Exkurs: Chi-Quadrat-Verteilung und F-Verteilung

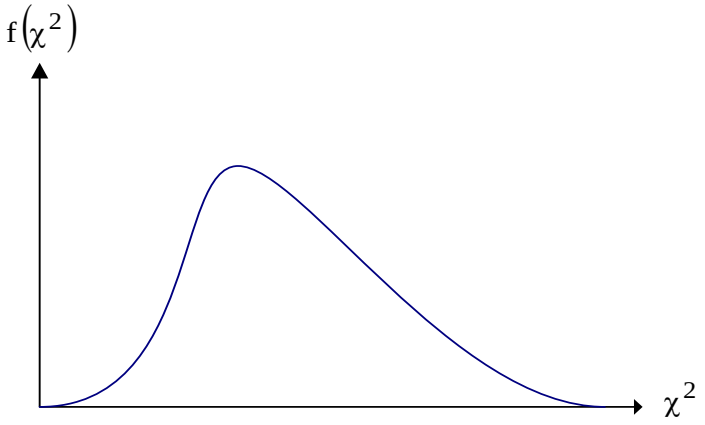
• Chi-Quadrat-Verteilung

Es seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$,

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma},$$

unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann besitzt die Quadratsumme

$$(*)\ \chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$



eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Hierbei lässt sich die Quadratsumme auch in der Form

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

darstellen.

Wird μ durch den Stichprobenmittelwert geschätzt, dann ist die Quadratsumme

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

χ^2 mit n–1 Freiheitsgraden. Allgemein ist eine Quadratsumme der Form (*) χ^2-verteilt mit n–k Freiheitsgraden, wenn hier in k Parameter aus der Stichprobe zu schätzen sind.

- **F-Verteilung**

Es seien $\chi^2_{v_1}$ und $\chi^2_{v_2}$ zwei unabhängige χ^2-verteilte Zufallsvariablen mit v_1 und v_2 Freiheitsgraden. Dann ist das Verhältnis

$$F = \frac{\chi_1^2 / v_1}{\chi_2^2 / v_2}$$

F-verteilt mit v_1 und v_2 Freiheitsgraden. □