3.2 Zweifaktorielle Varianzanalyse

Die Abhängigkeit einer quantitativen Variablen Y von zwei Faktoren A und B, d.h. von zwei qualitativen unabhängigen Variablen, lässt sich mit einer **zweifaktoriellen Varianzanalyse** untersuchen. Bei der zweifachen Varianzanalyse ist zum einen eine Unterscheidung zwischen einem Modell ohne und mit Wechselwirkungen vorzunehmen:

Zweifaktorielle Varianzanalyse

ohne Wechselwirkungen (ohne Interaktion)	**mit Wechselwirkungen** (mit Interaktion)
Einfluss der Faktoren A und B	Einfluss der Faktoren A und B und der Wechselwirkung zwischen A und B

Eine Wechselwirkung liegt z.B. vor, wenn etwa eine bestimmte Schülergruppe (Faktor B) besser nach einer bestimmten Unterrichtsmethode (Faktor A) lernt als andere Schülergruppen. Die beiden Faktoren A und B wären in diesem Fall nicht mehr unabhängig, so dass die Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung AxB erforderlich wäre.

Zum anderen ist bei der **zweifaktoriellen Varianzanalyse** zu unterscheiden, ob eine **gleiche oder ungleiche Zellenbesetzung** vorliegt. Die Zelle j,k ist dabei definiert durch die Kombination der j-ten Ausprägung des Faktors A und k-ten Ausprägung des Faktors B. Die Zellenbesetzungen sind nichts anderes als die absoluten Häufigkeiten n_{jk} der Faktorkombinationen $A_j x B_k$:

n_{jk}: absolute Häufigkeit der Faktorkombination $A_j x B_k$.

Für p Ausprägungen des Faktors A, A_1, A_2, …, A_p, und q Ausprägungen des Faktors B, B_1, B_2, …, B_q, sind die Zellbesetzungen in der folgenden Kreuztabelle wiedergegeben:

Kreuztabelle mit Zellenbesetzungen

	Faktor B			
Faktor A	B_1	B_2	…	B_q
A_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1q}
A_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2q}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
A_p	n_{p1}	n_{p2}	…	n_{pq}

Im Falle einer **gleichen Zellenbesetzung**, also für

$n_{jk} = n$ für alle $j=1,2,\ldots,p$; $k=1,2,\ldots,q$

spricht man von einer **orthogonalen Varianzanalyse**. Bei einer **ungleichen Zellenbesetzung** liegt eine **nonorthogonale Varianzanalyse vor**.

Zweifaktorielle Varianzanalyse

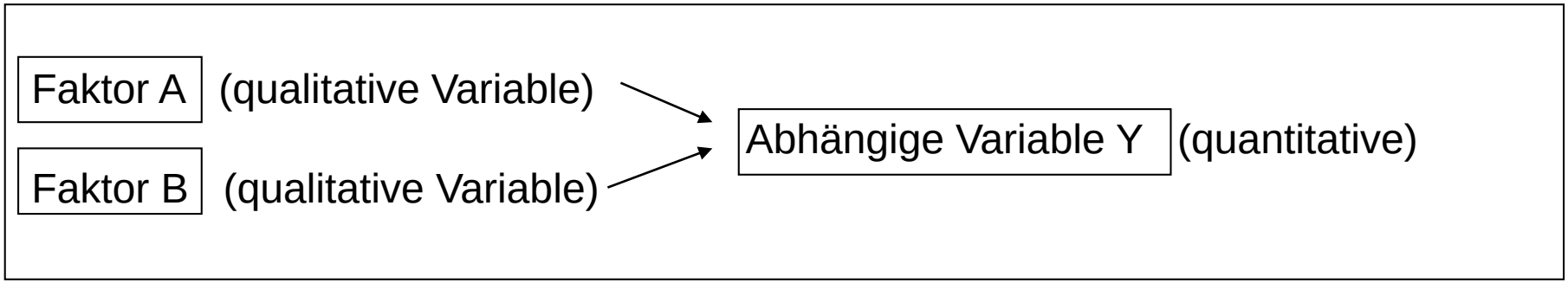
Orthogonale Varianzanalyse gleiche Zellenbesetzung	Nonorthogonale Varianzanalyse ungleiche Zellenbesetzung

Während bei experimentellen Daten im Allgemeinen eine gleiche Zellbesetzung herstellbar ist, sieht es bei Beobachtungsdaten anders aus. In diesem Fall müssen bestimmte Anpassungen vorgenommen werden, da sich die einzelnen Abweichungsquadratsummen im Gegensatz zum orthogonalen Fall nicht von vornherein zur totalen Abweichungsquadratsumme Q_T aufsummieren. Erfreulicherweise wird die Anpassung nach Wahl der Anpassungsmethode (oder: Voreinstellung) von einem Statistikprogramm wie SPSS automatisch durchgeführt.

3.2.1 Orthogonale Varianzanalyse

A. Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse ohne Wechselwirkungen

Im einfachsten Fall der zweifaktoriellen Varianzanalyse wird nur der direkte Einfluss der beiden Faktoren ermittelt. Der **zweifaktoriellen Varianzanalyse ohne Wechselwirkung** (=ohne Interaktion) liegt das folgende Abhängigkeitsschema zugrunde:



Wiederum gehen wir von einer Stichprobe von N Untersuchungseinheiten aus einer Grundgesamtheit aus. Bei p Stufen des Faktors A und q Stufen des Faktors B ist für die Werte der abhängigen Variablen, y_{ijk}, eine Dreifachindizierung vorzunehmen.

Wert der abhängigen Variablen, y_{ijk}, mit Dreifachindex:
- 1. Index: i-te Untersuchungseinheit, $i=1,2,\ldots,n_{jk}$,
- 2. Index: j-te Ausprägung des Faktors A (Faktorstufe A_j), $j=1,2,\ldots,p$,
- 3. Index: k-te Ausprägung des Faktors B (Faktorstufe B_k), $k=1,2,\ldots,q$.

Das **varianzanalytische Modell ohne Wechselwirkung** unterstellt, dass sich der Beobachtungswert y_{ijk} systematisch aus dem Gesamtmittelwert der Grundgesamtheit, μ, sowie den Effekten des Faktors A, $\alpha_j = \mu_{j\bullet} - \mu$, und des Faktors B, $ß_k = \mu_{\bullet k} - \mu$, zusammensetzt. Alle anderen Einflussgrößen, die nicht weiter betrachtet werden, schlagen sich wie im Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse wiederum in einer Restgröße (Störgröße) ε_{ijk} nieder, die als normalverteilt angenommen wird:

(3.13) $$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk}$$

Die Mittelwerte der p Stufen des Faktors A, $\mu_{j\bullet}$, in der Grundgesamtheit sind durch

(3.14) $$\mu_{j\bullet} = \mu + \alpha_j \,, \quad j = 1,2,\ldots,p$$

gegeben und die Mittelwerte der q Stufen des Faktors B, $\mu_{\bullet k}$, durch.

(3.15) $$\mu_{\bullet k} = \mu + \beta_k \,, \quad k = 1,2,\ldots,q$$

Da die Störgröße ε keinen systematischen Einfluss auf die abhängige Variable y hat, ist ihr Erwartungswert gleich null: $E(\varepsilon_{ijk}) = 0$. Der Erwartungswert der abhängigen Variablen y lautet daher [Erwartungswert beider Seiten der Gl. (3.13)]

(3.16) $$E(y_{ijk}) = \mu + \alpha_j + \beta_k$$

oder mit (3.13) und (3.14)

(3.17) $$E(y_{ijk}) = \mu_{j\bullet} + \mu_{\bullet k} - \mu$$

Der unerklärte Teil der abhängigen Variablen y ergibt sich stets aus der Beobachtung y_{ijk} und dem Erwartungswert $E(y_{ijk})$:

(3.18) $$\varepsilon_{ijk} = y_{ijk} - E(y_{ijk})$$

In der zweifachen Varianzanalyse werden die beiden Nullhypothesen

(3.19) $$H_0 \text{ (Faktor A)}: \quad \mu_{1\bullet} = \ldots = \mu_{j\bullet} = \ldots = \mu_{p\bullet}$$

und

(3.20) $$H_0 \text{ (Faktor B)}: \quad \mu_{\bullet 1} = \ldots = \mu_{\bullet k} = \ldots = \mu_{\bullet q}$$

getestet, die unterstellen, dass die Mittelwerte der abhängigen Variablen Y in den Stufen des Faktors A bzw. des Faktors B gleich sind. Die Faktoren A und B üben nur dann einen Einfluss auf die abhängige Variable Y aus, wenn sich die Stufenmittelwerte voneinander unterscheiden.

Unterschiedliche Wirkungen der Stufen des Faktors A auf die abhängige Variable Y werden in der zweifaktoriellen Varianzanalyse aufgrund eines Vergleichs ihrer berechneten **Mittelwerte der p Stufen des Faktors A** (**Zeilenmittelwerte)**, $\bar{y}_{1\bullet}, \bar{y}_{2\bullet}, \ldots, \bar{y}_{p\bullet}$, mit

(3.21) $$\bar{y}_{j\bullet} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{ijk}$$

beurteilt. Entsprechend ist der Effekt des Faktors B auf Y anhand von Unterschieden zwischen berechneten **Mittelwerte der q Stufen des Faktors B (Spaltenmittelwerte)**, $\bar{y}_{\bullet 1}, \bar{y}_{\bullet 2}, ..., \bar{y}_{\bullet q}$, mit

$$(3.22) \quad \bar{y}_{\bullet k} = \frac{1}{p \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} y_{ijk}$$

zu bewerten sein. Der **Gesamtmittelwert** $\bar{y}$ der Stichprobe ergibt sich hier aus

$$(3.23) \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{ijk}$$

Wegen $n_{jk} = n$ für alle j,k ist die Gesamtzahl N der Untersuchungseinheiten durch

$$N = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} n_{jk} = p \cdot q \cdot n$$

gegeben.

Die **Beobachtungswerte der abhängigen Variablen Y** (y-Werte) zur Durchführung einer zweidimensionalen Varianzanalyse lassen sich in einer **Kreuztabelle** anordnen (orthogonaler Fall):

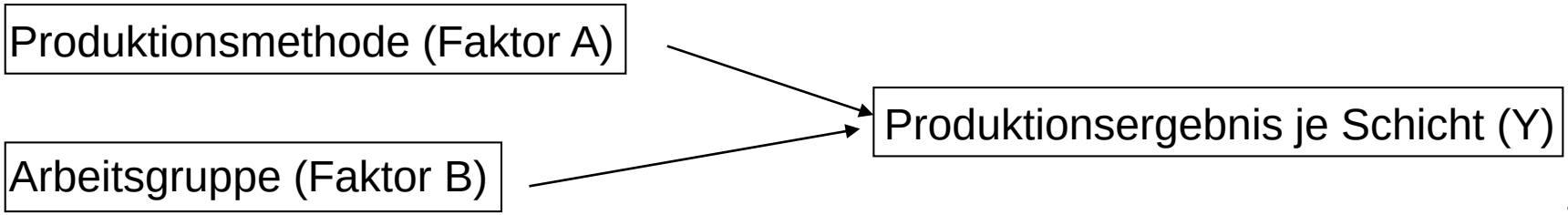
	Faktor B			
Faktor A	B_1	B_2	…	B_q
A_1	$y_{111}, y_{211}, \ldots, y_{n11}$	$y_{112}, y_{212}, \ldots, y_{n12}$	…	$y_{11q}, y_{21q}, \ldots, y_{n1q}$
A_2	$y_{121}, y_{221}, \ldots, y_{n21}$	$y_{122}, y_{222}, \ldots, y_{n22}$	…	$y_{12q}, y_{22q}, \ldots, y_{n2q}$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
A_p	$y_{1p1}, y_{2p1}, \ldots, y_{np1}$	$y_{1p2}, y_{2p2}, \ldots, y_{np2}$	…	$y_{1pq}, y_{2pq}, \ldots, y_{npq}$

Beispiel 3.7: Wir verwenden hier dieselben Daten der produzieren Pkw-Teile jetzt aber unter zusätzlicher Angabe der Arbeitsgruppen:

Arbeiter	Produktionsmethode (Faktor A)	Arbeitsgruppe (Faktor B)	Output (y_{ijk})
1	1	1	69
2	1	1	77
3	1	2	61
4	1	2	67
5	1	3	65
6	1	3	69
7	2	1	79
8	2	1	83
9	2	2	62
10	2	2	64
11	2	3	72
12	2	3	78
13	3	1	80

14	3	1	78
15	3	2	74
16	3	2	76
17	3	3	80
18	3	3	74
19	4	1	75
20	4	1	67
21	4	2	70
22	4	2	62
23	4	3	70
24	4	3	76

Mit der zweifachen Varianzanalyse soll jetzt der Einfluss der beiden Faktoren Produktionsmethode (Faktor A) und Arbeitsgruppe (Faktor B) auf das Produktionsergebnis je Schicht untersucht werden:



Wir unterscheiden 4 verschiedene Produktionsverfahren (p=4 Stufen des Faktors A) und 3 verschiedene Arbeitsgruppen (q=3 Stufen des Faktors B). Der besseren Übersicht halber ordnen wir die y-Werte in einer Kreuztabelle an, die sich aus den Kombinationen der p=4 Stufen des Faktors A mit den q=3 Stufen des Faktors B ($p \cdot q = 4 \cdot 3$ Zellen) ergibt:

Faktor A (Produktions-methode)	Faktor B (Arbeitsgruppe)		
	B_1	B_2	B_3
A_1	$y_{111} = 69$, $y_{211} = 77$	$y_{112} = 61$, $y_{212} = 67$	$y_{113} = 65$, $y_{213} = 69$
A_2	$y_{121} = 79$, $y_{221} = 83$	$y_{122} = 62$, $y_{222} = 64$	$y_{123} = 72$, $y_{223} = 78$
A_3	$y_{131} = 80$, $y_{231} = 78$	$y_{132} = 74$, $y_{232} = 76$	$y_{133} = 80$, $y_{233} = 74$
A_4	$y_{141} = 75$, $y_{241} = 67$	$y_{142} = 70$, $y_{242} = 62$	$y_{143} = 70$, $y_{243} = 76$

$y_{111}=69$ Interpretation der Effekte im Skript

$y_{231}=78$ Interpretation der Effekte in der Vorlesung

Mittelwerte der Stufen des Faktors A (Zeilenmittelwerte):

$$\bar{y}_{1\bullet} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{i1k} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot (69 + 77 + 61 + 67 + 65 + 69) = \frac{1}{6} \cdot 408 = 68$$

$$\bar{y}_{2\bullet} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{i2k} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot (79 + 83 + 62 + 64 + 72 + 78) = \frac{1}{6} \cdot 438 = 73$$

$$\bar{y}_{3\bullet} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{i3k} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot (80 + 78 + 74 + 76 + 80 + 74) = \frac{1}{6} \cdot 462 = 77$$

$$\bar{y}_{4\bullet} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} y_{i4k} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot (75 + 67 + 70 + 62 + 70 + 76) = \frac{1}{6} \cdot 420 = 70$$

Mittelwerte der Stufen des Faktors B (Spaltenmittelwerte):

$$\bar{y}_{\bullet 1} = \frac{1}{p \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} y_{ij1} = \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot (69 + 77 + 79 + 83 + 80 + 78 + 75 + 67) = 76$$

$$\bar{y}_{\bullet 2} = \frac{1}{p \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} y_{ij2} = \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot (61 + 67 + 62 + 64 + 74 + 76 + 70 + 62) = 67$$

$$\bar{y}_{\bullet 3} = \frac{1}{p \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} y_{ij3} = \frac{1}{4 \cdot 2} \cdot (65 + 69 + 72 + 78 + 80 + 74 + 76 + 70) = 73$$

Mittelwerte der Faktorstufen mit SPSS

Die Mittelwerte der Faktorstufen (Zeilen- und Spaltenmittelwerte) lassen sich erneut mit SPSS durch Wahl des Menüpunktes „Mittelwerte vergleichen“ berechnen:

Produktionsergebnis je Arbeitsschicht * Produktionsmethode

Produktionsergebnis je Arbeitsschicht

Produktionsmethode	Mittelwert	N	Standardabweichung
1	68.00	6	5.329
2	73.00	6	8.532
3	77.00	6	2.757
4	70.00	6	5.177
Insgesamt	72.00	24	6.440

Produktionsergebnis je Arbeitsschicht * Arbeitsgruppe

Produktionsergebnis je Arbeitsschicht

Arbeitsgruppe	Mittelwert	N	Standardabweichung
1	76.00	8	5.477
2	67.00	8	5.782
3	73.00	8	4.986
Insgesamt	72.00	24	6.440

In der letzten Zeile der beiden Tabellen ist jeweils der Gesamtmittelwert ausgewiesen:

$$\bar{y} = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} y_{ijk} = 69 + 77 + ... + 76 = \frac{1}{24}1728 = 72.$$

Wie sind hier die beobachteten Produktionswerte je Schicht nach dem Modell der zweifachen Varianzanalyse ohne Wechselwirkungen (3.13) zu interpretieren?

Nach (3.14) und (3.15) geben die Effekte der beiden Faktoren die Veränderungen des Gesamtmittelwerts an, $\alpha_j = \mu_{j\bullet} - \mu$ und´$ß_k = \mu_{\bullet k} - \mu$, die durch die berechneten Mittelwertdifferenzen $\bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}$ und $\bar{y}_{\bullet k} - \bar{y}$ gemessen werden. Nehmen wir beispielhaft wiederum die Produktionsleistung des ersten Arbeiters in der Schicht von $y_{111} = 69$.

Die Effekte der beiden Faktoren A und B sind dann durch

$\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y} = 68 - 72 = -4$ (erster Arbeiter gehört zur Stufe A_1 des Faktors A) und

$\bar{y}_{\bullet 1} - \bar{y} = 76 - 72 = 4$ (erster Arbeiter gehört zur Stufe B_1 des Faktors B) gegeben.
Wir bezeichnen das Stichprobenäquivalent des Erwartungswerts $E(y_{ijk})$ mit $\bar{y}_{ijk}^{erw}$.

Dann berechnet sich sein erwarteter Produktionswert aus den Formeln (3.16) oder (3.17), in dem man die Mittelwerte bzw. Faktoreffekte der Grundgesamtheit durch die Stichprobenmittelwerte bzw. Faktoreffekte der Stichprobe ersetzt:

$\bar{y}_{11}^{erw} = \bar{y} + (\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}) + (\bar{y}_{\bullet 1} - \bar{y}) = 72 + (-4) + 4 = 72$ [→ Formel (3.16)] oder

$\bar{y}_{11}^{erw} = \bar{y}_{1\bullet} + \bar{y}_{\bullet 1} - \bar{y} = 68 + 76 - 72 = 72$ [→ Formel (3.17)].

Da der erste Arbeiter tatsächlich 69 Teile produziert hat, enthält die erste Beobachtung y_{111} (=69) einen unerklärten Rest e_{111} (Stichprobenrealisation der Störvariablen ε_{111}) von -3 Produktionsteile:

$$e_{111} = y_{111} - \bar{y}_{11}^{erw} = 69 - 72 = -3$$

Der Restwert (e_{111}) beträgt also beim ersten Arbeiter -3. Bei Arbeitern, die die Teile mit dem Produktionsverfahren A_1 herstellen, ist im Mittel eine um 4 Einheiten unter dem Durchschnitt liegende Produktionsleistung zu erwarten. Dagegen liegt die Produktionsleistung der Arbeitsgruppe B_1 im Mittel um 4 Einheiten über dem Gesamtdurchschnitt.

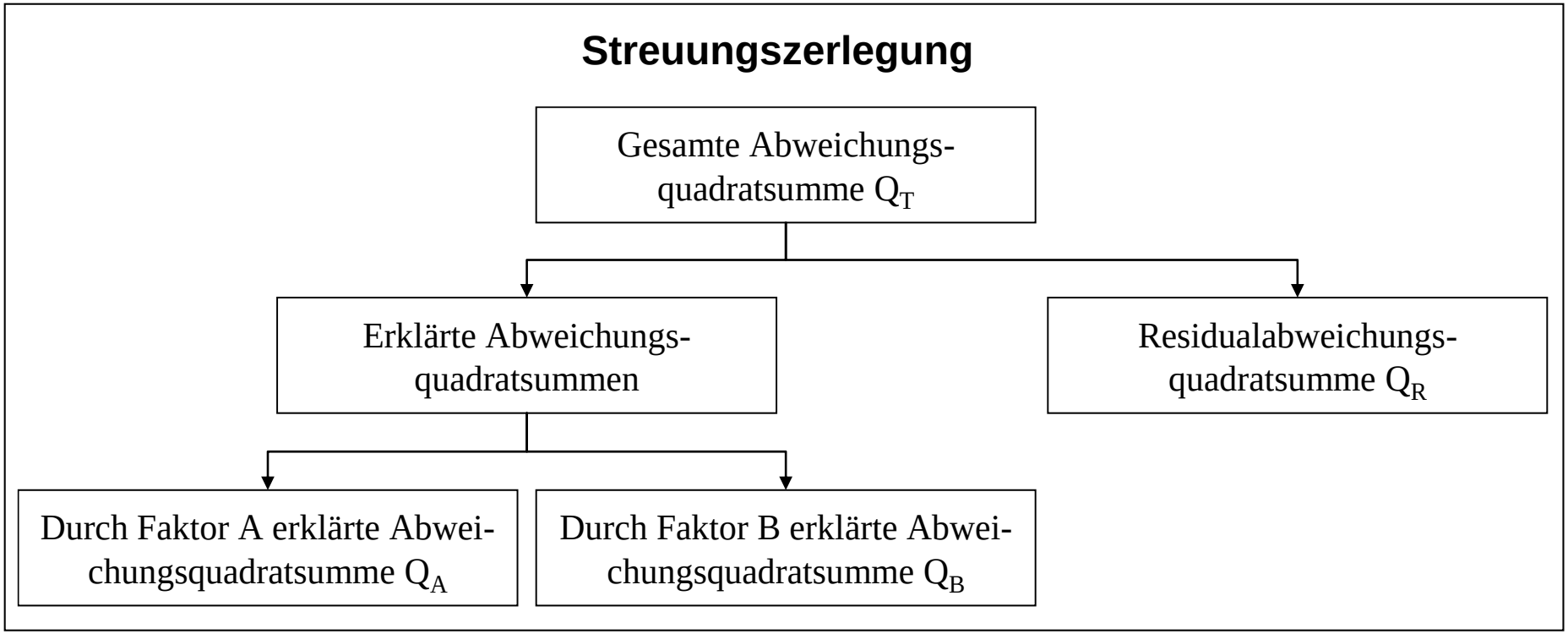
Da sich die beiden gegensätzlichen Faktoreffekte A_1 und B_1 genau ausgleichen, würde man für den ersten Arbeiter eine Produktion in Höhe des Gesamtmittels $\bar{y} = 72$ erwarten. Tatsächlich liegt seine Produktionsleistung jedoch um 3 Einheiten darunter, so dass sich ein Restwert (unerklärter Wert e_{111}) von -3 ergibt.

Die Unterschiede in den berechneten Mittelwerten der Faktorstufen können jedoch zufällig sein. Ob der Faktor A und/oder der Faktor B einen „substanziellen“ Einfluss auf das Produktionsergebnis haben, muss wiederum aufgrund eines Tests geklärt wer-den.

♦

Streuungszerlegung, mittlere Abweichungs quadratsummen und Prüfgröße

Bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse, in der allein die direkten Effekte der Faktoren A und B berücksichtigt werden, lässt sich die totale Abweichungsquadratsumme Q_T in drei Komponenten aufspalten:



Aufspaltung der totalen (gesamten) Abweichungsquadratsumme:

$$(3.24)\quad Q_T = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y})^2 =$$

$$\underbrace{n\cdot q\cdot\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{y}_{j\bullet}-\bar{y}\right)^2}_{Q_A}+\underbrace{n\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{q}\left(\bar{y}_{\bullet k}-\bar{y}\right)^2}_{Q_B}+\underbrace{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}_{j\bullet}-\bar{y}_{\bullet k}+\bar{y}\right)^2}_{Q_R}$$

Bezieht man die Abweichungsquadratsummen Q_T, Q_A, Q_B und Q_R auf die Anzahl der Freiheitsgrade, erhält man die mittleren Abweichungsquadratsummen:

$$(3.25)\quad MQ_T = \frac{Q_T}{N-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ijk}-\bar{y}\right)^2$$

$$(3.26)\quad MQ_A = \frac{Q_A}{p-1} = \frac{n\cdot q}{p-1}\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{y}_{j\bullet}-\bar{y}\right)^2$$

$$(3.27)\quad MQ_B = \frac{Q_B}{q-1} = \frac{n\cdot p}{q-1}\sum_{k=1}^{q}\left(\bar{y}_{\bullet k}-\bar{y}\right)^2$$

(3.28) $$MQ_R = \frac{Q_R}{N-(p+q-1)} = \frac{1}{N-(p+q-1)} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}_{\bullet k} + \bar{y}\right)^2$$ oder

(3.29) $$MQ_R = \frac{Q_R}{N-(p+q-1)} = \frac{1}{N-(p+q-1)} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{ijk}^{erw}\right)^2$$

Die Prüfgrößen der F-Tests für die Faktoren A und B lauten

(3.30) $$F_A = \frac{Q_A/(p-1)}{Q_R/[N-(p+q-1)]} = \frac{MQ_A}{MQ_R}$$

(3.31) $$F_B = \frac{Q_B/(q-1)}{Q_R/[N-(p+q-1)]} = \frac{MQ_B}{MQ_R}$$

Die Prüfgrößen F_A und F_B folgen einer F-Verteilung mit p-1 und N-(p+q-1) bzw. q-1 und N-(p+q-1) Freiheitsgraden.

In der folgenden **ANOVA-Tabelle** sind die Quellen der Streuung übersichtlich zusammengestellt:

Quelle	Abweichungsquadratsumme	Freiheitsgrade	Mittlere Abweichungsquadratsumme
ins-gesamt	$Q_T = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2$	N – 1	$MQ_T = \frac{Q_T}{N-1}$
Faktor A	$Q_A = q \cdot n \sum_{j=1}^{p} \left(\bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}\right)^2$	p – 1	$MQ_A = \frac{Q_A}{p-1}$
Faktor B	$Q_B = p \cdot n \sum_{k=1}^{q} \left(\bar{y}_{\bullet k} - \bar{y}\right)^2$	q – 1	$MQ_B = \frac{Q_B}{q-1}$
Rest (nicht erklärt)	$Q_R = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \left(y_{ijk} - \bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}_{\bullet k} + \bar{y}\right)^2$	N – (p + q – 1)	$MQ_R = \frac{Q_R}{N-(p+q-1)}$

Beispiel 3.8: Für die Variable Produktionsergebnis je Schicht (Y) berechnen wir die totale Abweichungsquadratsumme Q_T (mit und die Residualabweichungsquadrat-summe Q_R unter Verwendung der in der Formel (3.24) gegebenen Ausdrücke in einer Arbeitstabelle:

i	j (A)	k (B)	y_{ijk}	$\bar{y}_{j\bullet}$	$\bar{y}_{\bullet k}$	$(y_{ijk} - \bar{y})^2$	$(y_{ijk} - \bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}_{\bullet k} + \bar{y})^2$
1	1	1	69	68	76	9	9
2	1	1	77	68	76	25	25
1	1	2	61	68	67	121	4
2	1	2	67	68	67	25	16
1	1	3	65	68	73	49	16
2	1	3	69	68	73	9	0
1	2	1	79	73	76	49	4
2	2	1	83	73	76	121	36
1	2	2	62	73	67	100	36
2	2	2	64	73	67	64	16

i	j (A)	k (B)	y_{ijk}	$\bar{y}_{j\bullet}$	$\bar{y}_{\bullet k}$	$(y_{ijk} - \bar{y})^2$	$(y_{ijk} - \bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}_{\bullet k} + \bar{y})^2$
1	2	3	72	73	73	0	4
2	2	3	78	73	73	36	16
1	3	1	80	77	76	64	1
2	3	1	78	77	76	36	9
1	3	2	74	77	67	4	4
2	3	2	76	77	67	16	16
1	3	3	80	77	73	64	4
2	3	3	74	77	73	4	16
1	4	1	75	70	76	9	1
2	4	1	67	70	76	25	49
1	4	2	70	70	67	4	25
2	4	2	62	70	67	100	9
1	4	3	70	70	73	4	1
2	4	3	76	70	73	14	25
Summe		-	-	-	-	$Q_T = 954$	$Q_R = 342$

Während sich die totale Abweichungsquadratsumme Q_T gegenüber der einfachen Varianzanalyse nicht verändert hat, ist die Residualabweichungsquadratsumme Q_R gesunken. Die Verringerung von Q_R ist darauf zurückzuführen, dass jetzt neben dem Faktor A (Produktionsmethode) ein weiterer Faktor B (Arbeitsgruppe) einen Teil der Gesamtstreuung von Y erklärt.

Die Abweichungsquadratsummen Q_A und Q_B, die auf die Effekte der Faktoren A und B zurückgeführt werden können, nehmen die Werte

$$
\begin{aligned}
Q_A &= q \cdot n \sum_{j=1}^{p} \left(\bar{y}_{j\bullet} - \bar{y}\right)^2 \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \left[(68-72)^2 + (73-72)^2 + (77-72)^2 + (70-72)^2\right] \\
&= 6 \cdot (16 + 1 + 25 + 4) = 6 \cdot 46 = 276
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
Q_B &= p \cdot n \sum_{k=1}^{q} \left(\bar{y}_{\bullet k} - \bar{y}\right)^2 \\
&= 4 \cdot 2 \cdot \left[(76-72)^2 + (67-72)^2 + (73-72)^2\right] \\
&= 8 \cdot (16 + 25 + 1) = 8 \cdot 42 = 336
\end{aligned}
$$

Vergleicht man die hier berechnete Abweichungsquadratsumme Q_A mit der bei der einfaktoriellen Varianzanalyse berechneten Abweichungsquadratsumme, die durch den Faktor A (Produktionsmethode) erklärt wird, stellt man keinen Unterschied fest. Neu hinzugekommen ist die durch den Faktor B erklärte Abweichungsquadratsumme Q_B von 336.
Direkt berechnet werden müssen allerdings nur drei der vier Abweichungsquadratsummen. Die etwas umständlich zu berechnende Residualabweichungsquadratsumme Q_R kann daher einfach als Differenz zwischen Q_T und den erklärten Abweichungsquadratsummen Q_A und Q_B ermittelt werden:

$$Q_R = Q_T - Q_A - Q_B = 954 - 276 - 336 = 342$$

Wir können jetzt die **mittleren Abweichungsquadratsummen** bestimmen:

$$MQ_T = \frac{Q_T}{N-1} = \frac{954}{24-1} = 41{,}478$$

$$MQ_A = \frac{Q_A}{p-1} = \frac{276}{4-1} = 92$$

$$MQ_B = \frac{Q_B}{q-1} = \frac{336}{3-1} = 168$$

$$MQ_R = \frac{Q_R}{N-(p+q-1)} = \frac{342}{24-(4+3-1)} = \frac{342}{18} = 19$$

Wie Q_T und Q_A bleiben auch MQ_T und MQ_A gegenüber der einfaktoriellen Varianzanalyse unverändert, da die Zahl der Freiheitsgrade N-1 bzw. p-1 erhalten bleibt. Als Prüfgrößen erhalten wir folgende Werte:

$$F_A = \frac{MQ_A}{MQ_R} = \frac{92}{19} = 4{,}842$$

und

$$F_B = \frac{MQ_B}{MQ_R} = \frac{168}{19} = 8{,}842$$

Für den Test auf Signifikanz der Faktoreffekte geben wir ein Signifikanzniveau α von 5% vor. Die kritischen Werte können wiederum einer F-Verteilungstabelle entnommen werden, wobei zu interpolieren ist, wenn die Quantile für die exakte Freiheitsgradzahl fehlen:

	Quantile der F-Verteilung				
		v_1			
F(x)	v_2	1	2	3	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,95	12	4,75	3,89	3,49	3,26
0,99		9,33	6,93	5,95	5,41
0,95	15	4,54	3,68	3,29	3,06
0,99		8,68	6,36	5,42	4,89
0,95	20	4,35	3,49	3,10	2,87
0,99		8,10	5,85	4,94	4,43
0,95	25	4,24	3,39	2,99	2,76
0,99		7,77	5,57	4,68	4,18
0,95	30	4,17	3,32	2,92	2,69
0,99		7,56	5,39	4,51	4,02
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Kritische Werte für Faktor A

Kritische Werte für Faktor B

Kritischer Wert für Faktor A: $F_{p-1;N-(p+q-1);1-\alpha} = F_{3;18;0,95}$

$F_{3;15;0,95} = 3{,}29$ und $F_{3;20;0,95} = 3{,}10$ → Differenz 19 Einheiten

Lineare Interpolation: $19 \cdot \frac{2}{5} = 7{,}6 \approx 8$

$F_{3;18;0,95} = F_{3;20;0,95} + 0{,}08 = 3{,}10 + 0{,}08 = 3{,}18$

Kritischer Wert für Faktor B: $F_{q-1;N-(p+q-1);1-\alpha} = F_{2;18;0,95}$

$F_{2;15;0,95} = 3{,}68$ und $F_{2;20;0,95} = 3{,}49$ → Differenz 19 Einheiten

Lineare Interpolation: $19 \cdot \frac{2}{5} = 7{,}6 \approx 8$

$F_{2;18;0,95} = F_{2;20;0,95} + 0{,}08 = 3{,}49 + 0{,}08 = 3{,}57$

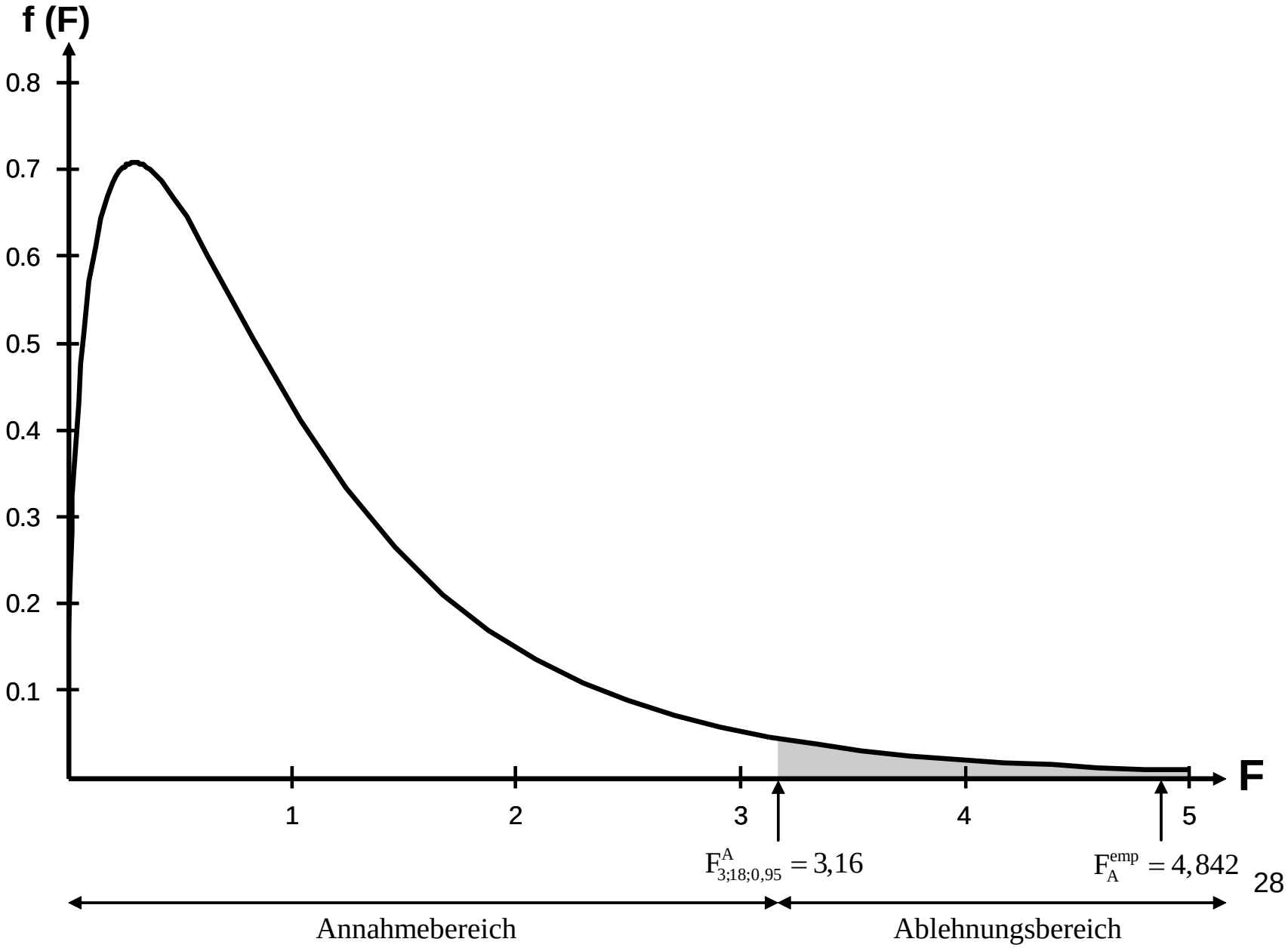
Damit ergeben sich die folgenden **Testentscheidungen**:

$F_A = 4{,}842 > F_{3;18;0,95} = 3{,}18 \quad \Rightarrow$ Nullhypothese (3.19) ablehnen

und

$F_B = 8{,}842 > F_{2;18;0,95} = 3{,}57 \quad \Rightarrow$ Nullhypothese (3.20) ablehnen

Für den Faktor A ist die Testentscheidung in der Grafik wiedergegeben (in Grafik: nicht interpolierter, sondern exakter kritischer Wert ausgewiesen):



In beiden Fällen wird die Nullhypothese gleicher Mittelwerte in den Faktorstufen auf einem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt. Die Mittelwertunterschiede in den Stufen der beiden Faktoren können daher nicht als rein zufallsbedingt angesehen werden. Ihre Signifikanz gibt Anlass, sie als substanziell zu interpretieren. Sowohl der Produktionsmethode (Faktor A) als auch der Arbeitsgruppe (Faktor B) werden daher substanzielle Effekte auf die Produktionsleitung je Schicht zugeschrieben werden können.

Frage: Wie ist es zu erklären, dass der Faktor A in der zweifaktoriellen Varianzanalyse signifikant ist, während dies in der einfaktoriellen Varianzanalyse nicht der Fall ist?

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit SPSS

Im Gegensatz zur einfaktoriellen Varianzanalyse ist die **zweifaktorielle Varianzanalyse in SPSS** nicht unter dem Menüpunkt „Mittelwerte vergleichen“ aufrufbar, sondern unter den Punkten

Analysieren
  Allgemeines lineares Modell
    Univariat …

Im Fenster „Univariat“ markieren wir die Variable output und bringen sie durch Anklicken der oberen Pfeilschaltfläche in das Feld „Abhänige Variable:“ Danach markieren wir die beiden Faktoren prodmeth und arbeiter und übertragen sie in das Feld „Feste Faktoren:“

Wir klicken die Schaltfläche „Modell…“ an und finden im Feld „Modell angeben“ des Fensters „Univariat: Modell“ die Voreinstellung „Gesättigtes Modell“ (=saturiertes Modell, komplettes Modell). Um sie zu ändern, wählen wir das Item „Anpassen“. Im Pulldown-Menü des Feldes „Terme konstruieren“ stellen wir „Haupteffekte“ ein. Anschließend markieren wir im Feld „Faktoren und Kovariate“ die Faktoren prodmeth(F) und arbeiter(F) und übertragen sie durch Anklicken der Pfeilschaltfläche in das Feld „Modell“. Wir bestätigen mit „Weiter“ und anschließend mit „OK“.
Die hierunter von SPSS ausgegebene ANOVA-Tabelle ist umfangreicher als im Falle der ONEWAY-Tabelle der einfaktoriellen Varianzanalyse und bedarf daher einiger Erläuterungen.

Tests der Zwischensubjekteffekte

Abhängige Variable: Produktionsergebnis je Arbeitsschicht

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
Korrigiertes Modell	612.000[a]	5	122.400	6.442	.001
Konstanter Term	124416.000	1	124416.00	6548.211	.000
Prodmeth.	**276.000**	**3**	**92.000**	**4.842**	**.012**
Arbeiter	**336.000**	**2**	**168.000**	**8.842**	**.002**
Fehler	**342.000**	**18**	**19.000**		
Gesamt	125370.000	24			
Korrigierte Ges.variation	**954.000**	23			

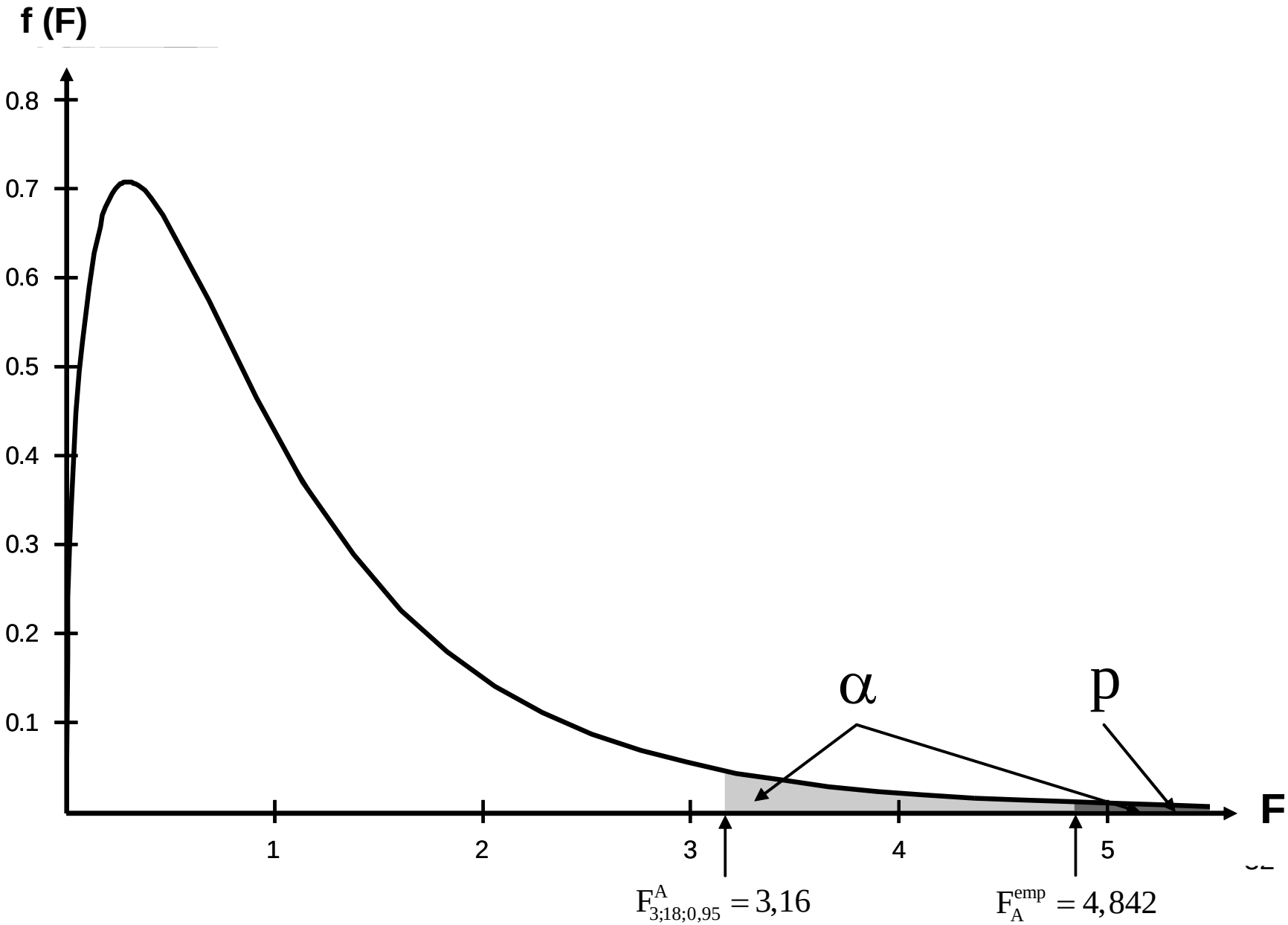
a. R-Quadrat = .642 (korrigiertes R-Quadrat = .542)

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die Quellen, die üblicherweise in einer **ANOVA-Tabelle** ausgewiesen werden, durch Fettdruck und eine größere Schriftgröße hervorgehoben. Wir finden hierin die von uns berechneten Abweichungsquadratsummen, Freiheitsgradzahlen (df = degrees of freedom), mittleren Abweichungsquadratsummen und F-Werte wieder. Vergleichen wir die in der Spalte „Signifikanz ausgewiesenen p-Werte mit dem vorgegebenen Signifikanzniveau α von 5%, kommen wir zur selben **Testentscheidung**:

für Faktor A: $p = 0{,}012 < \alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow$ Nullhypothese (3.19) ablehnen

für Faktor B: $p = 0{,}002 < \alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow$ Nullhypothese (3.20) ablehnen

Auch auf der Grundlage des p-Wertes wird hier wiederum die Testentscheidung für den Faktor A in einer Grafik aufgezeigt:



[<u>Anmerkung zur SPSS-Tabelle „Tests der Zwischensubjekteffekte“:</u> Die anderen Größen in der Tabelle sind ergänzende Angaben, die für unsere Testzwecke nicht weiter von Bedeutung sind:
Quelle „Gesamt“: Summe der quadrierten Beobachtungswerte,
Quelle „Konstanter Term“: „Gesamt“ - Q_T,
Quelle „Korrigiertes Modell“: Test der Nullhypothese, dass beide Faktoren A und B keinen Einfluss auf Y haben. Die Prüfgröße ist hierbei durch

$$F = \frac{(Q_A + Q_B)/(p+q-2)}{Q_R/N-(p+q-1)}$$ gegeben.

Hierauf bezieht sich das angegebene R^2 (=Bestimmtheitsmaß), das vergleichbar mit dem Bestimmtheitsmaß der Regressionsanalyse ist, jedoch in der Varianz-analyse von untergeordneter Bedeutung ist.]