.

Es handelt sich dabei um einen Test über eine Linearkombination der Regressions-Koeffizienten:

(3.10) $$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_k\beta_k = \mathbf{r'\beta}$$

mit

$$\mathbf{r'} = (r_1 \;\; r_2 \;\; \ldots \;\; r_k).$$

Speziell wird geprüft, ob die Linearkombination (3.10) einen bestimmten Wert c annimmt. Man spricht daher von einem **Test über eine lineare Restriktion**. Die Nullhypothese des Tests lautet

(3.11) $$H_0: \mathbf{r'\beta} = c.$$

Aus einer OLS-Schätzung eines ökonometrischen Modells erhalten wir einen Schätzer $\mathbf{r'\hat{\beta}}$ für die Linearkombination $\mathbf{r'\beta}$. Wenn die geschätzten Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_j$ normalverteilt sind, gilt dies aufgrund der Reproduktionseigenschaft der Norverteilung auch für die Linearkombination $\mathbf{r'\hat{\beta}}$. Unter der Nullhypothese (3.11) hat die Linearkombination $\mathbf{r'\hat{\beta}}$ den Erwartungswert c. In Verallgemeinerung der Varianz der Zufallsvariablen a·X (a const.),

$$Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X) = a \cdot Var(X) \cdot a,$$

ist die Varianz der Linearkombination $\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ durch

(3.12a) $$\mathrm{Cov}(\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{r}' \cdot \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \cdot \mathbf{r}$$

gegeben. Mit

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

erhält man

(3.12b) $$\mathrm{Cov}(\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r} \ .$$

Ebenso wie die Schätzer der Regressionskoeffizienten ist die Linearkombination bei bekannter Störvarianz σ^2 nach einer Standardisierung standardnormalverteilt. Wird σ^2 jedoch durch $\hat{\sigma}^2$ erwartungstreu geschätzt, erhält man die Prüfgröße

(3.13) $$t = \frac{\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}}}$$

des Tests, die t-verteilt ist mit n-k Freiheitsgraden.

In einigen Ökonometrie-Programmen ist der t-Test von linearen Restriktionen nicht direkt verfügbar, jedoch ein gleichwertiger F-Test. Die Prüfgröße des **F-Tests übe**

(3.14) $$F = \frac{(\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c)^2}{\hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}}$$

ist F-verteilt mit 1 und n-k Freiheitsgraden. Beim Test über eine lineare Restriktion entspricht der F-Wert also genau dem Quadrat des t-Wertes:

$F = t^2$ (bei einer linearen Restriktion)

Der F-Test lässt sich konsequent auf das gleichzeitige Testen mehrerer linearer Restriktionen erweitern. Er ist ein Spezialfall des Wald-Testes, der allgemeiner auch bei nichtlinearen Restriktionen eingesetzt werden kann.

Beispiel

Mit den Daten über das reale Bruttoinlandsprodukt (Y), die Zahl der Erwerbstätigen (L) und den Kapitalstock (reales Anlagevermögen) (K) schätzen wir die linearisierte Produktionsfunktion (3.9) mit der OLS-Methode unter Verwendung des Programms EViews:

Dependent Variable: LOG(BIP)
Method: Least Squares
Sample: 1991 2004 Included obs.: 14

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-3.359728	0.338956	-9.911979	0.0000
LOG(ET)	0.618047	0.111450	5.545485	0.0002
LOG(KAPITAL)	0.616240	0.020519	30.03262	0.0000

R-squared	0.993282	Mean dependent var	4.545379
Adjusted R-squared	0.992060	S.D. dependent var	0.065752
S.E. of regression	0.005859	Akaike info criterion	-7.254299
Sum squared resid	0.000378	Schwarz criterion	-7.117359
Log likelihood	53.78010	F-statistic	813.1610
Durbin-Watson stat	2.019197	Prob(F-statistic)	0.000000

Unter Verwendung des OLS-Schätzers

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 = e^{-3,3597} = 0,0347 \\ \hat{\beta}_2 = 0,6180 \\ \hat{\beta}_3 = 0,6162 \end{bmatrix}$$

lässt sich der für den Test der Nullhypothese (Restriktion)

$$H_0: \mathbf{r}'\boldsymbol{\beta} = (0 \;\; 1 \;\; 1)\cdot(\beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3)' = 1$$

oder

$$H_0: \beta_2 + \beta_3 = 1$$

benötigte Wert der Linearkombination $\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ bestimmen:

$$\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = (0 \;\; 1 \;\; 1)\cdot\begin{bmatrix} 0,0347 \\ 0,6180 \\ 0,6162 \end{bmatrix} = 1,234286$$

Mit dem Programm R lässt sich die Produktmatrix **X**'**X** berechnen,

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 14 & 51,0018 & 128,4403 \\ 510018 & 1858028 & 467,9183 \\ 128,4403 & 467,9183 & 1178,469 \end{bmatrix}$$

und anschließend invertieren:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 3346{,}994 & -976{,}7859 & 23{,}05285 \\ -976{,}7859 & 361{,}8519 & -37{,}21647 \\ 23{,}05285 & -37{,}21647 & 12{,}26536 \end{bmatrix}$$

Der Radikant des Wurzelterms im Nenner der Teststatistik (3.13) nimmt damit den Wert

$$\mathbf{r}'\cdot(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\cdot\mathbf{r} = (0 \;\; 1 \;\; 1)\cdot\begin{bmatrix} 3346{,}994 & -976{,}7859 & 23{,}05285 \\ -976{,}7859 & 361{,}8519 & -37{,}21647 \\ 23{,}05285 & -37{,}21647 & 12{,}26536 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 299{,}6843$$

an. Die geschätzte Standardabweichung $\hat{\sigma}$ entspricht dem Standardfehler der Regression (SER) und kann daher z.B. dem R-Output entnommen werden (SER = $\hat{\sigma}$ = 0.005859).

Setzt man die berechneten Werte in die Teststatistik (3.13) ein, erhält man

$$t = \frac{\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}}} = \frac{1{,}234286 - 1}{0{,}005859 \cdot \sqrt{299.6843}} = \frac{0{,}234286}{0{,}005859 \cdot 17{,}31139} = \frac{0{,}234286}{0{,}101427} = 2{,}310$$

Bei einem Test auf einem Signifikanzniveau von 5% (α=0,05) ist der t-Wert von 2,310 mit dem kritischen Wert (n=14, k=3)

$$t(n-k;1-\alpha/2) = t(11;0{,}975) = 2{,}201$$

zu vergleichen:

$$|t=2{,}310| > t(11;0{,}975) = 2{,}201 \quad \rightarrow \quad H_0 \text{ ablehnen.}$$

Die Nullhypothese konstanter Skalenerträge lässt sich somit hier nicht aufrecht-erhalten. Die ökonometrische Schätzung der gesamtwirtschaftlichen Produktions-funktion weist auf steigende Skalenerträge hin, die statistisch gesichert sind.

Die F-Statistik, die hier den Wert 5,336 annimmt, entpricht – bis auf rundungsbedingten Abweichungen - genau dem Quadrat der berechneten t-Statistik:

$$F = \frac{(\mathbf{r}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c)^2}{\hat{\sigma}^2 \cdot \mathbf{r}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{r}} = \frac{(1{,}234286 - 1)^2}{0{,}005859^2 \cdot 299{,}6843} = 5{,}33558 \ .$$

Vergleichen wir den empirischen F-Wert mit dem kritischen Wert

$$F(1;n\text{-}k;1\text{-}\alpha) = F(1;11;0{,}95) = 4{,}84,$$

so zeigt sich, dass die Nullhypothese konstanter Skalenerträge in Übereinstimmung mit dem t-Test auf dem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden muss:

$$F = 5{,}336 > F(1;11;0{,}95) = 4.84 \quad \rightarrow \quad H_0 \text{ ablehnen.}$$