2.5 Das Rotationsproblem

Das Verfahren der Faktorenextraktion ist so ausgestaltet, dass

- der erste Faktor F_1 einen möglichst großen Teil der Varianz der manifesten Variablen erklärt,
- der zweite Faktor F_2 einen möglichst großen Teil der noch nicht erklärte Varianz der Variablen determiniert usw.

Daher werden die Faktorladungen des Faktors F_2 im Schnitt absolut kleiner sein als die des Faktors F_1. Hierbei handelt es sich i. d. R. nicht um die Lösung, die am günstigsten zu interpretieren ist. Viele Faktorladungen werden sich nämlich im mittleren Bereich,

$$|0{,}3| \leq a_{jk} \leq |0{,}7| \ ,$$

befinden und daher nur einen vergleichsweise geringen Erklärungsgehalt haben. Dies folgt aus unserer Interpretation der Ladungsquadrate als Determinationskoeffizienten. So lädt z.B. der Faktor F_2 im 12-Regionen-Beispiel auf der Variablen X_3 mit -0,395 (a_{31} = -0,395). Das bedeutet, dass der zweite Faktor die Varianz des Anteils der Erwerbstätigen in der Landwirtschaft (ED) zu 15,6% erklärt

[$a_{32}^2 = (-0{,}395)^2 = 0{,}156$]. Wenn viele mittlere Faktorladungen vorhanden sind, wird die Faktorstruktur insofern „verwischt“ als dass die meisten Variablen mit allen Faktoren „irgendwie“ in Beziehung stehen.

In der Anwendung suchen wir aber nach einem „eindeutigeren“ Faktorenmuster, die dann gegeben ist, wenn die Faktorladungen gegen 0 oder ±1 gehen. In diesem Fall könnten wir klarer erkennen, welche Variablen tatsächlich bedeutsam mit welchen Faktoren in Beziehung stehen. Ein solches Faktorenmuster (abgebildet durch die Faktormatrix) erfüllt die Bedingungen einer sog. **Einfachstruktur**.

Man kann nun versuchen, durch **Drehung des Koordinatensystems**, in dem die Variablenvektoren (= Vektoren, die die Faktorladungen jeweils einer Variablen enthalten = Zeilen der Faktormatrix) liegen („Faktorraum“), eine **Einfachstruktur** zu erreichen. Eine Drehung des Koordinatensystems („Rotation“) ist zulässig, da die erklärten Varianzanteile der Variablen (=Kommunalitäten) hierdurch unverändert bleiben. Die **Rotation** der Faktoren erfolgt so, dass die Faktorladungen absolut möglichst groß oder klein werden.

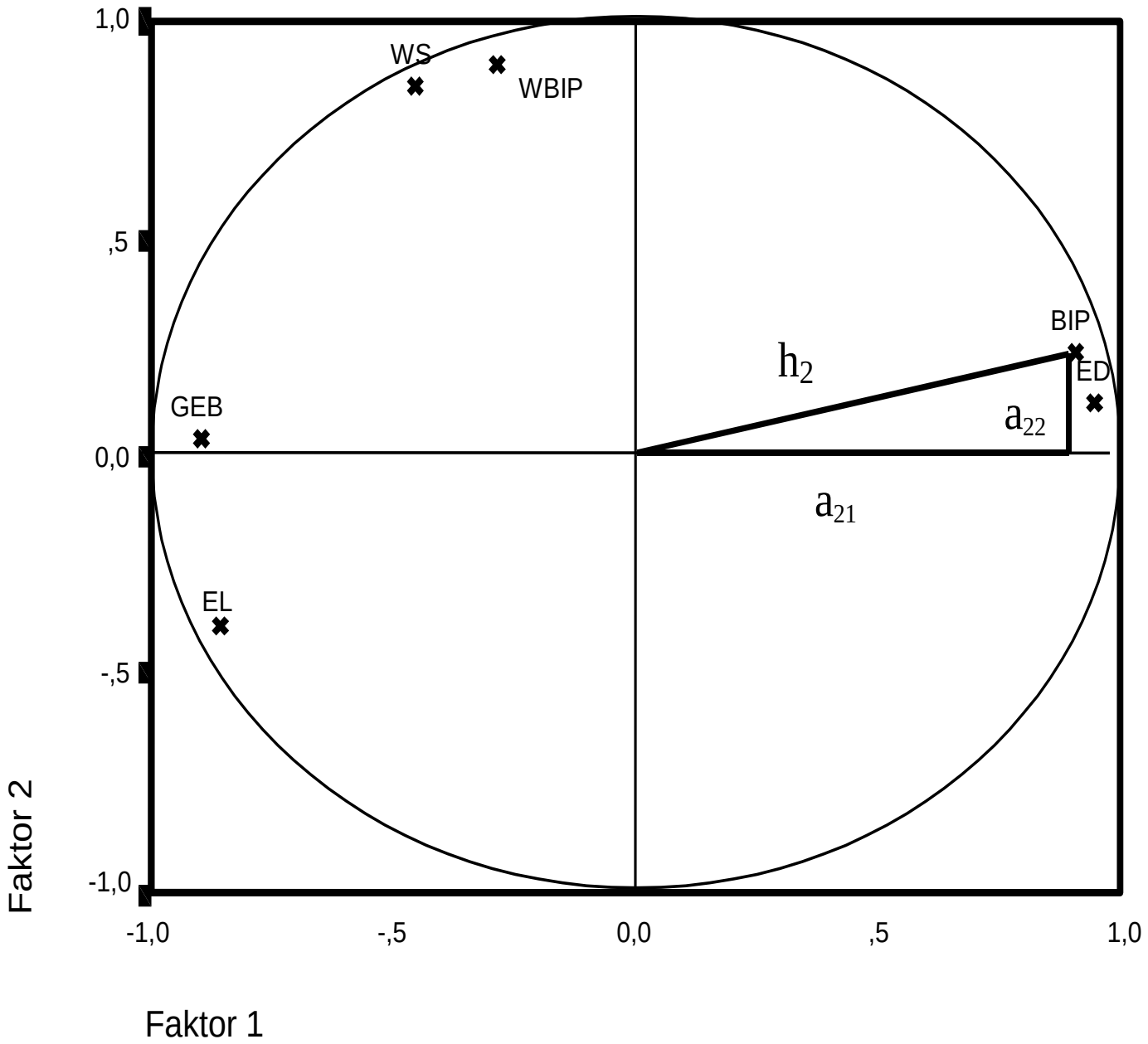
Das **Rotationsproblem** besteht darin festzulegen, in welchem Winkel die Faktoren gedreht werden sollen. Man wird eine Lösung wählen, bei der die Faktorladungen möglichst nicht in dem mittleren – schwer zu interpretierenden – Bereich $|0{,}3| \leq a_{jk} \leq |0{,}7|$ liegen (**Einfachstruktur).**

Geometrische Interpretation von Faktorladungen und Kommunalität

Wir stellen die Variablenvektoren (a_{j1} a_{j2}) der sechs Variablen des 12-Regionen-Beispiels in einem Koordinatensystem dar, dessen Achsen durch die beiden Faktoren F_1 und F_2 gebildet wird. Alle Variablenvektoren müssen innerhalb oder auf dem eingezeichneten Einheitskreis liegen. Lenken wir unsere Aufmerksamkeit einmal auf den Vektor (a_{21} a_{22}) der zweiten Variablen Bruttoinlandsprodukt pro Kopf (BIP). Die Ladung des ersten Faktors, a_{21} = 0,913, gibt die Entfernung auf der F_1-Achse vom Ursprung an, die Ladung des zweiten Faktors, a_{22} = 0,239, die Entfernung auf der F_2-Achse vom Ursprung.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\mathbf{a}_{21}^2 + \mathbf{a}_{22}^2 = \mathbf{h}_2^2 ,$$

so dass das die Wurzel aus der Kommunalität $\mathbf{h}_2^2$, der Hypotenuse h_2, also dem Fahrstrahl vom Ursprung bis zu dem durch BIP gekennzeichneten Punkt (a_{21} a_{22}) entspricht. Dreht man nun das Koordinatensystem, so ändern sich zwar die Faktorladungen, aber nicht die Länge von h_2. Neue, andere Ladungen führen damit zu gleichen erklärten Varianzanteilen wie die ursprüngliche Lösung. Man wird das Koordinatensystem so rotieren, dass eine Einfachstruktur entsteht, die Achsen also nahe bei den Punkten im Faktorraum liegen.


1,0
,5
0,0
-,5
-1,0
-1,0
-,5
0,0
,5
1,0
WS
WBIP
BIP
ED
GEB
EL
h2
a22
a21
Faktor 2
Faktor 1

In der Anwendung führt man in der Regel eine rechtwinklige Rotation durch. Eine mögliche schiefwinklige Rotation, bei der die Faktoren um unterschiedliche Winkel rotiert werden, kann Schwierigkeiten bei der Interpretation mit sich bringen. Aus diesem Grund stellen wir hier allein auf die rechtwinklige Rotation ab.

Rechtwinklige Rotation

Rechtwinklige Rotation:

Achsen des Koordinatensystems stehen weiterhin senkrecht aufeinander („orthogonale“, d.h. unabhängige Faktoren)

Der Rotationswinkel wird nach Konvention entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (= mathematischer Uhrzeigersinn) gemessen und hier mit α bezeichnet. Die rechtwinklig rotierte Matrix der Faktorenladungen $\mathbf{A}^{RR}$ ergibt sich durch Multiplikation von **A** mit einer Transformationsmatrix **T**:

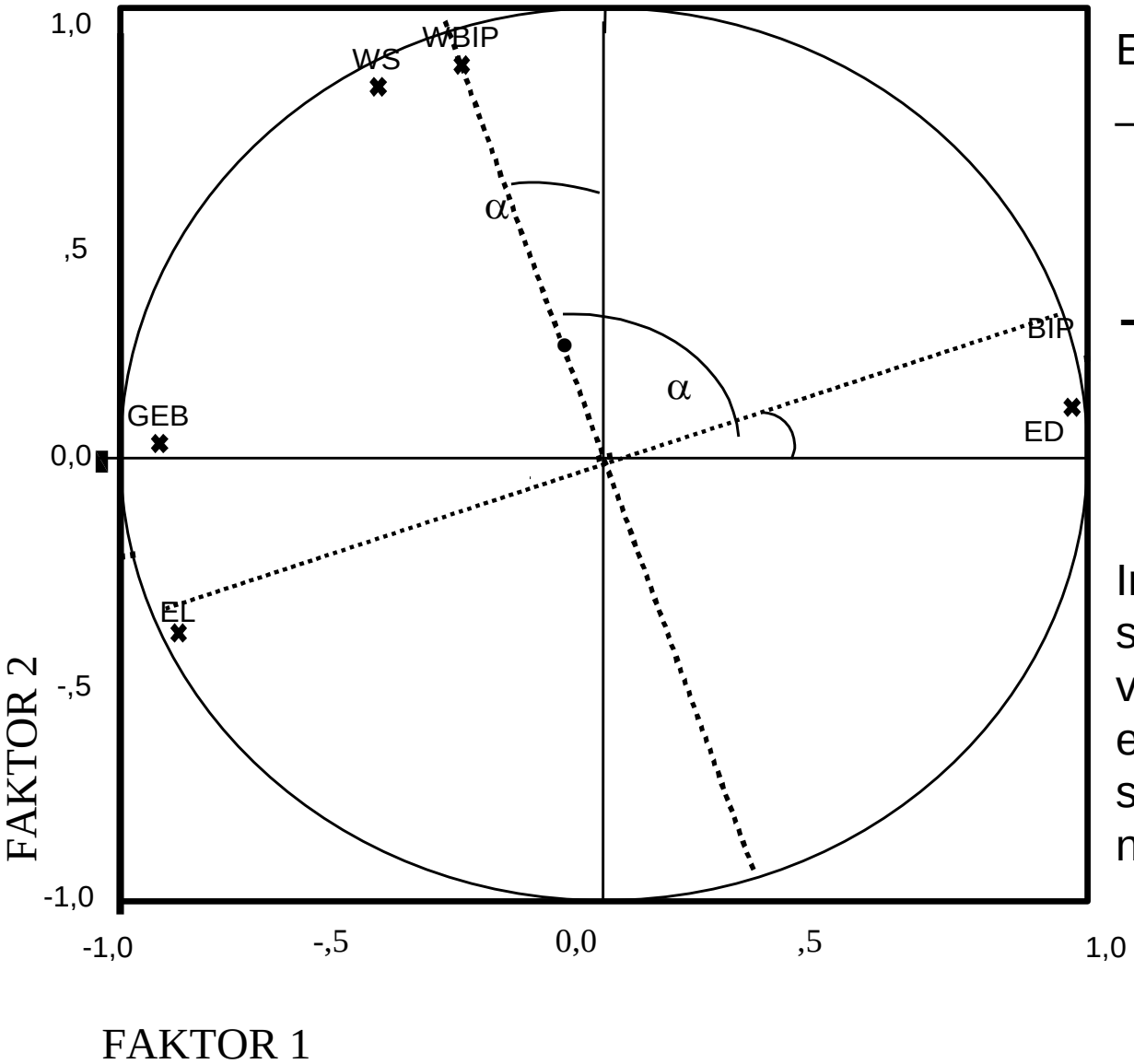
$$\underset{m \times p}{\mathbf{A}}^{RR} = \underset{m \times p}{\mathbf{A}} \cdot \underset{p \times p}{\mathbf{T}} ,$$

die bei der Betrachtung von zwei Faktoren die Form

$$\underset{2x2}{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

hat.

Rechtwinklig rotiertes Koordinatensystem



Erläuterung:

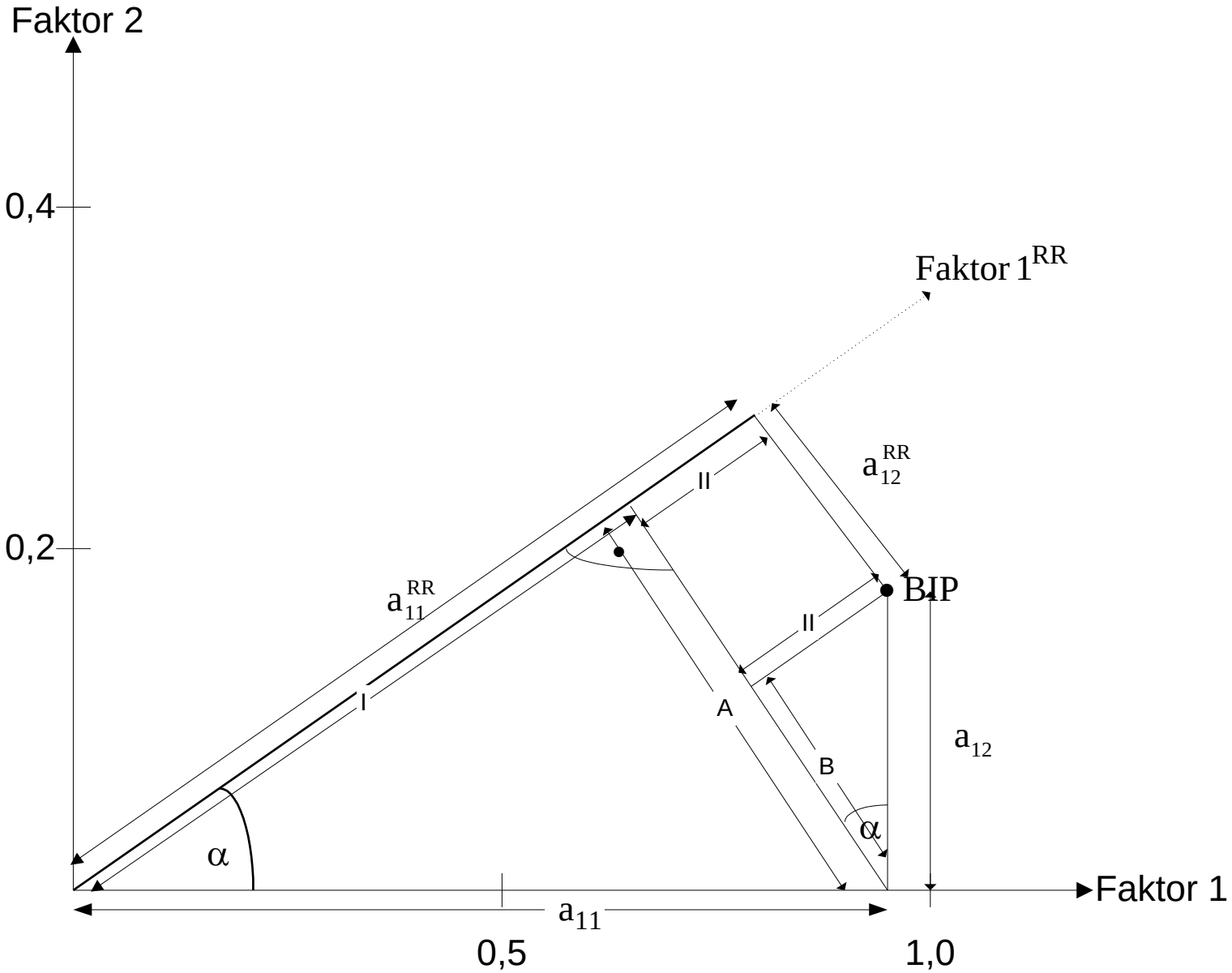
_____ Ursprüngliches Koordinaten-system

– – – Neues rechtwinklig rotiertes Koordina-tensystem

Im neuen Koordinaten-system liegen die Variablen-vektoren (Punkte ED, BIP, etc.) näher an den Achsen, so dass die Ladungen näher bei 0 bzw. ±1 liegen.

Bestimmung der Transformationsmatrix

Zur Herleitung der Transformationsmatrix T im 2-Faktoren-Fall orientieren wir uns an den Variablenvektor (a_{21} a_{22}) der zweiten Variablen BIP.



Ausgangspunkt sind die beiden trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) Sinus und Kosinus:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}\ .$$

Winkelfunktionen im großen Dreieck	Winkelfunktionen im kleinen Dreieck
$\cos\alpha = \frac{I}{a_{11}} \Rightarrow I = \cos\alpha \cdot a_{11}$ $\sin\alpha = \frac{A}{a_{11}} \Rightarrow A = \sin\alpha \cdot a_{11}$	$\cos\alpha = \frac{B}{a_{12}} \Rightarrow B = \cos\alpha \cdot a_{12}$ $\sin\alpha = \frac{II}{a_{12}} \Rightarrow II = \sin\alpha \cdot a_{12}$
Rotierte Faktorladungen	
$a_{11}^{RR} = I + II = \cos\alpha \cdot a_{11} + \sin\alpha \cdot a_{12}$ $-a_{12}^{RR} = A - B$ (rotierte Faktorladung liegt im negat. Bereich der F_2^{RR} $\Rightarrow a_{12}^{RR} = -(A-B) = -\left(\sin\alpha \cdot a_{11} - \cos\alpha \cdot a_{12}\right) = -\sin\alpha \cdot a_{11} + \cos\alpha \cdot a_{12}$	

Damit ist gezeigt, dass die Transformationsmatrix T von der Form

$$\underset{2x2}{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ist. Hiermit erhält man z.B. die rotierten Faktorladungen für die zweite Variable BIP durch die Matrixmultiplikation

$$(a_{11}^{RR} \;\; a_{12}^{RR}) = (a_{11} \;\; a_{12}) \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} .$$

Ausmultiplizieren zeigt, dass die sich hieraus ergebenden neuen, d.h. rotierten Faktorladungen mit den vorher graphisch abgeleiteten Faktorladungen übereinstimmen.

Wenn man einen Wert für den Drehwinkel α vorgibt, kann man die rotierte Faktormatrix $\mathbf{A}^{RR}$ ermitteln. In unserem 12-Regionen-Beispiel könnte man den Drehwinkel α aufgrund einer visuellen Inspektion der Lage der Variablenvektoren im Faktorraum grob mit 20° einschätzen (Hauptkomponentenmethode). Wegen

$$\cos(20°) = 0{,}940 \text{ und } \sin(20°) = 0{,}342$$

würde man hiermit die rotierte Faktormatrix (Komponentenmatrix)

$$\underset{6\times 2}{\mathbf{A}}^{RR} = \underset{\substack{\mathbf{A}\\ 6\times 2}}{\begin{bmatrix} 0{,}950 & 0{,}132 \\ 0{,}913 & 0{,}239 \\ -0{,}860 & -0{,}395 \\ -0{,}283 & 0{,}908 \\ -0{,}892 & 0{,}043 \\ -0{,}456 & 0{,}852 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\substack{\mathbf{T}\\ 2\times 2}}{\begin{bmatrix} 0{,}940 & -0{,}342 \\ 0{,}342 & 0{,}940 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0{,}938 & -0{,}201 \\ 0{,}940 & -0{,}088 \\ -0{,}944 & -0{,}077 \\ 0{,}045 & 0{,}950 \\ -0{,}824 & 0{,}346 \\ -0{,}138 & 0{,}956 \end{bmatrix}$$

erhalten. Wie erkennbar ist, rücken die etwas „unangenehmen“ Ladungen des Faktors F_1 a_{41} = -0,283 und a_{61} = -0,456 mit $a_{41}^{RR} = 0{,}045$ und $a_{61}^{RR} = -0{,}138$ deutlich näher an 0 heran.

Varimax-Methode

Die **Varimax-Methode** ist ein rechtwinkliges Rotationsverfahren zur Erreichung einer Einfachstruktur. Sie bestimmt den Rotationswinkel α so, dass eine bestimmte **Varianz der Faktorladungen maximiert** wird. Dies entspricht dem Ziel, die absolut hohe Ladungen in die Nähe von ± 1 und die absolut niedrigen Ladungen in die Nähe von 0 zu rücken.

Varianz der quadrierten Ladungen des Faktors F_k:

$s^2_{F_k} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(a^2_{jk} - \overline{a^2_k} \right)^2$	(Streuung der quadrierten Ladungen des Faktors F_k um den Mittelwert seiner Ladungsquadrate)

mit $\overline{a^2_k} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} a^2_{jk}$ (Arithm. Mittel der quadrierten Ladungen des Faktors F_k)

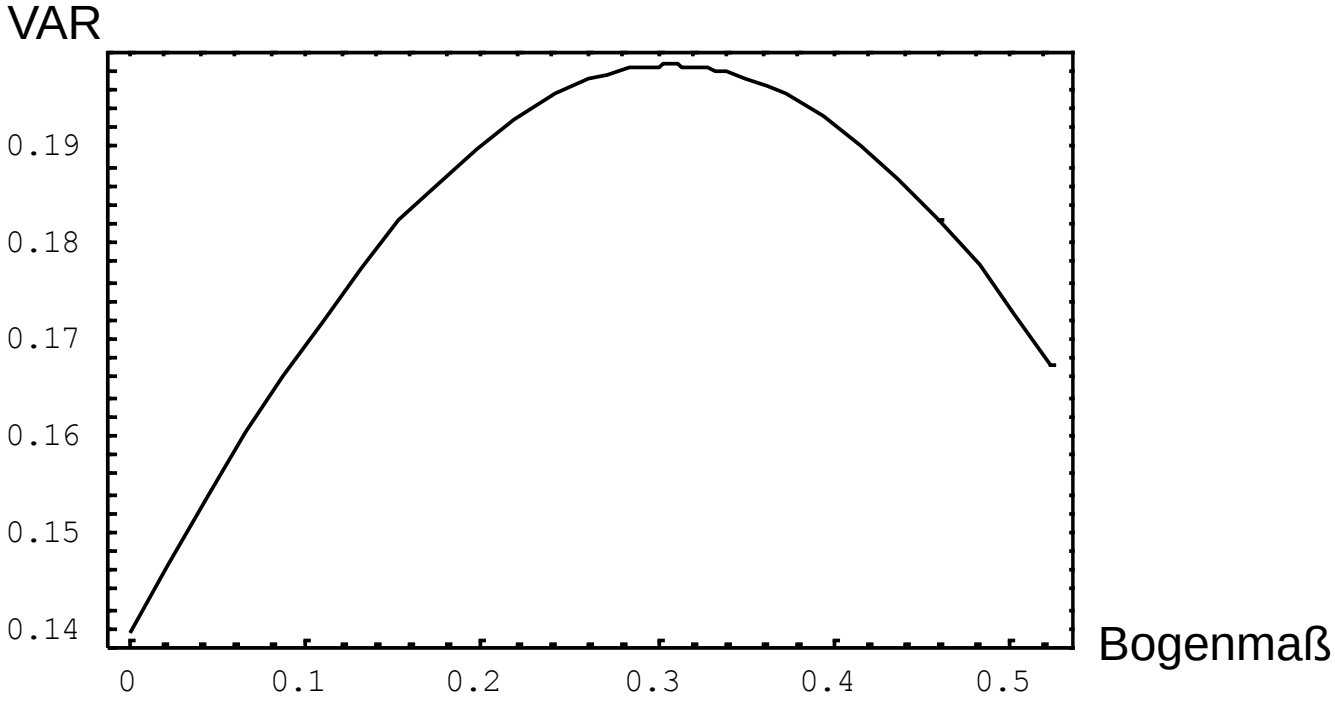
Varimax-Kriterium: $VAR = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} s^2_{F_k}$ → Max.!

<u>Anmerkung:</u> In der Maximierungsprozedur werden die Faktorladungen auf Wurzeln aus den Kommunalitäten bezogen, damit die Variablen das gleiche Gewicht haben (Normierung). Die Ladungsquadrate a^2_{jk} sind daher durch die normierten Ladungsquadrate a^2_{jk}/h^2_j zu ersetzen.

Effekt der Varimax-Rotation:
Die Anzahl der Variablen, die auf einen Faktor hoch laden, wird minimiert. Die Variablen, mit denen die gemeinsamen Faktoren in Beziehung stehen, werden klarer herausgearbeitet. Der Faktor F_1 steht dann mit einer bestimmten Gruppe von Variablen in Beziehung, der Faktor F_2 mit einer anderen Gruppe von Variablen, wobei allerdings keine Überschneidungsfreiheit gegeben sein muss („Gruppenfaktoren“).

Beispiel für die Varimax-Rotation

Zusammenhang von Varimax-Kriterium und Rotationswinkel α



Bogenmaß: Die Größe eines Winkels wird durch die Länge des entsprechenden Bogens am Einheitskreis gemessen (Vollwinkel: 2π oder 360°)

In der Grafik erreicht das Varimax-Kriterium ein Maximum bei einem Bogenmaß von rd. 0,3. Genauer beträgt der Wert des Bogenmaßes 0,311. Hieraus errechnet sich ein Drehungswinkel von

$$\alpha = 0{,}311 \cdot \frac{360}{2\pi} = 0{,}311 \cdot \frac{180}{\pi} = 17{,}8^\circ \qquad (\pi = 3{,}12159\ldots)$$

Mit dem Rotationswinkel α von 17,8° der Varimax-Rotation erhält man die Transformationsmatrix:

$$\mathbf{T}^{RR} = \begin{pmatrix} \cos\ 17{,}8^{o} & -\sin 17{,}8^{o} \\ \sin\ 17{,}8^{o} & \cos\ 17{,}8^{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}952 & -0{,}306 \\ 0{,}306 & 0{,}952 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix der rotierten Faktorladungen (Faktorenanalyse i.e.S.) lautet damit

$$\underset{6\times 2}{\mathbf{A}^{RR}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}950 & 0{,}134 \\ 0{,}897 & \underline{0{,}231} \\ -0{,}844 & \underline{-0{,}383} \\ \underline{-0{,}268} & 0{,}798 \\ -0{,}836 & 0{,}039 \\ \underline{-0{,}466} & 0{,}885 \end{bmatrix}}_{\underset{6\times 2}{\mathbf{A}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}952 & -0{,}306 \\ 0{,}306 & 0{,}952 \end{bmatrix}}_{\underset{2\times 2}{\mathbf{T}^{RR}}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0{,}945 & -0{,}163 \\ 0{,}925 & \underline{-0{,}054} \\ -0{,}921 & \underline{-0{,}106} \\ \underline{-0{,}011} & 0{,}841 \\ -0{,}784 & 0{,}293 \\ \underline{-0{,}173} & 0{,}985 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{ED} \\ \text{BIP} \\ \text{EL} \\ \text{WBIP} \\ \text{GEB} \\ \text{WS} \end{array}$$

Wie zu sehen ist, haben sich die schwierig zu interpretierenden Faktorladungen im mittleren Bereich (unterstrichen) verringert. In einem Fall (a_{52}) ist der entgegengesetzte Effekt eingetreten. Insgesamt hat die Rotation das Faktorenmuster näher an eine Einfachstruktur herangebracht und damit zu Faktoren geführt, die sich besser interpretieren lassen.

Vergleich der unrotierten und der VARIMAX rotierten Faktorenladungen

	unrotierte Ladungen des			rotierte Ladungen des		
	Faktors		Kommunali-täten	Faktors		Kommunali-täten
	1	2		1	2	
ED	0,950	0,134	0,920	0,945	0,163	0,920
BIP	0,897	0,231	0,858	0,925	0,054	0,859
EL	-0,844	-0,383	0,859	-0,921	0,106	0,859
WBIP	-0,268	0,798	0,709	-0,011	-0,841	0,707
GEB	-0,836	0,039	0,700	-0,784	-0,293	0,701
WS	-0,466	0,885	1,000	-0,173	0,985	1,000

Man erkennt dass sich die Kommunalitäten (=erklärte Varianzanteile der manifesten Variablen) – abgesehen von rundungsbedingten Abweichungen – durch die Rotation nicht geändert haben. Der Erklärungsgehalt der beiden extrahierten Faktoren ist gleich geblieben. Die Faktoren sind aber nach der Rotation deutlicher hervorgetreten und damit besser interpretierbar.

Varimax-Rotation mit SPSS

Im SPSS-Daten-Editor der Regionen(12).sav- Datei wählen wir erneut die Menüpunkte

Analysieren
  Dimensionsreduktion
    Faktorenanalyse …

Als erstes Markieren wir die sechs quantitativen Variablen im Fenster „Faktorenanalyse“ z.B. durch Anklicken der Variablen „Einwohnerdichte“ und Ziehen der Maus bei gedrückter linker Maustaste bis zur Variablen „Zu- minus Fortwanderungen“. Durch einen Klick auf die obere Pfeiltaste übertragen wir die zu analysierenden Variablen in das Feld „Variablen:“

Im Fenster „Faktorenanalyse: Extraktion“ wählen wir im Pull-down-Menü „Methode“ die „Hauptachen-Faktorenanalyse“ aus. Außerdem geben wir als „Maximalzahl der Iterationen für Konvergenz“ erneut „10“ an. Wir bestätigen die Angaben durch Anklicken der Schaltfläche „Weiter“.

Im Fenster „Faktorenanalyse: Rotation“ klicken wir im Feld „Methode“ das Item „Varimax“ an und bestätigen wiederum mit „Weiter“.

Die Ergebnisse der Varimax-Rotation werden im SPSS-Viewer ausgewiesen. Ausgangspunkt ist hierbei die unrotierte Faktormatrix der Faktorenanalyse im engeren Sinne bei Schätzung der Kommunalitäten mit der Iterationsmethode (SPSS-Tabelle „Faktorenmatrix“):

Faktorenmatrix[a]

	Faktor	
	1	2
Einwohnerdichte	-.950	.134
BIP/Einwohner	-.897	.231
Anteil der Erwerbstätigen in der Landwirtschaft (in %)	.844	-.383
Wachstum des BIP (in %)	.268	.798
Geburten je 1000 Einwohner	.836	.039
Zu- minus Fortwanderungen je 1000 Einwohner	.466	.885

Extraktionsmethode: Hauptachsen-Faktorenanalyse.

a. Es wurde versucht, 2 Faktoren zu extrahieren. Es werden mehr als 10 Iterationen benötigt. (Konvergenz=.010). Die Extraktion wurde abgebrochen.

SPSS gibt die Transformationsmatrix mit vertauschtem Vorzeichen der Nicht-Hauptdiagonalelemente aus, da SPSS das Koordinatensystem nicht um 17,8° entgegen, sondern um 342,2° (=360°-17,8°) *im* Uhrzeigersinn rotiert:

Faktor-Transformationsmatrix

Faktor	1	2
1	.952	.306
2	-.306	.952

Extraktionsmethode: Hauptachsen-Faktorenanalyse.
Rotationsmethode: Varimax mit Kaiser-Normalisierung.

Während cos(17,8°) = cos(342,2°) = 0,952 ist, nimmt die Sinus-Funktion für die beiden Drehwinkel 17,8° und 342,2° genau das umgekehrte Vorzeichen an: sin(17,8°) = 0,306 und sin(342,2°) = -0,306.

Aus der SPSS-Tabelle „Faktor-Transformationsmatrix“ lässt sich durch Anwendung der Arcus-Funktionen (inverse Winkelfunktionen) der Drehwinkel bestimmen. Der Wert der inversen Winkelfunktionen arccos(0,952) = 17,8° mit $-90° \leq \alpha \leq 90°$ und arcsin(0,306) = 17,8° mit $0° \leq \alpha \leq 180°$ gibt hier den Drehwinkel einer Rotation des Faktorraums entgegen dem Uhrzeigersinn, d.h. im mathematischen Uhrzeigersinn, an.

Die von SPSS ausgewiesene rotierte Faktormatrix (SPSS-Tabelle „Rotierte Faktormatrix“) ist mit dem sich hieraus ergebenden Drehwinkel von 342,2° (=360°-17,8°) einer Rotation des Faktorraums im Uhrzeigersinn konform:

Rotierte Faktorenmatrix[a]

	Faktor	
	1	2
Einwohnerdichte	-.945	-.163
BIP/Einwohner	-.925	-.054
Anteil der Erwerbstätigen in der Landwirtschaft (in %)	.921	-.106
Wachstum des BIP (in %)	.011	.841
Geburten je 1000 Einwohner	.784	.293
Zu- minus Fortwanderungen je 1000 Einwohner	.173	.985

Extraktionsmethode: Hauptachsen-Faktorenanalyse.
Rotationsmethode: Varimax mit Kaiser-Normalisierung.

a. Die Rotation ist in 3 Iterationen konvergiert.