Übungsaufgabe 1 (Faktorenanalyse)

In einer faktorenanalytischen Anwendung ergibt sich unter Anwendung der Hauptkomponentenmethode nach sukzessiver Extraktion von 3 Faktoren folgende Matrix der Faktorladungen (= Faktormatrix):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ -0{,}5 & -0{,}3 & 0{,}7 \\ -0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie die Faktorladungen a_{21}, a_{62} und a_{53} an und interpretieren Sie sie!

<u>Lösung:</u>

1. $a_{21} = 0{,}8$

Die Variable X_2 lädt auf dem Faktor F_1 mit einem Wert von 0,8, der die Stärke der positiven Korrelation zwischen X_2 und F_1 wiedergibt. Die quadrierte Faktorladung $a_{21}^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$ besagt, dass die Varianz der Variablen X_2 zu 64% durch den Faktor F_1 erklärt wird.

2. $a_{62} = 0{,}7$

Die Variable X_6 lädt auf dem Faktor F_2 mit einem Wert von 0,7, der die Stärke der positiven Korrelation zwischen X_6 und F_2 wiedergibt. Die quadrierte Faktorladung $a_{62}^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$ besagt, dass die Varianz der Variablen X_6 zu 49% durch den Faktor F_2 erklärt wird.

3. $a_{53} = -0{,}2$

Die Variable X_5 lädt auf dem Faktor F_3 mit einem Wert von -0,2, der die Stärke der negativen Korrelation zwischen X_5 und F_3 wiedergibt. Die quadrierte Faktorladung $a_{53}^2 = (-0{,}2)^2 = 0{,}04$ besagt, dass die Varianz der Variablen X_5 zu 4% durch den Faktor F_3 erklärt wird, so dass der Faktor F_3 die Variable X_5 nicht substanziell beeinflusst.

b) Welche Werte nehmen die Eigenwerte an? Worauf beziehen sie sich und was sagen sie aus?

<u>Lösung:</u>

Die Eigenwerte beziehen sich bei der Hauptkomponentenmethode auf die Korrelationsmatrix.

Größter Eigenwert:

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{8} a_{j1}^2 = 0{,}8^2 + 0{,}8^2 + 0{,}7^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}1^2 + 0{,}3^2 + (-0{,}5)^2 + (-0{,}3)^2$$

$$= 0{,}64 + 0{,}64 + 0{,}49 + 0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}25 + 0{,}09 = 2{,}25$$

Der Wert von $\lambda_1 = 2{,}25$ gibt die Varianz des Faktors F_1 wieder.

$(\lambda_1/m)\cdot 100\% = (2{,}25/8)\cdot 100\% = 0{,}281\cdot 100\% = 28{,}1\%$

Der Faktor F_1 erklärt 28,1% der gesamten Varianz der Variablen.

Zweitgrößter Eigenwert:

$$\lambda_2 = \sum_{j=1}^{8} a_{j2}^2 = 0{,}1^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}6^2 + 0{,}8^2 + 0{,}6^2 + 0{,}7^2 + (-0{,}3)^2 + 0{,}4^2$$

$$= 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}36 + 0{,}64 + 0{,}36 + 0{,}49 + 0{,}09 + 0{,}16 = 2{,}15$$

Der Wert von $\lambda_2 = 2{,}15$ gibt die Varianz des Faktors F_2 wieder.

$(\lambda_2/m)\cdot 100\% = (2{,}15/8)\cdot 100\% = 0{,}269\cdot 100\% = 26{,}9\%$

Der Faktor F_2 erklärt 26,9% der gesamten Varianz der Variablen.

Drittgrößter Eigenwert:

$$\lambda_3 = \sum_{j=1}^{8} a_{j3}^2 = (-0{,}5)^2 + (-0{,}1)^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + (-0{,}2)^2 + 0{,}6^2 + 0{,}7^2 + 0{,}8^2$$

$$= 0{,}25 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}36 + 0{,}49 + 0{,}64 = 1{,}92$$

Der Wert von $\lambda_3 = 1{,}92$ gibt die Varianz des Faktors F_3 wieder.

$(\lambda_3/m)\cdot 100\% = (1{,}92/8)\cdot 100\% = 0{,}240\cdot 100\% = 24{,}0\%$

Der Faktor F_3 erklärt 24,0% der gesamten Varianz der Variablen.

c) Berechnen Sie die Kommunalitäten der Variablen X_1, X_4 und X_8 und interpretieren Sie sie!

<u>Lösung:</u>

Kommunalität der Variablen X_1:

$$h_1^2 = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2 = 0{,}8^2 + 0{,}1^2 + (-0{,}5)^2 = 0{,}64 + 0{,}01 + 0{,}25 = 0{,}90$$

Die drei extrahierten Faktoren erklären 90% der Varianz von X_1.

Die merkmalsspezifische Varianz (Einzelrestvarianz) der Variablen X_1 beträgt $u_1^2 = 1 - h_1^2 = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$.

Kommunalität der Variablen X_4:

$$h_4 = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}^2 = (-0{,}2)^2 + 0{,}8^2 + 0{,}3^2 = 0{,}04 + 0{,}64 + 0{,}09 = 0{,}77$$

Die drei extrahierten Faktoren erklären 77% der Varianz von X_4.

Die merkmalsspezifische Varianz (Einzelrestvarianz) der Variablen X_4 beträgt $u_4^2 = 1 - h_4^2 = 1 - 0{,}77 = 0{,}23$.

Kommunalität der Variablen X_8:

$$h_8 = \sum_{k=1}^{3} a_{8k}^2 = (-0{,}3)^2 + 0{,}4^2 + 0{,}8^2 = 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}64 = 0{,}89$$

Die drei extrahierten Faktoren erklären 89% der Varianz von X_8.

Die merkmalsspezifische Varianz (Einzelrestvarianz) der Variablen X_8 beträgt $u_8^2 = 1 - h_8^2 = 1 - 0{,}89 = 0{,}11$.