2019/09

Paneldatenmodelle mit Zeit-Raum-Daten

Reinhold Kosfeld

Gliederung

1. Paneldatenstruktur und Modelltypologie
2. Pooling-Modell
3. Fixed-Effects-Modelle
4. Random-Effects-Modells
5. Dynamische Panelmodelle
6. Räumliche Panelmodelle

1. Querschnitts- und Zeitdimension

Panelmodelle enthalten Informationen, die sowohl die **Querschnitts- als auch die Zeitdimension** der Variablen berücksichtigen. Im **Querschnitt** können verschiedene **Gruppen, Objekte oder Individuen**, wie z.B. Länder, Regionen, Firmen, Haushalte und Produkte betrachtet werden. **Für jedes dieser Objekte** liegen **Zeitreihenbeobachtungen** vor. Im **Mikrobereich** liegen häufig eine **große Anzahl** von Haushalten oder Unternehmen vor, die **zu relativ wenigen Zeiteinheiten** beobachtet werden. Dies ist oft **auch** der Fall, wenn Daten für **räumliche Einheiten in tiefer regionaler Gliederung** untersucht werden. Dagegen **übersteigt** bei Paneleinheiten im **Makrobereich** bei Länderstudien und z.T. auch auf der **Mesoebene** z.B. bei größeren Regionen oder Wirtschaftszweigen die **Zeitdimension oft** die **Querschnittsdimension**. Hier liegt das Erkenntnisinteresse z.B. in der Entwicklung des Konsums in den Ländern der Währungsunion oder der Produktionstechnologie in den Sektoren einer Volkswirtschaft

Die Schätzung eines **Regressionsmodells** kann zunächst in **nur einer der beiden Dimensionen** erfolgen. So lässt sich ein vermuteter Zusammenhang allein im **Querschnitt** untersuchen. Ein Beispiel ist die mikroökonomische Analyse der Erwerbsbeteiligung, bei der das Erwerbsverhalten einzelner Personen durch individuelle Charakteristika, wie etwa Alter, Ausbildung, Haushaltssituation und Einkommen erklärt wird. Daneben können empirische Analysen allein auf der Grundlage der **Zeitreihendimension** vorgenommen werden. Solche Untersuchungen erfolgen traditionell vor allem im makroökonomischen Bereich und können etwa die Erklärung der Konsumentwicklung in einem bestimmten Land betreffen.

In **Panelmodellen** werden **beide Dimensionen** der Daten **gemeinsam einbezogen**. Daher erfolgt die Analyse auf der Basis einer **breiteren Informationsmenge**, was prinzipiell **effizientere Schätzungen** der Modellparameter ermöglicht. Allerdings ist der Übergang zu einem Panelmodell auch an Restriktionen gebunden. Bei einer Erklärung des Konsumverhaltens in den Ländern der Währungsunion durch das verfügbare Einkommen würde z.B. eine identische marginale Konsumneigung unterstellt. Damit entsteht die Frage, **in welcher Form** sich die **Heterogenität der Individuen berücksichtigen** lässt. Darüber hinaus wird in Panelmodellen das Problem der **kontemporären Korrelation der Untersuchungseinheiten** relevant. Eine solche Korrelation kann durch singuläre Ereignisse entstehen, die alle Objekte im Panel gemeinsam betreffen. Bei der Analyse der Kursentwicklung von Aktien können etwa die Zinsentscheidungen der Zentralbank den Markt als Ganzes beeinflussen und auf diese Weise die Korrelation auslösen. Jedoch können auch Parallelverläufe von Konjunkturen oder gemeinsame Trends Abhängigkeiten zwischen den Querschnittseinheiten entstehen lassen.

Tabelle: Struktur von räumlichen Paneldaten

Region	Jahr	X_1	X_2	…	X_k
1	1995	$X_{1,1995}$	$X_{2,1995}$	…	$X_{k,1995}$
1	1996	$X_{1,1996}$	$X_{2,1996}$	…	$X_{k,1996}$
…	…	…	…	…	…
1	2012	$X_{1,2012}$	$X_{2,2012}$	…	$X_{k,2012}$
2	1995	$X_{1,1995}$	$X_{2,1995}$	…	$X_{k,1995}$
2	1996	$X_{1,1996}$	$X_{2,1996}$	…	$X_{k,1996}$
…	…	…	…	…	…
2	2012	$X_{1,2012}$	$X_{2,2012}$	…	$X_{k,2012}$
…	…	…	…	…	…
n	1995	$X_{1,1995}$	$X_{2,1995}$	…	$X_{k,1995}$
n	1996	$X_{1,1996}$	$X_{2,1996}$	…	$X_{k,1996}$
…	…	…	…	…	…
n	2012	$X_{1,2012}$	$X_{2,2012}$	…	$X_{k,2012}$

Beispiel: Panelanalyse der sozialversicherungspflichtig Beschäftigten (SVB) in Westdeutschland

Regionale Einheiten: Bundesländer, Zeit: 2. Quartal 1999 – 2. Quartal 2014

Tabelle: Struktur der Paneldaten

BL	Zeit	SVB_BL	SVB_W	…	…
BW	1999.2	3703123	21577493	…	…
BW	1999.3	3760540	21953396	…	…
…	…	…	…	…	…
BW	2014.2	4266000	24487974	…	…
BY	1999.2	4248417	21577493	…	…
BY	1999.3	4329349	21953396	…	…
…	…	…	…	…	…
BY	2014.2	5065073	24487974	…	…
…	…	…	…	…	…
SL	1999.2	349634	21577493	…	…
SL	1999.3	356769	21953396	…	…
…	…	…	…	…	…
SL	2014.2	372487	24487974	…	…

Typologie von Panelmodellen

- Pooling-Modell
- Modelle mit festen Effekten (Fixed Effects (FE) Model)
- Modelle mit zufälligen Effekten (Random Effects (RE) Model)
- Modelle mit variablen Koeffizienten (Variable Coefficient Model)

  - Statisches Modell
    - Nicht-räumliches Modell (Aspatial Model)
    - Räumliches Modell (Spatial Model)
  - Dynamisches Modelle
    - Nicht-räumliches Modell (Aspatial Model)
    - Räumliches Modell (Spatial Model)

2. Pooling-Modell

Pooling-Modell für n Querschnittseinheiten und T Perioden:

(2.1a) $y_{it} = \alpha + \beta_1 \cdot x_{1it} + \beta_2 \cdot x_{2it} + \ldots + \beta_k \cdot x_{kit} + u_{it}$

oder

(2.1b) $y_{it} = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it}$

y_{it}: Wert der abhängigen Variablen der i-ten Einheit in der Periode t

$\mathbf{x}_{it}' = (x_{1it}\ x_{2it}\ \ldots\ x_{kit})$: kx1-Vektor der Werte der k erklärenden Variablen der i-ten Einheit in der Periode t

$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_k)$: kx1-Vektor der Regressionskoeffizienten, α: absolutes Glied

Anstelle von n Regressionen mit jeweils T Beobachtungen wird mit (2.1) eine einzige Regression mit nT Beobachtungen durchgeführt. Die Schätzer im gepoolten Modell sind relativ effizienter, weil die höhere Beobachtungszahl zu kleineren Standardfehlern der Regressionskoeffizienten führt. Der Effizienzvorteil geht jedoch verloren, wenn sich die Regressionsparameter für die einzelnen Untersuchungseinheiten signifikant unterscheiden.

Pooling OLS-Schätzer für β**:**

(2.2) $$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{POLS} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i' \, \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i' \, \mathbf{y}_i \right)$$

mit

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{i1}' \\ \mathbf{x}_{i2}' \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{iT}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1i1} & x_{2i1} & \cdots & x_{ki1} \\ x_{1i2} & x_{2i2} & \cdots & x_{ki2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1iT} & x_{2iT} & \cdots & x_{kiT} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{pmatrix}$$

Der Pooling-Schätzer für β ist bei heterogenen Untersuchungseinheiten verzerrt.

Ob man bei entsprechender Datenverfügbarkeit tatsächlich das gepoolte Modell verwenden kann, hängt somit von der Geltung bestimmter Restriktionen ab. Konkret ist die Schätzung auf der Basis des gepoolten Datensatzes möglich, wenn für die Regressionskoeffizienten die (N-1)(k+1) Bedingungen

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= \ldots = \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\beta} \\ \alpha_1 &= \ldots = \alpha_n = \alpha \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Die Nullhypothese (2.2) lässt sich mit einem F-Test überprüfen, der auf einem Vergleich der Residuenquadratsummen im restringierten und unrestringierten Modell

$$Q_r = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} \qquad \text{und} \qquad Q_u = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_i'\hat{\mathbf{u}}_i$$

basiert.

Die Teststatistik

$$F = \frac{(Q_r - Q_u)/[(n-1)(k+1])}{Q_u/[nT - n(k+1)]}$$

ist unter der Annahme unabhängig identisch normalverteilter Störprozesse F-verteilt mit (n-1)(k+1) und (nT-n(k+1)) Freiheitsgraden.

3. Fixed-Effects-Modelle

Ein Panel-Regressionsmodell mit regionsspezifischen fixen Effekten (regional fixed effects (FE) model)

(3.1a) $$y_{it} = \alpha_i + \beta_1 \cdot x_{1it} + \beta_2 \cdot x_{2it} + \ldots + \beta_k \cdot x_{kit} + u_{it}$$

oder

(3.1b) $$y_{it} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it}$$

verzichtet auf einen Teil der Parameterrestriktionen (2.2). Die Restriktionen hinsichtlich des konstanten Terms werden aufgegeben. Die Heterogenität der Untersuchungseinheiten wird durch individuenspezifische Konstanten (=individuellen Effekte) α_i berücksichtigt.

Durch Mittelung des FE-Modells über die Zeit t ergibt sich die Beziehung

(3.2) $$\bar{y}_{i\bullet} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}' \cdot \bar{\mathbf{x}}_{i\bullet} + \bar{u}_{i\bullet}$$

mit den regionsspezifischen Mittelwerten

$$\bar{y}_{i\bullet} = \frac{1}{T} \sum_t^T y_{it}\,, \qquad \bar{\mathbf{x}}_{i\bullet} = \frac{1}{T} \sum_t^T \mathbf{x}_{it} \quad \text{und} \quad \bar{u}_{i\bullet} = \frac{1}{T} \sum_t^T u_{it}\ .$$

Subtrahiert man (3.2) von (3.1b) erhält man das Panelmodell mit regionsspezifischen fixen Effekten in der within-Form

(3.3) $$y_{it} - \bar{y}_{i\bullet} = \boldsymbol{\beta}'\cdot(\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_{i\bullet}) + (u_{it} - \bar{u}_{i\bullet}) \quad ,$$

in der die nicht-beobachtbaren regionsspezifischen Effekte eliminiert sind.

Wird der Vektor der Regressionskoeffizienten, $\boldsymbol{\beta}$, in dem transformierten Modell (3.3) mit der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate geschätzt, erhält man den **Within-Schätzer**

(3.4) $$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) \right)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ ist auch unter der Bezeichnung **Fixed-Effects-Schätzer (FE-Schätzer)** bekannt. Die einzelnen Regressionskoeffizienten sind mit denen einer **Least-Squares-Dummy-Variablen (LSDV)-Schätzung** des Standardregressionsmodells mit regionalen Dummy-Variablen identisch.

Der **Within-Schätzer** (3.4) ist konsistent unabhängig davon, ob die regionsspezifischen fixen Effekte α_i mit den erklärenden Variablen x_1. x_2, …, x_k korreliert sind oder nicht. Da bei fehlender Korrelation eine effizientere Modellschätzung möglich ist ($\rightarrow$ Random-Effects-Modell), kommt dem Within-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ vor allem unter der Bedingung

(3.5) $$\mathrm{Cov}(\alpha_i, x_{jit}) \neq 0$$

eine besondere Bedeutung zu.

Die regionsspezifischen fixen Effekte α_i tragen einer unbeobachteten Heterogenität Rechnung. Hierbei kann es sich um zeitunabhängige, nichtbeobachtbare Charakteristiken der Regionen oder nicht berücksichtigte Variablen handeln.

Da in der Regel die Regressionskoeffizienten β_j, j=1,2,..,k, im Blickpunkt des Interesses stehen, werden die Koeffizienten α_i, i=1,2,…,n, auch nuisance-Parameter genannt. Ihre Schätzgrößen $\hat{\alpha}_i$ sind aus einer Beziehung zwischen den Mittelwerten der abhängigen und unabhängigen Variablen berechenbar:

(3.6) $$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i\bullet} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\bar{\mathbf{x}}_{i\bullet}, \quad i = 1, .., n$$

Wird der Vektor der Regressionskoeffizienten, $\boldsymbol{\beta}$, auf der Grundlage des Modells (3.2) in den Mittelwerten der Variablen geschätzt, spricht man von einem **Between-Schätzer**, der nur die Niveauunterschiede zwischen den Regionen berücksichtigt (Querschnittsschätzung). Mit der Reduzierung der Beobachtungszahl von $n \cdot T$ auf n geht ein Effizienzverlust einher. Da der Between-Schätzer außerdem inkonsistent ist, wenn eine Korrelation zwischen den fixen Effekten α_i und den x-Variablen bzw. ihren Mittelwerten besteht, kommt er gerade in den typischen Anwendungssituationen des Fixed-Effects-Modells nicht in Betracht.

- **Prognosefehlermaße bei einer Kombination von Ein- und Mehr-Schritt-Prognosen**

Mittlerer absoluter Fehler (MAE)	Mittlerer absoluter prozentualer Fehler (MAPE)
(3.8) $\mathrm{MAE} = \sum_{j=1}^{h} \left\lvert x_t - \hat{x}_{t,j} \right\rvert / h$	(3.9) $\mathrm{MAPE} = \sum_{j=1}^{h} \left\lvert \frac{x_t - \hat{x}_{t,j}}{x_t} \right\rvert \cdot 100\% \; / h$
Mean Square Error (MSE)	Root Mean Square Error (RMSE)
(3.10) $\mathrm{MSE} = \sum_{j=1}^{h} \left(x_t - \hat{x}_{t,j}\right)^2 / h$	(3.11) $\mathrm{RMSE} = \sqrt{\sum_{j=1}^{h} \left(x_t - \hat{x}_{t,j}\right)^2 / h}$

4. Random-Effects-Modelle

Insbesondere bei Konsumenten-, Haushalts- und Unternehmenspanels ist die Anzahl der statistischen Einheiten, n, sehr groß, wodurch die Zahl der zu schätzenden Parameter eines Fixed-Effects-Modells beträchtlich ansteigen würde. Der hiermit verbundene Verlust an Freiheisgraden geht zulasten der Präzision der geschätzten geschätzten Regressionskoeffizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$.

Das **Random-Effects-Modell (RE-Modell)** ist durch

(4.1) $y_{it} = \alpha + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + \varepsilon_{it}$

mit (4.2) $\varepsilon_{it} = \mu_i + u_{it}$

gegeben, worin u_{it} eine idiosynkratische (unsystematische) und μ_i eine individuenspezifische Zufallsvariable ist. α ist das absolute Glied.

Die Fehlerkomponenten u_{it} und μ_i werden als unabhängig und identisch verteilt mit dem Erwartungswert 0 und den Varianzen σ_μ^2 bzw. σ_u^2 angenommen:

$$\mu_i \sim \text{iid}(0, \sigma_\mu^2) \quad \text{und} \quad u_{it} \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$$

Auch sind die Größen u_{it} und μ_i nicht miteinander korreliert:

$$\text{Cov}(u_{it}, \mu_i) = E(u_{it} \cdot \mu_i) = 0$$

Dennoch sind die Fehlerterme ε_{it} und ε_{is}, $t \neq s$, der gleichen Individuen zu unterschiedlichen Zeiten korreliert:

(4.3) $$\mathrm{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = E(\varepsilon_{it} \cdot \varepsilon_{is}) = E[(\mu_i + u_{it})(\mu_i + u_{is})]$$

$$= E(\mu_i^2) + \underbrace{E(\mu_i \cdot u_{it})}_{=0} + \underbrace{E(u_{it} \cdot \mu_i)}_{=0} + \underbrace{E(u_{it} \cdot u_{is})}_{=0} = \sigma_\mu^2 .$$

Im Unterschied zu gebräuchlichen Zeitreihenmodellen ist die Kovarianz zwischen zeitabhängigen Größen hier nicht von der zeitlichen Differenz $|s-t|$ abhängig, sondern konstant.

Die Varianz der durch (4.2) gegebenen Störvariablen ε_{it} ist gleich der Summe der Varianzen von μ_i und u_{it}:

(4.4) $$\mathrm{Var}(\varepsilon_{it}) = E(\varepsilon_{it}^2) = E[(\mu_i + u_{it})^2)]$$

$$= E(\mu_i^2) + 2 \cdot E(\mu_i \cdot u_{it}) + E(u_{it}^2) = \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2.$$

Damit ist die Korrelation zwischen den gemischten Fehlertermen ε_{it} und ε_{is}, $t \neq s$, des Modells durch

(4.5) $$\mathrm{Corr}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2} \quad \text{für } t \neq s$$

gegeben. Die hierbei auftretende Unabhängigkeit von der zeitlichen Differenz $|s-t|$ wird als „equicorrelation“ bezeichnet.

Aufgrund der Autokorrelation der Störgröße ε_{it} (Gl. 4.3) des RE-Modells würde seine Schätzung mit der Pooled-OLS-Methode mit einem Verlust der Effizienz einhergehen. Mit der **verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate (generalized least-squares method (GLS-Methode))**, die von der durch die beiden Parameter σ_μ^2 und σ_u^2 gegebenen Random-Effects-Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathrm{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js})$ des Fehlerterms (4.2) Gebrauch macht, ließen sich die Regressionskoeffizienten des RE-Modells dagegen unter der Bedingung

(4.6) $\mathrm{Cov}(\alpha_i, x_{jit}) = 0$ für alle j, i, t

effizient schätzen. Da jedoch die Varianzen σ_μ^2 und σ_u^2 im Allgemeinen unbekannt sind, liegt einer Schätzung der Regressionskoeffizienten nicht „wahre“, sondern die geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix zugrunde. Bei ihrer Verwendung spricht man von der **Feasible GLS-Methode (FGLS-Methode)**, die bei Gültigkeit der Bedingung (4.6) zu konsistenten asymptotisch effizienten Schätzung der Regressionskoeffizienten führt.

Random-Effects-Schätzer als **spezieller FGLS-Schätzer**:

(4.7) $$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{y}_i\right)$$

mit dem Schätzer $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ der Varianz-Kovarianz-Matrix

(4.8) $$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i') = \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann der **Random-Effects-Schätzer** aus dem **transformierten Modell** (verallgemeinerte Mittelwert-abweichungen)

(4.9) $$y_{it} - \theta \cdot \bar{y}_{i\bullet} = (1-\theta) \cdot \alpha + \boldsymbol{\beta}' \cdot (\mathbf{x}_{it} - \theta \cdot \bar{\mathbf{x}}_{i\bullet}) + \left[(1-\theta) \cdot \mu_i + (u_{it} - \theta \cdot \bar{u}_{i\bullet})\right]$$

unter Verwendung eines Schätzers für den Parameter θ,

(4.10) $$\theta = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T \cdot \sigma_\mu^2}$$

mit der **Pooling OLS-Methode** ermittelt werden.

• Hausman-Test

Die Nullhypothese, dass die erklärenden Variablen x_j mit den individuellen Effekten α_i (= $\alpha+\mu_i$) unkorreliert sind, kann mit dem Hausman-Test überprüft werden. Die Testidee ist, zwei Schätzer zu vergleichen, von denen der eine – hier der Fixed-Effects-Schätzer - unter Null- und Alternativhypothese (H_0 und H_1) konsistent ist und der andere – hier der Random-Effects-Schätzer - nur unter Nullhypothese (H_0) konsistent ist.

Die Nullhypothese

$$H_0: \ Cov(\alpha_i, x_{jit}) = 0$$

wird zugunsten der Alternativhypothese

$$H_1: \ Cov(\alpha_i, x_{jit}) \neq 0$$

verworfen, wenn sich der RE-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE}$ signifikant vom FE-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ unterscheidet.

Ob sich die beide Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE}$ und $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}$ signifikant voneinander unterscheiden oder nicht, wird anhand der Prüfgröße des Hausman-Tests,

$$(4.7) \qquad HT = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE})' \left[\hat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}) - \hat{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE}) \right]^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RE})$$

χ^2-verteilt mit k Freiheitsgraden.

Bei Ablehnung der Nullhypothese ist das Fixed-Effects-Modell vorzuziehen, da bei einer Verletzung von H_0 der FE-Schätzer konsistent bleibt, während der RE-Schätzer inkonsistent wird. Unter H_0 sind dagegen beide Schätzer konsistent, jedoch ist der RE-Schätzer aufgrund seiner größeren Effizienz (= größere Präzision) vorteilhafter.

Bei regionalen Panels ist jedoch zu beachten, dass eine Erklärung nicht beobachtbarer regionaler Unterschiede durch Zufallseinflüsse häufig schwierig sein wird.

5. Dynamische Panelmodelle

Dynamische Panelmodelle sind dadurch gekennzeichnet, dass

- zeitlich verzögerte endogene Variablen wie z.B. $y_{i,t-1}$

und/oder

- zeitlich verzögerte Störvariablen wie z.B. $u_{it} = \phi \cdot u_{i,t-1} + \nu_{it}$

zur Erklärung der endogenen Variablen y_{it} beitragen.

Hier wird das **dynamische Fixed-Effects-Modell** unter Einbeziehung der um eine Periode zeitlich verzögerten Variablen $y_{i,t-1}$ betrachtet:

(5.1) $$y_{it} = \alpha_i + \gamma \cdot y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it} \quad .$$

Der Regressionskoeffizient γ gibt nicht den Effekt einer kausalen Einflussgröße auf die abhängige Variable y_{it} wieder, sondern er misst die Anpassungsgeschwindigkeit.

,

- **Inkonsistenz und Bias des Within-Schätzers**

Die Schätzung des dynamischen Panelmodells erfolgt in anderer Form als die des statischen Modells. Würde man hier nämlich wie im statischen FE-Modell die individuellen Effekte zur Schätzung der Parameter γ und β durch die Within-Transformation eliminieren, ergäbe sich eine Korrelation zwischen der transformierten Störvariablen,

$$u_{it} - \bar{u}_{i,-1} = u_{it} - \frac{1}{T-1}(u_{i2} + \ldots + u_{i,t-1} + u_{it} + \ldots + \ldots u_{iT}),$$

mit dem zeitlich verzögertem endogenen Regressor:

$$y_{it} - \bar{y}_{i,-1} = y_{it} - \frac{1}{T-1}(y_{i1} + \ldots + \ldots + y_{i,t-1} + y_{it} + \ldots + \ldots y_{i,T-1}) .$$

Als Konsequenz ist übliche FE-Schätzer (Within-Schätzer) im dynamischen Modell inkonsistent bei $N \to \infty$ und T=const. Simulationsstudien haben gezeigt, dass der Bias (Verzerrung) des Within-Schätzers selbst für längere Panels nicht vernachlässigbar ist. Für T=20 kann er eine Größenordnung von knapp 30% erreichen und für T=30 knapp 20%.

• FD-Transformation und IV-Schätzer

Da die Within-Transformation in dem dynamischen Modell eine Korrelation zwischen der transformierten verzögerten endogenen Variablen und dem transformierten Störterm hervorruft, beseitigt man hier die individuellen Effekte zur Schätzung der Regressionskoefizienten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ und γ durch Verwendung der ersten Differenzen der Modellvariablen. Die First-Difference-Form (FD-Transformation) des dynamischen FE-Modells (5.1) lautet

(5.2) $$\Delta y_{it} = \gamma \cdot \Delta y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{it} + \Delta u_{it}, \quad t=3,4,\ldots,T.$$

Zwar besteht auch in der FD-Transformation noch eine Korrelation zwischen dem Regressor $\Delta y_{i,t-1} = y_{i,t-1} - y_{i,t-2}$ und dem Störterm $\Delta u_{it} = u_{it} - u_{i,t-1}$, da $y_{i,t-1}$ von der Störvariablen $u_{i,t-1}$ abhängt. Jedoch lässt sich diese Korrelation hier besser durch eine Instrumentvariablen-Schätzung beseitigen. Instrumentvariablen müssen mit der zu instrumentierenden Variablen $\Delta y_{i,t-1}$ korreliert sein, dürfen aber keine Korrelation mit dem Störterm Δu_{it} aufweisen.

♦ Anderson-Hsiao-Schätzer

Anderson-Hsiao (1982) schlagen zwei mögliche Instrumente für $\Delta y_{i,t-1}$ vor:

- $\Delta y_{i,t-2} = y_{i,t-2} - y_{i,t-3}$ in Verbindung mit den differenzierten exogenen Regressoren $\Delta x_{ji,t-1}$
- Die Niveaugröße $y_{i,t-2}$ in Verbindung mit den differenzierten exogenen Regressoren $\Delta x_{ji,t-1}$

Beide Instrumente $\Delta y_{i,t-2}$ und $y_{i,t-2}$ sind mit $\Delta y_{i,t-1}$ korreliert und mit Δu_{it} unkorreliert. Sie liefern sowohl für $N \to \infty$ und T=const. als auch für $T \to \infty$ und N=const. konsistente Schätzer. Allerdings geht bei Verwendung von $\Delta y_{i,t-2}$ eine zusätzliche Periode verloren (Stützbereich bei $y_{i,t-2}$: t=3,4,…,T, Stützbereich bei $\Delta y_{i,t-2}$: t=4,5,…,T).

♦ Arellano-Bond-Schätzer

Der Anderson-Hsiao-Schätzer ist zwar konsistent, nutzt jedoch nicht alle verfügbaren Momenten-Bedingungen aus. Zur Verbesserung der Effizienz schlagen Arellano und Bond (1991) den Einsatz einer **verallgemeinerten Momenten-Methode (Generalized Method of Moments (GMM))** vor. Der Arellano-Bond-Schätzer in jeder Periode alle gültigen Instrumente aus.

Periode t=3: Instrument y_{i1} (neben x-Werten)

FD-Transformation: $(y_{i3} - y_{i2}) = \gamma \cdot (y_{i2} - y_{i1}) + \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{i3} + (u_{i3} - u_{i2})$

Da y_{i1} mit der zur Zeit t=3 verzögerten Differenz (y_{i2}-y_{i1}) korreliert ist, jedoch nicht mit dem aktuellen Fehlerterm (u_{i3}-u_{i2}), ist diese Größe - neben den exogen gegebenen x-Werten - ein gültiges Instrument.

Periode t=4: Instrumente y_{i1} und y_{i2} (neben x-Werten)

FD-Transformation: $(y_{i4} - y_{i3}) = \gamma \cdot (y_{i3} - y_{i2}) + \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{i4} + (u_{i4} - u_{i3})$

Gültige Instrumente – neben den exogen gegebenen Werten – sind hier y_{i1} und y_{t2} , die mit der zur Zeit t=4 verzögerten Differenz (y_{i3}-y_{i2}) korreliert sind, aber keine Korrelation mit dem aktuellen Fehlerterm (u_{i4}-u_{i3}) aufweisen.

Periode t=5: Instrumente y_{i1}, y_{i2} und y_{i3} (neben x-Werten)

FD-Transformation: $(y_{i5} - y_{i4}) = \gamma \cdot (y_{i4} - y_{i3}) + \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\Delta x}_{i5} + (u_{i5} - u_{i4})$

Gültige Instrumente – neben den exogen gegebenen Werten – sind hier y_{i1} , y_{i2} und y_{t3} , die mit der zur Zeit t=5 verzögerten Differenz (y_{i4}-y_{i3}) korreliert sind, aber keine Korrelation mit dem aktuellen Fehlerterm (u_{i5}-u_{i4}) aufweisen.

Instrumente (neben x-Werten) beim Arellano-Bond-Schätzer

t=3: y_{i1}
t=4: y_{i1}, y_{i2}
t=5: y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}
…
t=T-1: y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, …, $y_{i,T-4}$, $y_{i,T-3}$
t=T: y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}, …, $y_{i,T-3}$, $y_{i,T-2}$

Matrix aller Instrumente (ohne x-Variablen) des Individuum (Region) i:

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{i1} & y_{i2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{i1} & \dots & y_{i,T-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [y_{i1}, y_{i2}] & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i,T-2}] \end{bmatrix}$$

Momentenbedingung (GMM):

(5.3) $$E\left(\mathbf{W}_i' \cdot \mathbf{\Delta u}_i\right) = \mathbf{0}$$

GMM als GLS-Instrumenten-Schätzung

Da die Fehlerterme Δu_{it} aufgrund der Differenzenbildung autokorreliert sind, wird die GM-Methode in Form einer GLS-Instrumenten-Schätzung durchgeführt, die diese Korrelation berücksichtigt.

Einstufiger Arellano-Bond-Schätzer

basiert direkt auf der Varianz-Kovarianz-Matrix $E(\mathbf{\Delta u} \cdot \mathbf{\Delta u}')$ der Fehlerterme Δu_{it}:

(5.4) $$E\left(\mathbf{\Delta u} \cdot \mathbf{\Delta u}'\right) = \sigma_u^2 \cdot (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{G})$$ ($\otimes$: Kronecker-Produkt)

mit

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zweistufiger Arellano-Bond-Schätzer

basiert auf der Varianz-Kovarianz-Matrix der aus dem einstufigen GMM-Schätzer resultierenden differenzierten Residuen

Unter der üblichen Annahme des Panelmodells (5.1) einer unabhängigen und identische Verteilung der Störgrößen u_{it} mit dem Erwartunswert $E(u_{it}) = 0$ und einer konstanten $Var(u_{it}) = \sigma_u^2$, sind der ein-und zweistufige GMM-Schätzer asymptotisch äquivalent.

6. Räumliche Panelmodelle

Bei dem Fixed-Effects-Modell wird unbeobachtete **Heterogenität der Regionen** durch Einbeziehung regionaler Effekte Rechnung getragen. Andere Formen der **räumlichen Heterogenität** wie z.B. räumlich variierende Reaktionsmuster bleiben dabei jedoch unberücksichtigt. Insbesondere werden keinerlei **Interaktionen zwischen den Regionen** in das Modell einbezogen. Vor allem benachbarte oder nahe beieinander liegende Regionen stehen z.B. durch Pendlerströme, Einkaufsfahrten von Konsumenten, einen Wissensaustausch oder die Nutzung von Freizeit-, Erholungs- und Kultureinrichtung in wechselseitiger Beziehung zueinander. Durch Einbeziehung der hierdurch entstehenden Effekte in ein Panelmodell wird die implizite Annahme isolierter regionaler Ökonomien bei der Analyse von räumlichen Panels aufgehoben.

Da immer größere Teile von interregionalen Strömen mit zunehmender Raumgröße zu intraregionalen Strömen werden, treten starke Interaktionseffekte vor allem bei kleinen regionalen Einheiten wie z.B. Kreisen (NUTS 3), (Regierungs-)Bezirken (NUTS 2) oder lokalen administrativen Einheiten (kommunale Verwaltungsverbände (LAU 1), Gemeinden (LAU 2)) auf. Aber auch bei größeren räumlichen Einheiten wie z.B. bei funktional abgegrenzten regionalen Arbeitsmärkten oder programmatisch abgegrenzten Raumeinheiten sind räumliche Effekte oft noch messbar.

Die **räumliche Panelmodelle** unterscheiden sich in der Art und Weise der Modellierung der Interaktionen zwischen de Regionen. Als Einstieg bietet sich eine Panelanalyse mit den aus der Querschnittsanalyse **bekannten Spatial-Lag- (SAR) und Spatial-Error- (SEM) Modelle** an. Die beide hierin separat modellierten Effekte werden in dem **SARAR-Modell** zusammengeführt. Für die Regionalprognose erweist sich in der Regel eine **Dynamisierung** dieser Modelle als vorteilhaft. Wie bei den nicht-räumlichen Panelmodellen wird die unbeobachtet Heterogenität der Regionen gewöhnlich durch die Einbeziehung fixer Effekte berücksichtigt.

• Räumliche Autokorrelationstests

Bei **Zeitreihendaten** werden die Residuen von Regressionsanalysen standardmäßig auf Autokorrelation getestet. Eine **Autokorrelation der Residuen** weist auf **systematische Abhängigkeiten zwischen zeitlich auseinanderliegender Werte der Störgröße** fest, die auf vernachlässigte substanzielle Einflussgrößen hindeuten. In endogenen Lagmodellen führt ein ignorierter autoregressiver Störprozess zu einer Inkonsistenz der geschätzten Regressionskoeffizienten. In statischen Regressionsmodellen geht hiermit ein Verlust an Effizienz einher.

In **regionale Daten** können dagegen **Abhängigkeiten zwischen den Raumeinheiten** bestehen. Sie können sich **ebenfalls in den Residuen** einer räumlichen Regression niederschlagen. Auch hier geht treten bei einer Vernachlässigung Effizienzverluste oder eine Inkonsistenz der Schätzung auf.

Allerdings ist die Abhängigkeit im Raum komplexer als diejenige in der Zeit. Entlang der Zeitachse verläuft die Richtung der Abhängigkeit von der Vergangenheit auf die Gegenwart und Zukunft. Im **Raum** kann dagegen eine **Abhängigkeit in allen Himmelsrichtungen** gegeben sein. Wie bei **Zeitreihendaten** jedoch vor allem **zeitlich nahe liegende Effekte** die aktuelle Entwicklung in der Regel **stärker beeinflussen** als weit zurückliegende Ereignisse, werden **starke Wechselwirkungen** vor allem **zwischen nahe beieinander gelegenen Regionen** angenommen. Nahe beieinander gelegene Raumeinheiten können z.B. **benachbarte Regionen** oder **Regionen**, die **in einem bestimmten Umkreis** liegen. Zwischen welchen Regionen potenziell eine substanzielle Interaktionsbeziehung besteht, wird in einer originären nxn-Gewichtungsmatrix **W*** festgehalten. Hier stellen wir bei der Bildung der Gewichtsmatrix auf das **Nachbarschaftskonzept** ab. Als benachbarte Regionen gelten die Raumeinheiten, die eine gemeinsame Grenze in Form einer Kante (Grenzseite) haben (Rook criterion):

(6.1) $$w_{ij}^{*} = \begin{cases} 1 & \text{falls i and j gemeinsame Grenze} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: Gewichtsmatrix der westdeutschen Bundesländer

10 westdeutsche Bundesländer
(alphabetische Reihenfolge der Kürzel):

Baden-Württemberg (BW), Bayern (BY),
Stadtstaat Bremen (HB), Hessen (HE),
Stadtstaat Hamburg (HH), Niedersachsen (NI),
Nordrhein-Westfalen (NW), Rheinlad-Pfalz (RP),
Schleswig-Hostein (SH), Saarland (SL)

Gewichtsmatrix **W*** der westdt. Bundesländer:

$$\underbrace{\mathbf{W}^*}_{10x10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Standardisierung der Gewichtsmatrix (Zeilenstandardisierung):

(6.2) $$w_{ij} = w^*_{ij} / \sum_{j=1}^{n} w^*_{ij}$$

Eine Standardisierung der Gewichtsmatrix wird aus methodischen und inhaltlichen Gründen. So ist durch die Standardisierung sichergestellt, dass z.B. der bekannteste räumliche Autokorrelationskoeffizient (Moran‘s I) im Intervall [-1; 1] liegt. Zu dem lässt sich der räumliche Lag (spatial lag (SL)) einer georeferenzierten Variablen y in der Region i in der Periode t,

(6.3) $$SL(y_{it}) = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} \cdot y_{jt}$$

anschaulich als ihr periodenbezogenes arithmetisches Mittel in den benachbarten Regionen interpretieren.

<u>Beispiel:</u> Standardisierte Gewichtsmatrix der westdeutschen Bundesländer

$$\underbrace{\mathbf{W}}_{10x10} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• Moran‘s I

Der Moran-Koeffizient ist ein globales Maß der räumliche Autokorrelation, dass auf den Kreuzprodukten einer georeferenzierten Variablen und ihrem räumlichen Lag basiert. Auf seiner Basis können Abweichungen von der räumlichen Unabhängigkeit (spatial randomness) aufgedeckt werden. Zudem kann Moran‘s I eingesetzt werden, um räumliche Muster wie Cluster und räumliche Trends aufzudecken.

Moran‘s I für Residuen $\hat{u}_{it}$ der **Periode t**:

(6.4a) $$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot \hat{u}_{it} \cdot \hat{u}_{jt}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{it}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{it} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot \hat{u}_{jt}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_{it}^2}, \; t=1,2,\ldots,T$$ oder (6.4b) $$I_t = \frac{\hat{\mathbf{u}}_t' \mathbf{W} \hat{\mathbf{u}}_t}{\hat{\mathbf{u}}_t' \hat{\mathbf{u}}_t}, \; t=1,2,\ldots,T$$

- Moran‘s I liegt im Intervall [-1; 1]
- I_t ist bei großem n approximativ normalverteilt
- bei beliebigem n: Überprüfung der Signifikanz von I_t mit einem Permutationstest
- $E(I_t) < 0$, bei großem n gilt jedoch $E(I_t) \approx 0$
- bei Residuen hängt $E(I_t)$ auch von den x-Werten ab
- bei einer beobachteten georeferenzierten Variablen y gilt: $E(I_t) = -1/(n-1)$

Bei **T Perioden** können **T Moran-Koeffizienten** $I_1, I_2, \ldots, I_T$ berechnet und gestestet werden.

Alternativ kann für den Gesamtzeitraum der Panelanalyse der **Spatio-Temporal Moran's I (STMI)** berechnet und getestet werden, der jedoch in den bekannten Statistik- und Ökonometrie-Programmen nicht verfügbar ist:

$$\mathrm{STMI} = \frac{n \cdot T}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}} \frac{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{W}} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{u}}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_t}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{W} + A \otimes \mathbf{I}_n$$

wobei die Matrix A Einsen in der (i+1,i)ten Position hat und sonst Nullen:

• Pesarans CD- und lokaler CD-Test

Pesaran (2004) hat einen Test auf Abhängigkeit der Residuen $\hat{u}_{it}$ eines Panelmodells in der Querschnittsdimension (cross-sectional dependence (CD)) entwickelt, der auf dem Pearsonschen Korrelationskoeffizienten

$$(6.5) \qquad \hat{\rho}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{it} \cdot \hat{u}_{jt}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{it}^{2}} \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{jt}^{2}}}, \quad i,j=1,2,..,n.$$

(6.5) enthält die Korrelationskoeffizienten der Residuen $\hat{u}_{it}$ und $\hat{u}_{jt}$ aller Paare von Querschnittseinheiten i und j, die unter Verwendung der Zeitdimension der Paneldaten berechnet werden können. In **Pesarans allgemeinerem Test auf Abhängigkeit in der Querschnittsdimension** werde keine Annahmen über die „Nähe“ der Querscnittseinheiten zueinander gemacht, so dass er auf beliebige Querschnittseinheiten wie z.B. Unternehmen, Konsumenten, Beschäftigte oder Branchen anwendbar ist.

Vorteilhaft ist, das **Pesarans CD-Teststatistik**,

$$(6.6) \qquad CD = \sqrt{\frac{2}{n \cdot (n-1)}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sqrt{T} \cdot \hat{\rho}_{ij} \right)$$

sowohl unter der T-Asymptotik ($T \to \infty$, n=konst.) als auch der n-Asymptotik ($n \to \infty$, T = konst.) standardnormalverteilt ist.

Speziell auf räumliche Paneldaten ist die **lokale Variante von Pesarans CD-Test** zugeschnitten, der sich auf die Korrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_{ij}$. der nahe beieinander liegenden Querschnittseinheiten stützt. Hierzu werden die in $\hat{u}_{it}$ der Gewichtsmatrix W* enthaltenen Informationen über die räumliche Nähe der Regionen zueinander verwendet. Die **Teststatistik des lokalen CD-Tests** lautet

$$\text{(6.7)} \qquad LCD = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} w_{ij}^{*}}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij}^{*} \sqrt{T} \cdot \hat{\rho}_{ij} \right) .$$

Die Nullhypothese einer fehlenden räumlichen Abhängigkeit zwischen benachbarten Querschnittseinheiten wird auf einem Signifikanzniveau α abgelehnt, wenn die lokale CD-Statistik LCD das (1-α/2)-Quantil $z_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung übersteigt. Der Test kann auch mit der standardisierten Gewichtsmatrix **W** implementiert werden (von 0 verschiedene Gewichte .indizieren benachbarte Regionen).

<u>Beispiel:</u> Pesarans CD und lokaler CD-Test der Residuen des Fixed-Effects-Modells der SVB in den Bundesländern

- **Pesaran‘s CD test**

```
> library(plm)
> pcdtest(SVB_W.FE, type="cd")

Pesaran CD test for cross-sectional dependence in panels

data:  formula
z = -3.125, p-value = 0.001778
alternative hypothesis: cross-sectional dependence
```

- **Pesaran‘s local CD test**

```
> pcdtest(SVB_W.FE, type="cd", w=WstarWBL.mat)  oder
> pcdtest(SVB_W.FE, type="cd", w=WWBL.mat)

Pesaran CD test for local cross-sectional dependence in panels

data:  formula
z = -6.6694, p-value = 2.569e-11
alternative hypothesis: cross-sectional dependence
```

A. Static Spatial Panel Models

• Spatial Panel Lag Model (SAR Panel Model)

Das **SAR Panel Model (spatial autoregressive panel model)** bildet die endogenen Interaktionseffekte ab, d.h. die Wechselwirkungen, die zwischen den Regionen über die abhängige Variable y zwischen de Regionen übertragen werden. Der endogene Interaktionseffekt lässt sich als ein Baustein der Spezifikation eines Gleichgewichts verstehen, das durch einen räumlichen Interaktionsprozess mit geprägt wird.

Bei zwei Regionen A und B ist diese Interaktion in Form einer wechselseitige Abhängigkeit von y_A und y_B gegeben:

Abhängige Variable y_A der Region A $\leftrightarrow$ Abhängige Variable y_B der Region B

Spatial Panel Fixed Effects Lag Model (SAR Panelmodell mit fixen Effekten):

(6.8a) $y_{it} = \alpha_i + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot y_j + \sum_{h=1}^{k} \beta_h \cdot x_{hit} + u_{it}$

oder

(6.8b) $y_{it} = \alpha_i + \lambda \cdot \mathbf{w}_i' \cdot \mathbf{y}_t + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it}$

mit $\mathbf{w}_i' = (w_{i1}\ w_{i2}\ \ldots\ w_{in})$ (i-te Zeile der Gewichtsmatrix **W**) und $\mathbf{y}_t' = (y_{1t}\ y_{2t}\ \ldots\ y_{nt})$

λ: räumlich autoregressiver Koeffizient, $SLy_{it} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot y_{jt}$: endogener räumlicher Lag

Das Panelmodell (6.8) lässt sich konsistent mit der **Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode)** oder der **Feasible GLS-Methode** schätzen. Die OLS-Schätzer sind dagegen verzerrt und inkonsistent. Auch führt eine Vernachlässigung des endogenen räumlichen Lags führt zu einer Inkonsistenz der Koeffizientenschätzer. .

Excursus: Biasedness and Inconsistency of OLS estimation

In time series analysis the consistency of OLS estimation of AR models is ensured as long as the errors are free from autocorrelation. Due to the multidirectional nature of spatial dependence, this property does not translate to the spatial case. In fact, it can be shown, that OLS estimation of the spatial lag model always leads to inconsistent parameter estimates. This particular means that a bias present in small samples will not vanish with increasing sample size. As the inconsistency is only affected by the endogenous lag variable **Wy**, we can keep the spatial lag model as simple as possible. For showing the inconsistency of OLS estimation, we omit possible exogenous variables X_1, X_2, …, X_k and confine our discussion to the basic spatial lag model (5.1).

The OLS estimator of the autoregressive parameter ρ of the spatial lag model

(5.5a) $$\mathbf{y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

reads:

(5.7) $$\hat{\rho} = [(\mathbf{W}\mathbf{y})'\mathbf{W}\mathbf{y}]^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{y})'\mathbf{y}$$

We substitute (5.5a) in (5.7) to obtain

$$\hat{\rho} = [(\mathbf{W}\mathbf{y})'\mathbf{W}\mathbf{y}]^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{y})'(\rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon})$$

and

(5.8) $$\hat{\rho} = \rho + [(\mathbf{W}\mathbf{y})'\mathbf{W}\mathbf{y}]^{-1}(\mathbf{W}\mathbf{y})'\boldsymbol{\varepsilon}$$

Taking the expectation of both sides of (5.8) one gets

(5.9) $$E(\hat{\rho}) = \rho + E\{[(\mathbf{Wy})'\mathbf{Wy}]^{-1}(\mathbf{Wy})'\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

As in the time series case, the second term on the right side of (5.9) does not vanish. While in time series analysis this is due to the complex stochastic nature of the inverse term, in the spatial case even the expectation of (**Wy**)'**ε** is not equal to zero except for the case ρ=0 (where the spatial lag model is suspended):

$$E[(\mathbf{Wy})'\boldsymbol{\varepsilon}] = E\{[\mathbf{W}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}]'\boldsymbol{\varepsilon}\} = E[\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}')^{-1}\mathbf{W}'\boldsymbol{\varepsilon}]$$

(using (5.5b)) Because of $E(\hat{\rho}) \neq \rho$ the **OLS estimator** $\hat{\rho}$ is a **biased estimator** for ρ.

<u>Excursus</u>:
An estimator $\hat{\theta}$ for the parameter θ is termed to be **consistent**, if it **converges in probability** to θ:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta) = 0, \ \delta > 0 \quad .$$

Convergence in probability is abbreviated by the **probability limit** (plim operator):

$$\operatorname{plim} \hat{\theta}_n = \theta \quad .$$

We use the subscript n with the estimator in order to elucidate that the it depends on the sample size n. □

In order to assess consistency of OLS estimator $\hat{\rho}$, we have therefore to take the probability limit of (5.8). According to the product rule we obtain

$$\operatorname{plim} \hat{\rho}_n = \rho + \operatorname{plim} [(\mathbf{Wy})'\mathbf{Wy}]^{-1} \cdot \operatorname{plim} (\mathbf{Wy})'\boldsymbol{\varepsilon}$$

or

(5.10) $$\operatorname{plim} \hat{\rho}_n = \rho + \operatorname{plim} [\frac{1}{n}(\mathbf{Wy})'\mathbf{Wy}]^{-1} \cdot \operatorname{plim} \frac{1}{n}(\mathbf{Wy})'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

With

$$(\mathbf{Wy})'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{Wy} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{W}(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

(5.10) tranlates into

(5.11) $$\operatorname{plim} \hat{\rho}_n = \rho + \operatorname{plim} [\frac{1}{n}(\mathbf{Wy})'\mathbf{Wy}]^{-1} \cdot \operatorname{plim} \frac{1}{n}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{W}(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

The last term in equation (5.11) consists of a quadratic form in ε. For values of ρ ≠0 (the case ρ=0 excludes the endogenous spatial lag variable), the expression is unequal to zero. Thus, because of

$$\operatorname{plim} \hat{\rho}_n \neq \rho$$

the **OLS estimator** $\hat{\rho}$ of the autoregressive parameter ρ of the spatial lag model (5.5) [and likewise (5.6)] is **inconsistent**. □

• Panel SLX Model

Das **Panel SLX Model** bildet die exogenen Interaktionseffekte ab, d.h. die Effekte, die zwischen den Regionen durch die Abhängigkeit regionaler Prozesse von erklärenden unabhängigen Variablen anderer Regionen hervorgerufen werden. So kann z.B. die Produktion in einer Regionen wachsen, wenn qualifizierte Arbeitskräfte aus benachbarten Regionen bereit sind zu pendeln.

Bei zwei Regionen A und B ist diese Interaktion in Form der beiden folgenden Kausaleffeke gegeben:

Unabhängige Variable x_A der Region A $\rightarrow$ Abhängige Variable y_B der Region B

Unabhängige Variable x_B der Region B $\rightarrow$ Abhängige Variable y_A der Region A

Panel Fixed Effects SLX Model:

(6.9a) $y_{it} = \alpha_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_h \cdot x_{hit} + \sum_{h=1}^{k} \beta_h \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot x_{hjt} + u_{it}$

oder

(6.8b) $y_{it} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + \boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{SLx}_{it} + u_{it}$

mit $SLx_{hit} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot x_{hjt}$: räumlicher exogener Lag und $\mathbf{SLx}_{it}' = (SLx_{1it}\ SLx_{2it} \ldots SLx_{nit})$

θ: Vektor der Regressionskoeffizienten der exogenen räumlichen Lags

Das Panel Fixed Effects SLX Model (6.9) lässt sich wie das nicht-räumliche Fixed Effects Modell konsistent mit der **LSDV-Methode** schätzen.

- **Spatial Panel Error Model (Panel SEM Model)**

Das **Spatial Panel Error Model (Panel SEM Model)** bildet Interaktionseffekte zwischen den Fehlertermen ab. handelt sich hierbei um Störeineinflüsse, die nicht auf eine Region beschränkt bleibe, sondern auf andere Regionen überschwappen. Sie können z.B. durch vernachlässigte Einflussgrößen hervorgerufen werden, die räumlich autokorreliert sind. Auch Schocks, die einem räumlichen Muster folgen, können hierfür verantwortlich

Bei zwei Regionen A und B ist diese Interaktion in Form einer wechselseitige Abhängigkeit von u_A und u_B gegeben:

Störgröße (Fehlerterm) u_A der Region A $\leftrightarrow$ Störgöße (Fehlerterm) u_B der Region B

Spatial Panel Fixed Effects Error Model (SEM Panelmodell mit fixen Effekten):

(6.10a) $y_{it} = \alpha_i + \sum_{h=1}^{k} \beta_h \cdot x_{hit} + u_{it}$ mit $u_{it} = \rho \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot u_{jt} + \nu_{it}$ (autoregressiver Störprozess)

oder

(6.10b) $y_{it} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it}$ mit $u_{it} = \rho \cdot \mathbf{w}_i' \cdot \mathbf{u}_t + \nu_{it}$ (autoregressiver Störprozess)

mit λ: räumlich autoregressiver Koeffizient und $\mathbf{u}_t' = (u_{1t}\ u_{2t} \ldots u_{nt})$

, $SLu_{it} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot u_{jt}$: räumlicher Störgrößen-Lag

Das Panelmodell (6.10) kann konsistent mit der **Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode)** oder der **Feasible GLS-Methode** schätzen. Die Signifikanz der geschätzten Regressionskoeffizienten lässt sich valide testen. Eine OLS-Schätzer oder Vernachlässigung des räumlichen Störprozesses führt zu einer Invalidierung der statistischen Inferenz.

A. Dynamic Spatial Panel Models

- **Dynamic Spatial Panel Fixed Effects Lag Model (Dynamic SAR Fixed Effects Panel Model):**

(6.11) $$y_{it} = \alpha_i + \gamma \cdot y_{i,t-1} + \lambda \cdot \mathbf{w}_i' \cdot \mathbf{y}_t + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it}$$

- **Dynamic Panel SLX Model**

(6.12) $$y_{it} = \alpha_i + \gamma \cdot y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + \boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{SLx}_{it} + u_{it}$$

- **Dynamic Spatial Panel Error Model (Dynamic Panel SEM Model)**

(6.13) $$y_{it} = \alpha_i + \gamma \cdot y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{x}_{it} + u_{it} \qquad \text{mit} \qquad u_{it} = \rho \cdot \mathbf{w}_i' \cdot \mathbf{u}_t + \nu_{it}$$

Die unterschiedlichen räumlichen Effekte lassen sich auch in einem Panelmodell in kombinierter Form analysieren.

7. Vergleich der SVB-Prognosen

	Static Fixed Effects Panel Model (FE Within Estimation)	Dynamic Panel Model (Pooled / FE Within Estimation)	Dynamic FE Panel Model (FE Within Estimation)	Dynamic FE Panel Model (One-Step Arellano-Bond Estimator)	Dynamic FE Panel Model (Two-Step Arellano-Bond Estimator)
Explanatory variables	SVB_W	1st/4th order lagged SVB_BL	SVB_W and 1st/4th order lagged SVB_BL	1st/4th order lagged SVB_BL	1st/4th order lagged SVB_BL
One-Period Ahead Forecast					
MAE	15946.84	11852.52	11751.43	14694.15	13565.02
MAPE	0.516	0.458	0.405	0.577	0.533
MSE	67138227	291121479	332221246	39943005	345165805
RMSE	25911.04	17062.28	18226.94	19985.75	18578.64
Four-Period Ahead Forecast					
MAE	17343.57	15045.86	13146.35	26338.55	26892.07
MAPE	0.580	0.535	0.519	0.986	1.008
MSE	782373106	412695614	43580478	1181645693	1230776596
RMSE	27970.93	20314.91	20875.94	34375.07	35082.43