6. Autokorrelation

6.1 Form und Auswirkung

Die zweite Implikation der Annahme einer skalaren Kovarianzmatrix,

(2.7) $$\mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{uu}') = \sigma^2 \underset{nxn}{\mathbf{I}}$$

ist, dass sich Störterme unterschiedlicher Beobachtungen nicht beeinflussen, also unkorreliert sind. Im multiplen Regressionsmodell (2.5) wurde somit die Abwesenheit von **Autokorrelation** unterstellt. Autokorrelierte Störterme geben an, dass die abhängige Variable systematischen Einflüssen folgt, die nicht durch die einbezogenen Regressoren erklärt werden. Der Autokorrelation der Störvariablen kann auf dreierlei Art und Weise Rechnung getragen werden:

1. durch Einbeziehung zusätzlicher ökonomischer Variablen, durch die die Autokorrelation der Störvariablen beseitigt werden kann,
2. durch eine verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Schätzung (Transformation der Variablen), die der Autokorrelation der Störvariablen Rechnung trägt.
3. durch Verwendung korrigierter Standardabweichungen der geschätzten Regressionskoeffizienten (Autokorrelations-konsistente Standardfehler)

Wir unterstellen in diesem Kapitel, dass alle ökonomischen Variablen, für die die Daten im Untersuchungszeitraum verfügbar sind, in das Regressionsmodell einbezogen worden sind.

Welche Form hat die Varianz-Kovarianz-Matrix bei autokorrelierten Störvariablen? Gehen wir hier allein von einer Verletzung der Annahme der Unkorreliertheit der Störgröße aus, dann ist ihre Varianz-Kovarianz-Matrix durch

$$\text{(6.1)} \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{u}) = \mathrm{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

gegeben. Die konstanten Varianzen σ^2 auf der Hauptdiagonale spiegeln dabei die Annahme der Homoskedastizität wider.

Die Nichthauptdiagonalelemente

$$\sigma_{ts} = \mathrm{Cov}(u_t, u_s) = \mathrm{E}(u_t \cdot u_s),\ t,s=1,2,\ldots,n;\ t \neq s,$$

sind die **Autokovarianzen** zwischen den Störtermen der t-ten und s-ten Beobachtung. Da $\sigma_{ts} = \sigma_{st}$ gilt, können insgesamt n(n-1)/2 Autokovarianzen unterschieden werden. Wie im Falle der Heteroskedastizität lässt sich eine Schätzung des multiplen Regressionsmodells auf der Basis der Kovarianzmatrix (6.1) nur durchführen, wenn bestimmte Annahmen über den Störprozess gemacht werden.

Eine Autokorrelation der Störvariablen hat die gleichen Konsequenzen im Hinblick auf die Güte der OLS-Schätzung wie Heteroskedastizität. Der OLS-Schätzer des Vektors der Regressionskoeffizienten bleibt zwar erwartungstreu, ist jedoch nicht mehr effizient. Das bedeutet, dass die Standardfehler der OLS-geschätzten Regressionskoeffizienten verzerrt sind, so dass die Signifikanztests und Konfidenzintervalle ihre Gültigkeit verlieren.

Im Folgenden stellen wir zunächst das Konzept des **Autokorrelationskoeffizienten** vor (Abschn. 6.2). Anschließend behandeln wir zwei Tests auf Autokorrelation (Abschn. 6.3). Hierbei erörtern wir gleichzeitig, wie Störprozesse bei Autokorrelation der Störvariablen u modelliert werden können. Während der **Durbin-Watson-Test** auf eine Autokorrelation 1. Ordnung abzielt, lässt sich mit dem **Breusch-Godfrey-Test** auch eine Autokorrelation höherer Ordnung aufdecken. In Abschnitt 6.4 stellen wir dann ein **verschiedene Verfahren** zur **Schätzung des multiplen Regressionsmodells bei autokorrelierten Störvariablen** vor. Schließlich wird in Abschnitt 6.5 die Verwendung von **Autokorrelations-konsistenten Standardfehlern** als Alternative zur verallgemeinerten Kleinst-Quadrate-Schätzung mittels einer Variablentransformation erörtert.

6.2 Autokorrelationskoeffizient

Bei Vorliegen einer Autokorrelation sind Störterme unterschiedlicher Beobachtungen stochastisch abhängig. Diese Abhängigkeit wird durch **Autokorrelationskoeffizienten** gemessen. Um das Konzept des Autokorrelationskoeffizienten zu verstehen, greifen wir den aus der deskriptiven Statistik bekannten **Pearsonschen Korrelationskoeffizienten** zwischen zwei Merkmalen X und Y, r_{xy}, der durch das Verhältnis der Kovarianz s_{xy} und dem Produkt der beiden Standardabweichungen, s_x und s_y, definiert ist:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Wir nehmen jetzt an, dass für die beiden Merkmale X und Y jeweils n Merkmalswerte in Form von zwei Zeitreihen vorliegen. Die Daten bestehen dann aus den geordneten Beobachtungen (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), aus denen der Pearsonsche Korrelationskoeffizient berechnet werden kann:

(6.2) $$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}}$$

In der Ökonometrie wird untersucht, ob die **Residuen** $\hat{u}_t$ einer Regression "mit sich selbst" korreliert oder **autokorreliert** sind. Die **Autokorrelation** wird gemessen, indem man z.B. den Zusammenhang zwischen aufeinander folgenden Werten, Werten im Abstand von zwei Perioden, drei Perioden usw.. vergleicht. Man spricht hierbei von einer Autokorrelation 1. Ordnung, 2. Ordnung, 3. Ordnung, usw.

Bei der Berechnung eines Autokorrelationskoeffizienten 1. Ordnung bildet man aus einer vorliegenden Zeitreihe der Residuen $\hat{u}_1, \hat{u}_2, ..., \hat{u}_n$ zwei Reihen, die zueinander um eine Periode verschoben sind:

$$\hat{u}_2, \hat{u}_3, ..., \hat{u}_n \quad \text{und} \quad \hat{u}_1, \hat{u}_2, ..., \hat{u}_{n-1}$$

Aus den n Zeitreihenwerten werden also n-1 geordnete Paare gebildet:

$$(\hat{u}_2, \hat{u}_1), (\hat{u}_3, \hat{u}_2), ..., (\hat{u}_n, \hat{u}_{n-1})$$

Der **empirische Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung** lautet dann

(6.3a) $$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Seine konzeptionelle Vergleichbarkeit mit dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten wird deutlich, wenn man für die beiden Residualreihen den Mittelwert der gesamten Residualreihe, $\bar{\hat{u}} = 0$, und im Nenner das Produkt der Standardabweichungen der gesamten Residualreihe verwendet, das gleich der Residualvarianz ist.

Beispiel:

In einer Regression der Kurse einer Aktie A (Y) auf den Aktienindex (X) haben sich folgende Residuen ergeben:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{u}_t$	0,6	0,5	-0,4	-0,7	-0,3	0,3	0,4	-0,4

Wie groß ist der Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung?

Arbeitstabelle:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t^2$
1	0,6	-	-	0,36
2	0,5	0,6	0,30	0,25
3	-0,4	0,5	-0,20	0,16
4	-0,7	-0,4	0,28	0,49
5	-0,3	-0,7	0,21	0,09
6	0,3	-0,3	-0,09	0,09
7	0,4	0,3	0,12	0,16
8	-0,4	0,4	-0,16	0,16
Σ	0		0,46	1,76

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{8}(\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-1})}{\sum_{t=1}^{8}\hat{u}_t^2} = \frac{0{,}46}{1{,}76} = 0{,}261$$

Um den **empirischen Autokorrelationskoeffizienten zweiter Ordnung** zu bestimmen, werden n-2 geordnete Paare

$$(\hat{u}_3, \hat{u}_1), (\hat{u}_4, \hat{u}_2), \ldots, (\hat{u}_n, \hat{u}_{n-2})$$

miteinander verglichen:

(6.4) $$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Allgemein ist der **empirische Autokorrelationskoeffizient j-ter Ordnung** durch

(6.5) $$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-j}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

gegeben. Er gibt die Stärke der Abhängigkeit zwischen den Residuen an, die j Perioden auseinander liegen.

Beispiel:

Gesucht sind die Autokorrelationskoeffizienten zweiter und dritter Ordnung der Residuen aus der Regression der Aktienkurse (Y) auf den Aktienindex (X).

Arbeitstabelle:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-2}$	$\hat{u}_{t-3}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}$	$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-3}$	$\hat{u}_t^2$
1	0,6	-	-	-	-	0,36
2	0,5	-	-	-	-	0,25
3	-0,4	0,6	-	-0,24	-	0,16
4	-0,7	0,5	0,6	-0,35	-0,42	0,49
5	-0,3	-0,4	0,5	0,12	-0,15	0,09
6	0,3	-0,7	-0,4	-0,21	-0,12	0,09
7	0,4	-0,3	-0,7	-0,12	-0,28	0,16
8	-0,4	0,3	-0,3	-0,12	0,12	0,16
Σ	0			-0,92	-0,85	1,76

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-2}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} = \frac{-0{,}92}{1{,}76} = -0{,}523$$

und

$$\hat{\rho}_3 = \frac{\sum_{t=4}^{n} \hat{u}_t \cdot \hat{u}_{t-3}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2} = \frac{-0{,}85}{1{,}76} = -0{,}483$$

6.3 Tests auf Autokorrelation

6.3.1 Durbin-Watson-Test

Bei Vorliegen einer Autokorrelation sind Störterme unterschiedlicher Beobachtungen stochastisch abhängig. Wann ist aber in einer Regression die Annahme der Unkorreliertheit der Störgröße verletzt? Der empirische Autokorrelationskoeffizient $\hat{\rho}_1$ wird aufgrund des Stichprobenfehlers von 0 abweichen, auch wenn die Störgröße in der Grundgesamtheit unkorreliert ist. Ein Test dieser Annahme heißt **Autokorrelationstest**. Häufig ist damit zu rechnen, dass sich eine Autokorrelation der Störgröße unmittelbar in einer Abhängigkeit der benachbarten Residuen niederschlägt. Der **Durbin-Watson-Test** ist ein Autokorrelationstest, der die Residuen auf Autokorrelation 1. Ordnung testet. In der Nullhypothese wird also davon ausgegangen, dass der theoretische Autokorrelationskoeffizient ρ_1 gleich 0 ist:

$$H_0: \rho_1 = 0.$$

Ihr wird die Alternativhypothese einer autokorrelierten Störgröße gegenübergestellt:

$$H_1: \rho_1 \neq 0.$$

Aus dem Testergebnis des Durbin-Watson-Tests lässt sich bei Ablehnung der Nullhypothese zusätzlich erkennen, ob positive oder negative Autokorrelation vorliegt.

Ein stochastischer Prozess, der eine Autokorrelation 1. Ordnung der Störgröße erzeugt, ist ein **autoregressiver Prozess 1. Ordnung (Markov-Prozess):**

(6.6) $$u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t \ , \quad |\phi| < 1 \ , \quad t = 2,...,n$$

Bei diesem Prozess ist die aktuelle Störgröße u_t von der Störgröße der Vorperiode, u_{t-1}, abhängig. Die Stärke der Abhängigkeit wird durch den autoregressiven Parameter ϕ wiedergegeben. v ist eine White-Noise-Störvariable, die diese Beziehung überlagert und auch als Innovation bezeichnet wird:

(6.7) $$E(v_t) = 0 \quad \text{für } t = 2,...,n$$

(6.8) $$Cov(v_t, v_s) = E(v_t \cdot v_s) = \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{für } t = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Restriktion $-1 < \phi < 1$ verhindert, dass vergangene Störvariablen einen dominierenden Einfluss auf die aktuelle Entwicklung erhalten (= Nichtstationarität). Sie ist auch deshalb erforderlich, weil sich der autoregressive Parameter als (Auto-)Korrelationskoeffizient interpretieren lässt, der auf diesen Wertebereich eingeschränkt ist.

Der autoregressive Parameter ϕ kann geschätzt werden, wenn man die Störterme u_t in (6.6) durch die OLS-Residuen des zugrunde liegenden Regressionsmodells ersetzt:

(6.9) $$\hat{u}_t = \phi \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t \ , \quad |\phi| < 1$$

Eine Regression von $\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$ führt dann zu dem OLS-Schätzer

(6.10) $$\hat{\phi} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} - \bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{u}}_1}{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - \bar{\hat{u}}_1^2}$$

mit $\bar{\hat{u}}_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t$ und $\bar{\hat{u}}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}$

Wegen $\bar{\hat{u}}_0 \approx \bar{\hat{u}}_1 \approx 0$ und $\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} \hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$

erhält man den OLS-Schätzer $\hat{\phi}$, der damit approximativ der Definition des empirischen Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_1$ nach (6.3a) entspricht:

(6.3b) $$\hat{\phi} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Die Nullhypothese fehlender Autokorrelation erster Ordnung (H_0: $\rho_1=0$) lässt sich daher gleichwertig durch

(6.11) $H_0: \phi = 0$

formulieren. Sofern die Nullhypothese zutrifft, folgt aus dem Ansatz (6.6), dass $u_t = v_t$ ist, so dass die Störgröße u die Standardannahmen des multiplen Regressionsmodells erfüllt.

Die Nullhypothese (6.11) lässt sich mit dem **Durbin-Watson-Test** überprüfen. Die als Durbin-Watson-Statistik DW bekannte Prüfgröße basiert auf den OLS-Residuen und ist durch

(6.12a) $$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}$$

gegeben. Da im Zähler und Nenner jeweils quadrierte Summanden stehen, ist die Durbin-Watson-Statistik stets nicht negativ (DW≥0).

Positive Autokorrelation: aktuelle Residuen $\hat{u}_t$ und Residuen der Vorperiode, $\hat{u}_{t-1}$ haben mehrheitlich das gleiche Vorzeichen (beide + oder beide -)

Perfekte positive Autokorrelation: Die Residuen $\hat{u}_t$ und $\hat{u}_{t-1}$ stimmen überein → Zähler in (6.12a) ist gleich 0 → DW = 0

Der Zähler in (6.12a) lässt sich noch umformen, was sich insbesondere im Hinblick auf die Interpretation der Teststatistik empfiehlt. Durch Auflösen des Binoms erhält man zunächst

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1}\right)^2=\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t^2-2\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}+\hat{u}_{t-1}^2\right)=\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t^2+\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{t-1}^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}$$

Sofern die Anzahl der Beobachtungen n groß genug ist, gelten die Approximationen

$$\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t^2\approx\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{t-1}^2\approx\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 \qquad ,$$

so dass sich

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1}\right)^2\approx 2\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}$$

ergibt. Durch Einsetzen dieser Beziehung in (6.12a) erhält man

$$DW\approx\frac{2\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}=2\left(1-\frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}\right)$$

und unter Berücksichtigung von (6.3b) schließlich

(6.12b) $$\mathrm{DW} \approx 2\left(1-\hat{\phi}\right).$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Durbin-Watson-Statistik und dem empirischen Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung der Residuen, $\hat{\rho}_1$, hergestellt. Wegen $|\hat{\rho}_1| < 1$ nimmt die Durbin-Watson-Statistik stets Werte im Intervall (0, 4) an.

<u>DW-Statistik und Grenzfälle der Autokorrelation</u>

Keine Autokorrelation (ρ_1=0) : $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx 0$ → DW ≈ 2

Perfekte positive Autokorrelation (ρ_1=1): $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx 1$ → DW ≈ 0

Perfekte negative Autokorrelation (ρ_1=-1): $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx -1$ → DW ≈ 4

Wertebereich der DW-Statistik: 0 ≤ DW ≤ 4

Festlegung der Annahme- und Ablehnbereiche

Um die Annahme- und Ablehnbereiche der DW-Statistik festlegen zu können, benötigen wir die Kenntnis ihrer Verteilung unter der Nullhypothese H_0: $\rho_1 = 0$.

Voraussetzungen:
- Unabhängige, identisch normalverteilte Störgrößen u_t
- Erklärende Variablen X_k sind feste Größen

Unter diesen Voraussetzungen hängt die Verteilung der DW-Statistik von
- der Anzahl n der Beobachtungen (Stichprobenumfang),
- der Anzahl k der exogenen Variablen,
- den Werten der exogenen Variablen

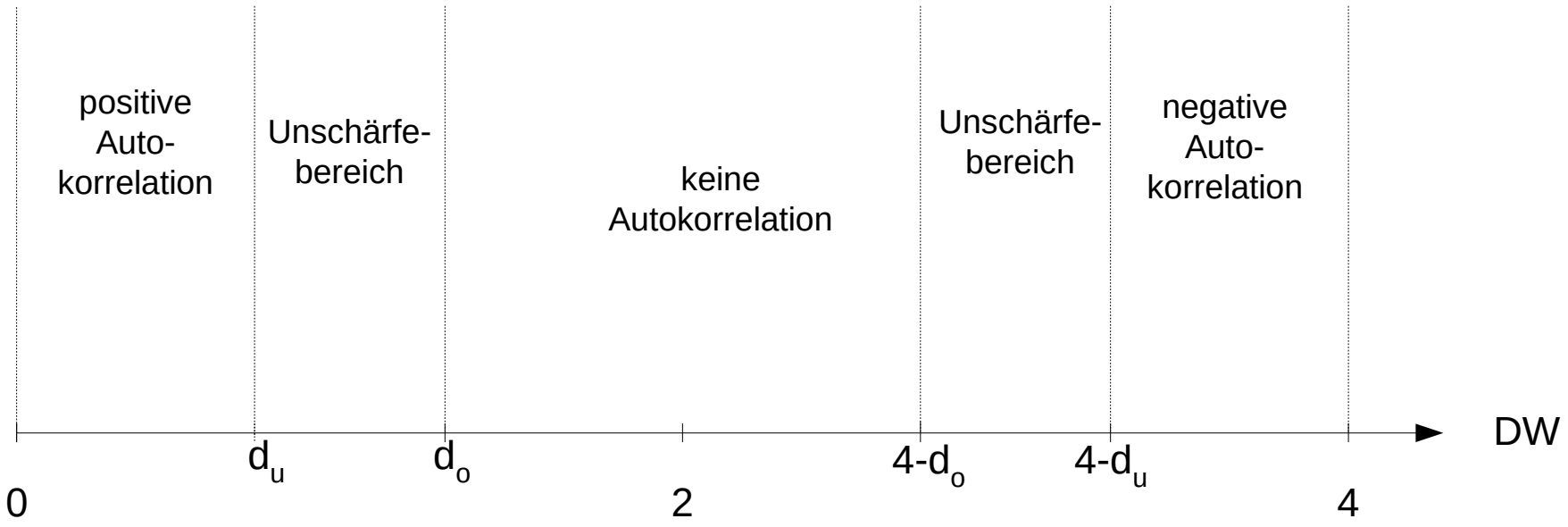
ab.

Um bei dem Autokorrelationstest eine universelle Verteilung einsetzen zu können, nimmt man eine gewisse Unschärfe in Kauf. Auf diese Weise können die kritischen Werte unabhängig von den konkreten Variablenwerten angegeben werden.

Bei der Tabellierung der kritischen Werte ergeben sich **Unbestimmtheitsbereiche** bei der Entscheidung über positive oder negative Autokorrelation, die durch den unteren (d_u) und oberen (d_o) kritischen Wert festgelegt sind:

- bei positiver Autokorrelation: $d_u \leq DW \leq d_o$
- bei negativer Autokorrelation: $4-d_o \leq DW \leq 4-d_u$

Abbildung: Bereiche der DW-Statistik



Die kritischen Werte d_u und d_o sind in Abhängigkeit von der Anzahl n der Beobachtungen und Anzahl k der exogenen Variablen (einschl. der Scheinvariablen) für Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha=0{,}05$ und $\alpha=0{,}01$) tabelliert.

Beispiel:

Der Durbin-Watson-Test soll unter Verwendung der Keynesschen Konsumfunktion (2.27) illustriert werden. Damit lässt sich beurteilen, ob die Annahme einer fehlenden Autokorrelation der Störvariablen der Konsumfunktion berechtigt ist. Genauer wird die Störvariable u mit dem Durbin-Watson-Test auf Autokorrelation erster Ordnung getestet. Als Prüfgröße dieses Tests wird die Durbin-Watson-Statistik DW unter Verwendung der OLS-Residuen $\hat{u}_t$ bestimmt.

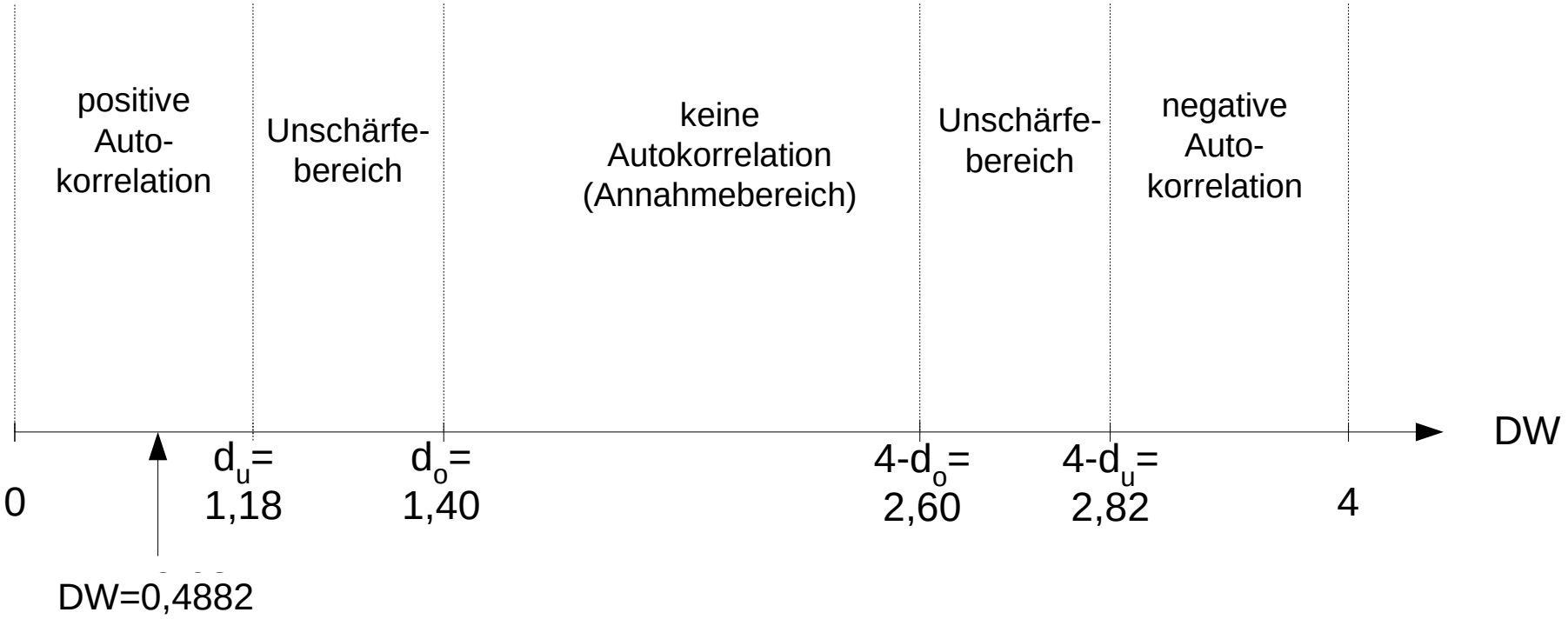
Die hierzu benötigten Abweichungsquadratsummen werden in einer Arbeitstabelle berechnet:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t^2$	$(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$
1	-11,059452	–	122,311474	–
2	-6,484428	-11,059452	42,0478065	20,9308428
3	-4,945561	-6,484428	24,4585746	2,36811134
4	-0,278686	-4,945561	0,07766578	21,7797251
5	0,613325	-0,278686	0,37616731	0,79568291
6	6,707777	0,613325	44,9942736	37,1423488
7	19,312656	6,707777	372,978689	158,882977
8	13,751808	19,312656	189,112223	30,9230327
9	6,450680	13,751808	41,611266	53,3064774
10	1,105008	6,450680	1,22104334	28,5762006
11	-2,554586	1,105008	6,52590708	13,3926268
12	-6,378473	-2,554586	40,684914	14,6221133
13	-4,055685	-6,378473	16,4485841	5,39534084
14	-7,263435	-4,055685	52,7574822	10,2896549
15	-10,669292	-7,263435	113,833796	11,599866
16	-1,168320	-10,669292	1,36497139	90,2684746
17	-2,267566	-1,168320	5,14185511	1,20834177
18	4,388743	-2,267566	19,261066	44,3064495
19	4,795486	4,388743	22,9966831	0,16543954
			1118,20444	545,953706

Die Durbin-Watson-Statistik nimmt somit den Wert

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{19}\left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{19}\hat{u}_t^2} = \frac{545{,}953706}{1118{,}20444} = 0{,}4882$$

an. Die kritischen Werte des Durbin-Watson-Testes für ein Signifikanzniveau von 5% bei einem Stichprobenumfang von n=19 und k=2 Regressoren (einschl. der Scheinvariablen) gehen aus der folgenden Skizze hervor:



In unserem Beispiel fällt die Durbin-Watson-Statistik DW in den linken Bereich:

$$DW = 0{,}4882 \in [0; d_u = 1{,}18]$$

was bedeutet, dass aus dem Testergebnis auf eine Autokorrelation der OLS-Residuen der Keynesschen Konsumfunktion geschlossen werden kann. Der Durbin-Watson-Test indiziert, dass der private Konsum trotz des hohen Erklärungsgehalts nicht allein auf das verfügbare Einkommen zurückzuführen ist.

In den OLS-Residuen bleibt eine systematische Variation bestehen, die durch die Vernachlässigung von Einflüssen wie z.B. des Vermögens, des Zinssatzes, Stimmungsindikatoren (→ GfK) oder des zeitlich verzögerte Konsum (→ Habit-Persistence-Hypothese) sein könnten. Die Autokorrelation der Störgröße könnte aber auch auf eine Inadäquanz der in der Keynesschen Konsumfunktion verwendeten Einkommensgröße zurückzuführen sein. Aufschluss hierüber würden z.B. ökonometrische Tests der Permanenten Einkommenshypothese oder der Lebenszyklushypothese geben. □

6.3.2 Breusch-Godfrey-Test

Ein Test auf Autokorrelation nicht nur erster, sondern beliebiger Ordnung ist z.B. der **Breusch-Godfrey-Test**. Der Test ist auch bei stochastischen Regressoren einsetzbar. Ausgangspunkt ist das multiple Regressionsmodell

(2.1b) $$y_t = \mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\beta} + u_t$$

das um m verzögerte endogene Variablen y_{t-1}, y_{t-2}, …, y_{t-m} erweitert werden kann:

(6.13) $$y_t = \mathbf{y}_{_t}' \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{x}_t' \cdot \boldsymbol{\beta} + u_t$$

mit $\mathbf{y}_{_t}' = (y_{t-1} \;\; y_{t-2} \;\cdots\; y_{t-m})$ und $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1 \;\; \gamma_2 \;\cdots\; \gamma_m)$

Das erweiterte Regressionsmodell (6.13) enthält neben den k nicht-stochastischen Erklärungsgrößen (einschl. der Scheinvariablen) x_1, x_2, …, …, x_k m stochastische Regressoren in Form der verzögerten endogenen Variablen. Für die Störvariable u in (2.1b) bzw. (6.13) wird ein autoregressiver Prozess p-ter Ordnung zugelassen,

(6.14) $$u_t = \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_p u_{t-p} + v_t$$

worin v einem White-Noise-Prozess folgt. Der Störprozess (6.14), die dem Breusch-Godfrey-Test zugrunde liegt, ist ein **autoregressiver Prozess p-ter Ordnung**, der eine Verallgemeinerung des dem Durbin-Watson-Test zugrunde liegenden Markov-Prozesses (=autoregressiver Prozess 1. Ordnung) (6.6) ist.

In der Nullhypothese wird die Abwesenheit von Autokorrelation unterstellt, was bedeutet, dass die autoregressiven Parameter α_j, j=1,2,…,p, gleich 0 sind:

(6.15) $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$

Dann gilt $u_t = v_t$, so dass die Störvariable in (2.1b) bzw. (6.14) die Eigenschaft eines reinen Zufallsprozesses (white noise) erfüllt.

Der Breusch-Godfrey-Test auf Autokorrelation basiert auf dem allgemeinen Lagrange-Multiplier-Prinzip, das nur eine Schätzung des restringierten Modells erforderlich macht. Dies hat zur Folge, dass sich daraus eine einfache Teststatistik ableiten lässt. Danach wird im Anschluss an die Schätzung des Modells (2.1b) bzw. (6.13) die **Hilfsregression**

(6.16) $$\hat{u}_t = \alpha_0 + \mathbf{z}_t'\boldsymbol{\delta} + \alpha_1\hat{u}_{t-1} + \ldots + \alpha_p\hat{u}_{t-p} + w_t$$

mit w als Störterm durchgeführt.

Variablenvektor $\mathbf{z'}_t$**:**

- bei Regressionsmodell (2.1b): $\mathbf{z}_t' = \mathbf{x}_{_t}'$ (= $\mathbf{x'}_t$ ohne Scheinvariable x_{1t}=1)
- bei Regressionsmodell (6.13): $\mathbf{z}_t' = \left(\mathbf{y}_{_t}' \;\; \mathbf{x}_{_t}'\right)$

Faustregel für die Wahl des Lags p:

bei Jahresdaten: 1 bis 4
bei Quartalsdaten: 4 oder 8
bei Monatsdaten: 12 oder 24

Die **Prüfgröße des Breusch-Godfrey-Tests**

(6.17) $$BG(p) = n \cdot R^2$$

ist bei Normalverteilung der Störgröße u unter der Nullhypothese (6.15) asymptotisch χ^2-verteilt mit p Freiheitsgraden. R^2 ist hierin das Bestimmheitsmaß der Hilfsregression (6.16).

Testentscheidung:

$BG(p) > \chi^2_{p;1-\alpha}$ → H_0 ablehnen

Annahme der Nullhypothese: Annahme fehlender Autokorrelation p-ter Ordnung
Ablehnung der Nullhypothese: Annahme von Autokorrelation p-ter Ordnung

Beispiel:

Die Nullhypothese einer fehlenden Autokorrelation der Störgröße der Keynesschen Konsumfunktion (2.27) soll mit dem Breusch-Godfrey-Test untersucht werden. Im Unterschied zu Monats- und Quartaldaten ist Jahresdaten ist vor allem die Autokorrelation 1. Ordnung von Relevanz, da der zeitliche Abstand bei Autokorrelationen höherer Ordnung hier rasch groß wird.

[Hinweis: Der Breusch-Godfrey-Test auf Autokorrelation 1. Ordnung wird detailliert mit Hilfe der Kleinst-Quadrate-Schätzung der Hilfsregression (6.16) und anschließender Berechnung der Prüfgröße (6.17) durchgeführt. Ergänzend werden die mit der Funktion bgtest des R-Paktes lmtest ermitteltn Testergebnisse für eine Autokorrelation höherer Ordnung wiedergegeben.]

Bei der Überprüfung der Autokorrelation 1. Ordnung der Störgröße testen wir die Nullhypothese

$$H_0: \alpha_1 = 0$$

der Alternativhypothese

$$H_1: \alpha_1 \neq 0$$

gegenübergestellt.

Da die Keynessche Konsumfunktion des verfügbare Einkommen Y^v als einzige erklärende Variable hat, enthält der Variablenvektor $\mathbf{z'}_t$ in der Hilfsregression (6.16) allein den Regressor Y^v. OLS-Schätzung der Hilfsregression (6.16) z.B. mit R ergibt

$$\hat{u}_t = -1{,}9913 + 0{,}0016 \cdot Y_t^V + 0{,}7075 \cdot \hat{u}_{t-1}$$

t-Werte → $(-0{,}155)\ (0{,}170) \qquad (3{,}912)$.

<u>Hinweis:</u> Die verzögerte Residualreihe $\hat{u}_{t-1}$ wird in der ersten Periode gleich 0 gesetzt, so dass die Hilfsregression (6.16) stets mit den kompletten n Beobachtungen erfolgt.

Der t-Wert geschätzten autoregressiven Koeffizienten $\hat{\alpha}$ von 3,912 zeigt eine Signifikanz auf dem 1%-Niveau an (kritischer Wert: $t_{16;0,995}$ = 2,921). Mit einem Bestimmtheitsmaß der Hilfsregression von 0,4888 und einem Stichprobenumfang von 19 erhält man für die Teststatistik BG des Breusch-Godfrey-Tests den Wert

$$BG(1) = n \cdot R^2 = 19 \cdot 0{,}4888 = 9{,}287$$

Kritischer Wert (α=0,01; p=1): $\chi^2_{1;0,99}$ = 6,63

Testentscheidung:

BG(1)=9,287 > $\chi^2_{1;0,99}$=6,63 (p=0,002))

→ Annahme einer Autokorrelation 1. Ordnung