Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

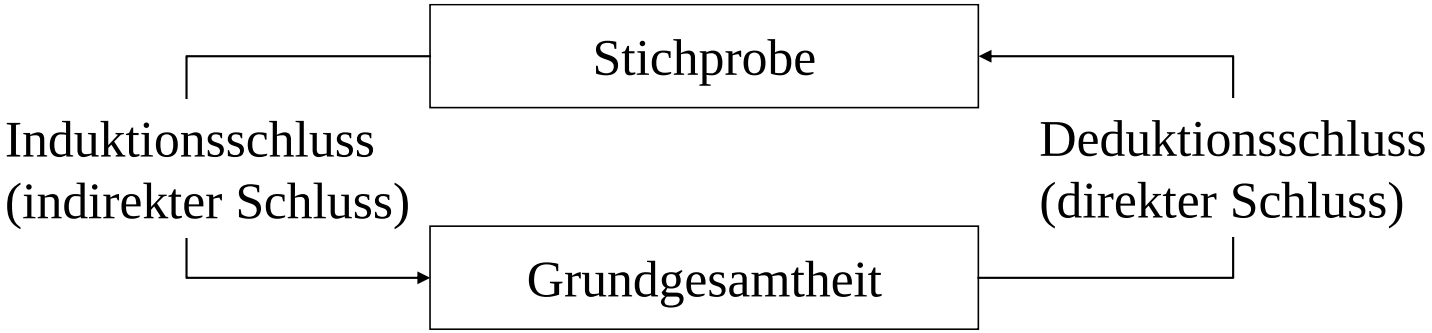
Skript zur Statistik II
(Wahrscheinlickeitsrechnung und induktive Statistik)

1. Einleitung

Deskriptive Statistik:
Allgemeine und spezielle Methoden zur Datenauswertung, die unabhängig von der Erhebungsart angewendet werden können

Induktive Statistik:
Schätz- und Testmethoden zur Auswertung von (Zufalls-)Stichproben, die eine Übertragung der Stichprobenergebnisse auf eine Grundgesamtheit ermöglichen

Abbildung: Induktiver Schluss



Gründe für Stichprobenerhebungen:

- Kostenersparnis
- Aktualität
- Praktische Unmöglichkeit von Vollerhebungen
- Gründlichere Durchführung

Beispiel:

In der Induktiven Statistik werden Fragestellungen der folgenden Art untersucht:

- Die Marktforschung hat ergeben, dass der Durchschnittspreis einer bestimmten Tiefkühlpizza bei 1,90 € liegt. Das Ergebnis basiert auf 20 zufällig ausgewählten Supermärkten. In welchem Bereich liegt Durchschnittspreis des Produktes mit hoher Sicherheit in der Grundgesamtheit aller Lebensmittelgeschäfte?

- In einer Befragung eines Meinungsforschungsinstituts haben 5,5% der 1000 zufällig ausgewählten Interviewten angegeben, bei der kommenden Bundestagswahl die Partei „Die Linke“ wählen zu wollen. Kann „Die Linke“ mit einem hohen Vertrauensniveau davon ausgehen, dass ihr Stimmenanteil bei allen Wählern ebenfalls über 5% liegt?

- Ein Autohersteller behauptet, dass sein Auto einen Benzinverbrauch von 7,3 Litern auf 100 Kilometern aufweist. Eine Autozeitschrift bezweifelt diese Aussage und misst den Verbrauch von 40 zufällig ausgewählten Autos auf einer Teststrecke. Ist aufgrund des Stichprobenergebnisses von 7,5 l/100 km davon auszugehen, dass die Herstellerangabe zu gering ist?

Der **induktive Schluss** erfolgt auf der Grundlage der **Wahrscheinlichkeits-rechnung,** die die Grundlage für die Induktive Statistik ist.

Relevanz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

- Basis der Schätz- und Testmethoden der Induktiven Statistik
- Mathematische Grundlage der Wirtschaftstheorie z.B. der Finanzmarkt-, Geld- und Konjunkturtheorie.

Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** beschäftigt sich mit Vorgängen, deren Ergebnisse nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden können, sondern dem Zufall unterliegen. Sie erlaubt, quantitative Aussagen über die Ergebnisse von Zufallsvorgängen zu machen.

Beispiel:

Relevante Fragestellungen für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 100 produzierten Stücken mehr als 15 Stücke Ausschuss zu produzieren, wenn die Ausschussquote der Maschine 10 % beträgt?

-Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person aus einer bestimmten Risikogruppe einen Autounfall verursacht?

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Überlastung von fünf Telefonhauptleitungen, wenn eine Firma 200 Angestellte hat und diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % telefonieren wollen?

2. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechung

2.1 Zufallsexperiment und Ereignis

Ein **Zufallsexperiment (Zufallsvorgang)** zeichnet sich durch folgende Charakteristika aus:

- Es gibt eine Menge möglicher Ergebnisse, die bei der Durchführung eines Zufallsvorgangs eintreten können.

- Es ist unbekannt, welches der möglichen Ergebnisse tatsächlich eintreten wird (Zufallsabhängigkeit).

- Der Zufallsvorgang ist prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholbar

Beispiel:

Beispiele für Zufallsvorgänge sind:

- Bei einem Fußballspiel ist unbekannt, welches Ergebnis eintreten kann: Gewinn der Heimmannschaft, unentschieden, Gewinn der Auswärtsmannschaft.

- Ein Supermarktleiter hat 100 Joghurts im Regal stehen, die wöchentlich neu geliefert werden. Er weiß im Voraus nicht wie viel Joghurts (0 bis 100) in einer Woche abgesetzt werden.

- Ein Würfelwurf kann die Ergebnisse 1, 2, 3, 4, 5 und 6 liefern. Der Spieler weiß allerdings nicht, welche Augenzahl eintreten wird. ♦

Die Menge der möglichen Ergebnisse ω eines Zufallsexperiments (Zufallsvorgangs) heißt **Ergebnismenge (Stichprobenraum)** Ω**:**

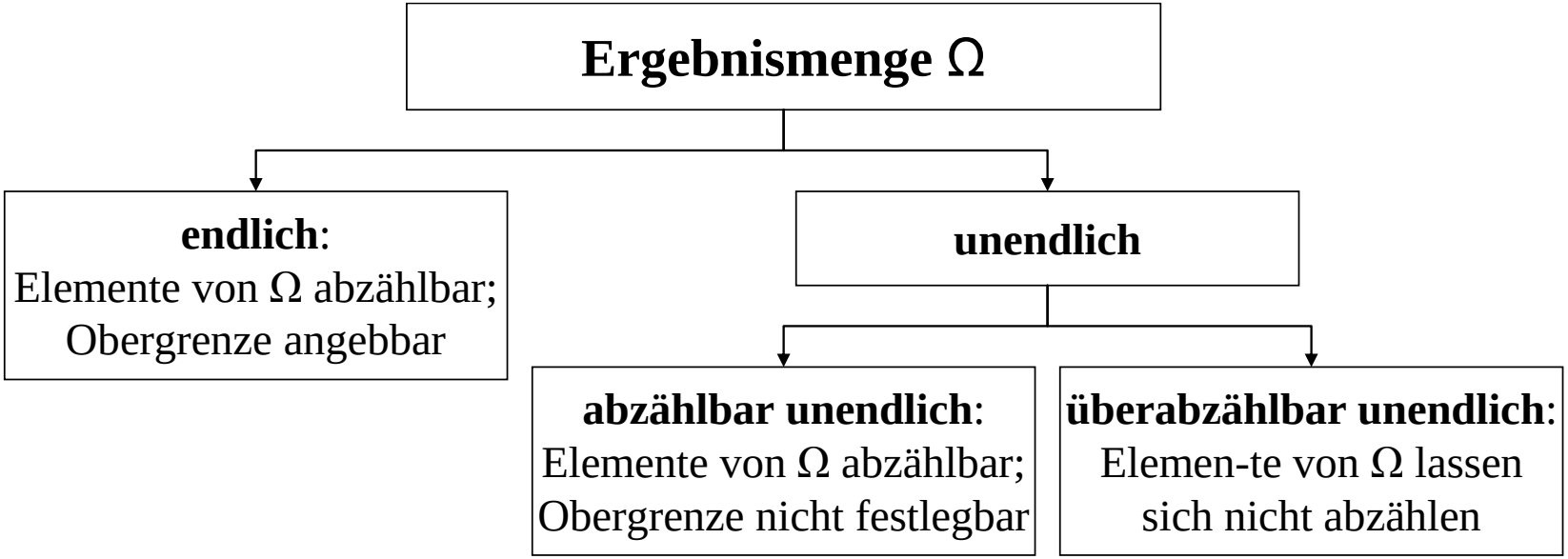
$$\Omega = \{\omega \mid \omega \text{ ist Ergebnis des Zufallsvorgangs}\}$$

Beispiel:

Zufallsvorgang	Ergebnismenge	Mächtigkeit der Ergebnismenge
Werfen einer Münze (K = Kopf, Z = Zahl)	$\Omega = \{K, Z\}$	endlich
Zweimaliges Werfen einer Münze	$\Omega = \{(K,K), (K, Z), (Z,K), (Z,Z)\}$	endlich
Eingegangene Bestellungen in einer Periode	$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$	abzählbar unendlich
Messung der Wartezeit t von Kunden vor einem Postschalter (T: Öffnungsdauer des Schalters)	$\Omega = \{ t \mid 0 \leq t \leq T\}$	überabzählbar
Messung des Anteils c vom Konsum am Volkseinkommen	$\Omega = \{ c \mid 0 \leq c \leq 1\}$	überabzählbar

Mächtigkeit der Ergebnismenge: Umfang der Ergebnismenge (Anz. der Ergebnisse)

Abbildung: Endliche und unendliche Ergebnismenge

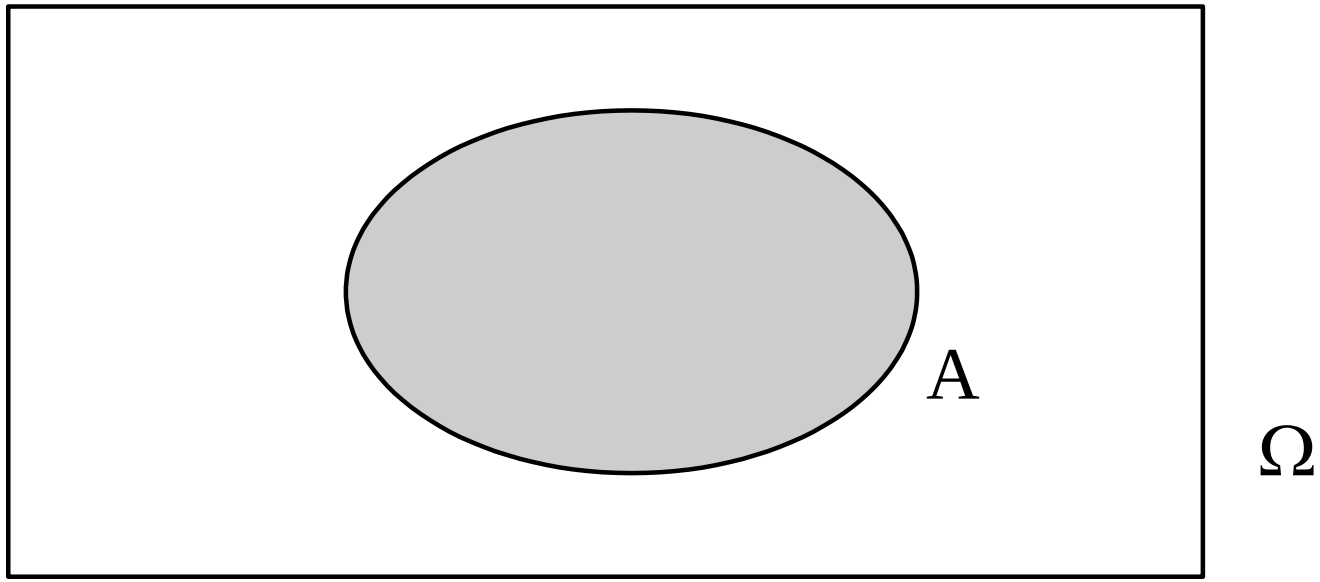


- **Ereignisse**

Eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω eines Zufallsvorgangs heißt **Ereignis**.

Ereignisse:
A, B, C, … oder A_1, A_2, A_3, …

Abbildung: Venn-Diagramm für das Ereignis A



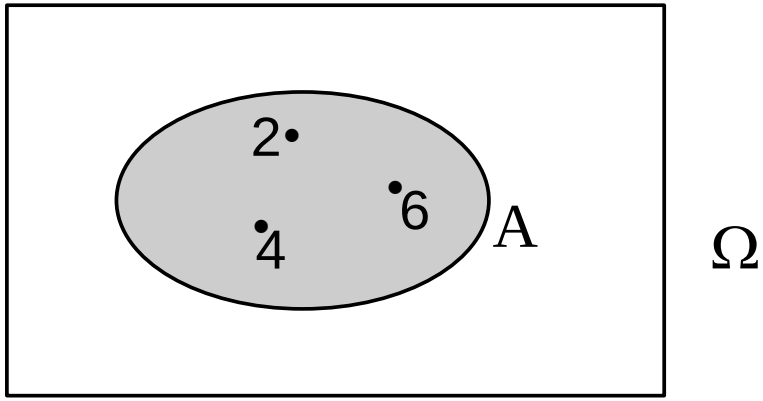
Rechteck: Ergebnismenge Ω
Oval: Ereignis A

Beispiel:

Wir betrachten das einmalige Werfen eines Würfels. Die Ergebnismenge dieses Zufallsvorgangs ist gegeben durch

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

gegeben. Das Ereignis A enthält alle Ergebnisse, die eine gerade Augenzahl aufweisen. A lässt sich als Menge oder durch ein Venn-Diagramm angeben:

Ereignis in aufzählender Form	Ereignis in einem Venn-Diagramm
$A = \{2, 4, 6\}$	

Elementarereignis:
Ereignisse, die ein einziges Element enthalten, bezeichnet man als **Elementarereignis**.

Beispiel:
Das Ereignis C = { 1 }, dass allein die Augenzahl 1 enthält, ist ein Elementarereignis beim Würfelwurf. ♦

Sicheres Ereignis und unmögliches Ereignis:

Ein Ereignis, das bei keiner Durchführung eines Zufallsvorgangs eintreten kann, heißt **unmögliches Ereignis** $\varnothing$. Das unmögliche Ereignis enthält kein Element aus Ω; es entspricht also der leeren Menge: $\varnothing = \{\ \}$.

Ein Ereignis, das sich bei jeder Durchführung eines Zufallsvorgangs realisiert, heißt **sicheres Ereignis**. Es enthält alle möglichen Ergebnisse, d.h. es ist Ω selbst.

Beispiel:

Dass beim nächsten Würfelwurf eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 geworfen wird, ist ein sicheres Ereignis. Die „7“ ist dagegen ein unmögliches Ereignis. ♦

Teilereignis

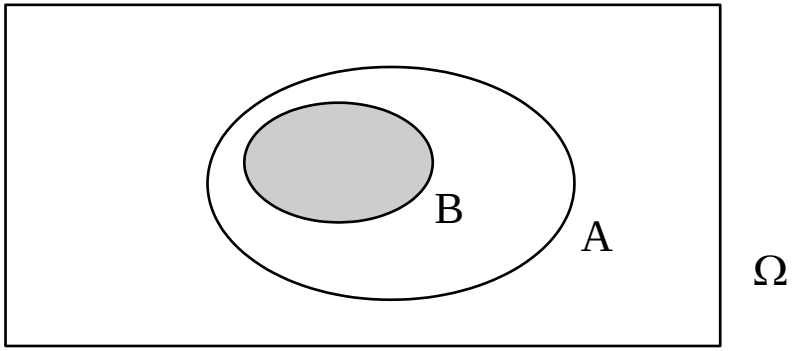
Ein Ereignis B, dessen Elemente alle in A vorhanden sind, bezeichnet man als Teilereignis von A:

$$B \subset A.$$

Immer, wenn B eintritt, tritt auch A vor. Jedes Ereignis ist ein Teilereignis der Ergebnismenge Ω.

B ist Teilereignis von A: $B \subset A$

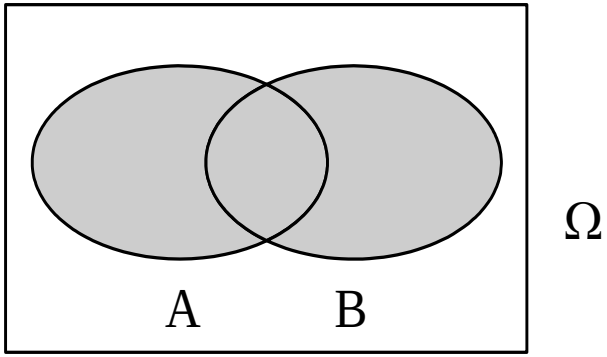
Beispiel:
Das Ereignis $B = \{\ 2\ \}$ ist ein Teilereignis von $A = \{\ 2, 4, 6\ \}$.



2.2 Operationen mit Ereignissen

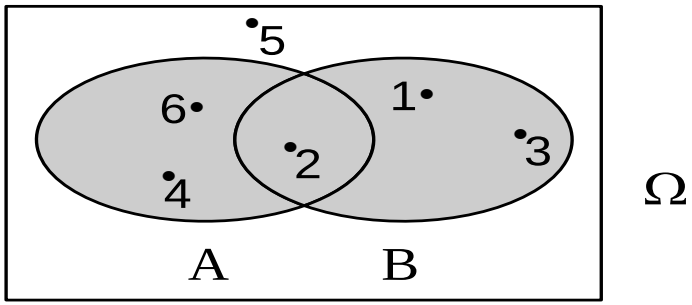
Da Ereignisse Teilmengen von Ω sind, kann man mit Ereignissen rechnen wie mit Mengen. Wir können Ereignisse nach bestimmten Regeln verknüpfen und erhal ten als Resultat der jeweiligen Operation neue Ereignisse.

Vereinigung von A und B

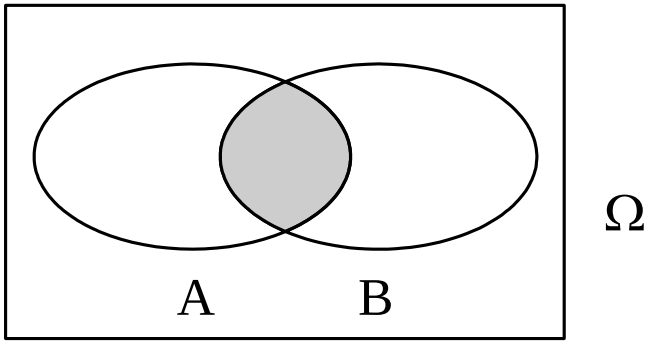
$A \cup B$	A vereinigt mit B; A oder B	Eines der beiden Ereignisse A oder B oder beide Er-ignisse treten ein	

Beispiel:

Beim Würfelwurf sei A das Ereignis "gerade Augenzahl" und B "Augenzahl kleiner als 4": $A = \{ 2, 4, 6 \}$ und $B = \{ 1, 2, 3 \}$. ♦

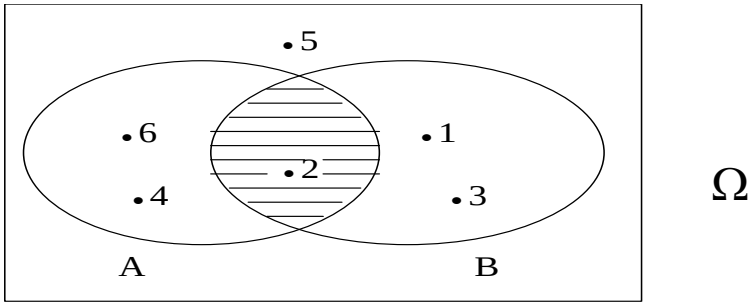
$A \cup B = \{ 2, 4, 6 \} \cup \{ 1, 2, 3 \}$ $= \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$	

Durchschnitt von A und B

$A \cap B$	A geschnitten mit B; A und B	Beide Ereignisse A und B treten ein	

Beispiel:

Beim Würfelwurf betrachten wir wiederum als Ereignis A eine "gerade Augenzahl" und als Ereignis B eine "Augenzahl kleiner als 4. ♦

$A \cap B = \{ 2, 4, 6 \} \cap \{ 1, 2, 3 \}$ $= \{ 2 \}$	

Gesetze der Assoziativität und Distributivität:

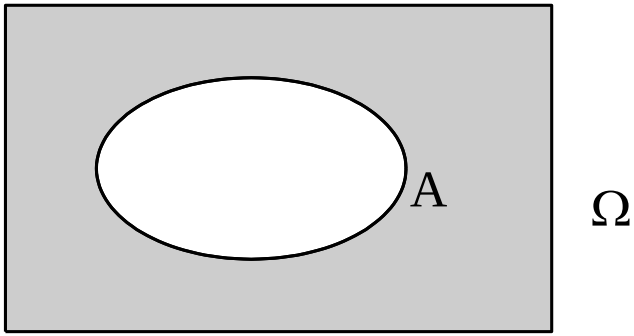
Assoziativität:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivität:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Komplementärereignis

$\overline{A}$	$\overline{A}$ ist Komplement von A	$\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt	

Beispiel:

Das Komplementärereignis $\overline{A}$ zum Ereignis A "gerade Augenzahl“, A = {2, 4, 6}, ist eine „ungerade Augenzahl“: $\overline{A}$ = {1, 3, 5}. ♦

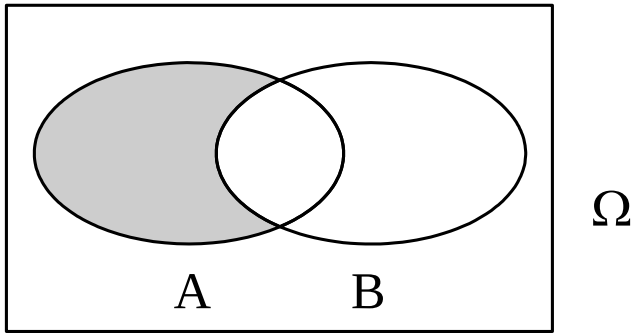
Regeln für das Komplementärereignis:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$
3. $\overline{\Omega} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \Omega$

Gesetze von de Morgan:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Differenz von Ereignissen

A \ B	A ohne B	A tritt ein, aber nicht zugleich B	

Beispiel:

Die Differenz der Ereignisse A "gerade Augenzahl" und B "Augenzahl kleiner als 4“ ist das Ereignis { 4, 6 }:

$$A \setminus B = \{ 2, 4, 6 \} \setminus \{ 1, 2, 3 \} = \{ 4, 6 \}. \qquad \blacklozenge$$

Der Differenzoperator “\” kann alternativ durch Komplementär- und Durchschnitts-bildung dargestellt werden:

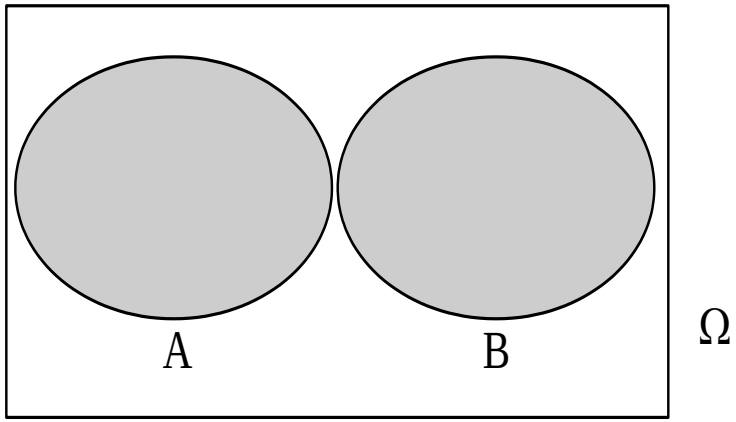
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Beispiel:

Es ist A das Ereignis, eine "gerade Augenzahl" zu würfeln, und B das Ereignis, eine "Augenzahl kleiner als 4“ zu erhalten. Dann erhält man mit $\overline{B} = \{ 4, 5, 6 \}$

$$A \cap \overline{B} = \{ 2, 4, 6 \} \cap \{ 4, 5, 6 \} = \{ 4, 6 \} = A \setminus B. \qquad \blacklozenge$$

Disjunkte Ereignisse

$A \cap B = \emptyset$	A und B sind disjunkte Ereignisse, wenn A und B nicht gleichzeitig eintreten können	

Beispiel:

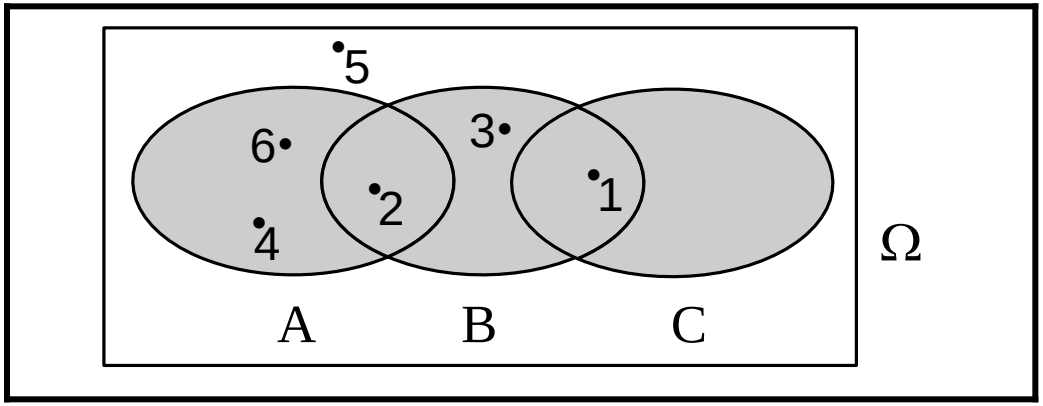
Das Ereignis A "gerade Augenzahl" und das Ereignis D „ungerade Augenzahl“ sind disjunkte Ereignisse, da A und D disjunkt (=elementefremd) sind:

$$A \cap D = \{ 2, 4, 6 \} \cap \{ 1, 3, 5 \} = \{ \} = \emptyset.$$ ♦

Beispiel für Operationen mit drei Ereignissen

Beim Werfen eines Würfels betrachten wir drei Ereignisse

A: “gerade Augenzahl” → A = { 2, 4, 6 }
B: “Augenzahl kleiner als 4” → B = { 1, 2, 3}
C: “Augenzahl 1” → C = { 1 }



$A \cup B \cup C = \{ 2, 4, 6 \} \cup \{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 1 \} = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$

$B \cup C = \{ 1, 2, 3 \} \cup \{ 1 \} = \{ 1, 2, 3 \} = B$, da $C \subset B$ ist

$B \cap C = \{ 1, 2, 3 \} \cap \{ 1 \} = \{ 1 \} = C$, da $C \subset B$ ist

$A \cap C = \{ 2, 4, 6 \} \cap \{ 1 \} = \emptyset$, da A und C disjunkt sind

• Ereignisfeld und Potenzmenge

Ein **Ereignisfeld** $\alpha(\Omega)$ ist ein System von Ereignissen, das **alle interessierenden Ereignisse eines Zufallsvorgangs** enthält und mathematisch abgeschlossen ist, d.h. Verknüpfungen von Ereignisses (z.B. $\cap$, $\cup$ und Komplement) sind in diesem Ereignissystem enthalten.

Die **Potenzmenge** $P(\Omega)$ ist das umfassendste Ereignisfeld. Sie enthält alle möglichen Ereignisse aus der Ergebnismenge Ω.

Bei einem endlichen Ergebnisraum mit N Ergebnissen enthält die Potenzmenge 2^N Ereignisse.

Beispiel:

Die vier Farbwerte Kreuz, Pik, Herz und Karo eines Kartenspiels sind Ergebnisse des Zufallsvorgangs „Karten austeilen“:

$$\Omega = \{ \text{Kreuz, Pik, Herz, Karo} \}.$$

Die Potenzmenge $P(\Omega)$ enthält hier $2^4 = 16$ Ereignisse.

1	0-elementiges Ereignis:	$\varnothing$
4	1-elementige Ereignisse:	{Kreuz}, {Pik}, {Herz}, {Karo}
6	2-elementige Ereignisse:	{Kreuz, Pik}, {Kreuz, Herz}, {Kreuz, Karo}, {Pik, Herz}, {Pik, Karo}, {Herz, Karo}
4	3-elementige Ereignisse:	{Kreuz, Pik, Herz}, {Kreuz, Pik, Karo}, {Kreuz, Herz, Karo}, {Pik, Herz, Karo}
1	4-elementiges Ereignis:	Ω

Ein Ereignisfeld ist z.B. durch die 8-elementige Menge

$$\alpha(\Omega) = \{\{\text{Kreuz}\}, \{\text{Pik}\}, \{\text{Kreuz, Pik}\}, \{\text{Herz, Karo}\}\}$$
$$\{\text{Pik, Herz, Karo}\}, \{\text{Kreuz, Herz, Karo}\}, \Omega, \phi\}$$

gegeben. ♦

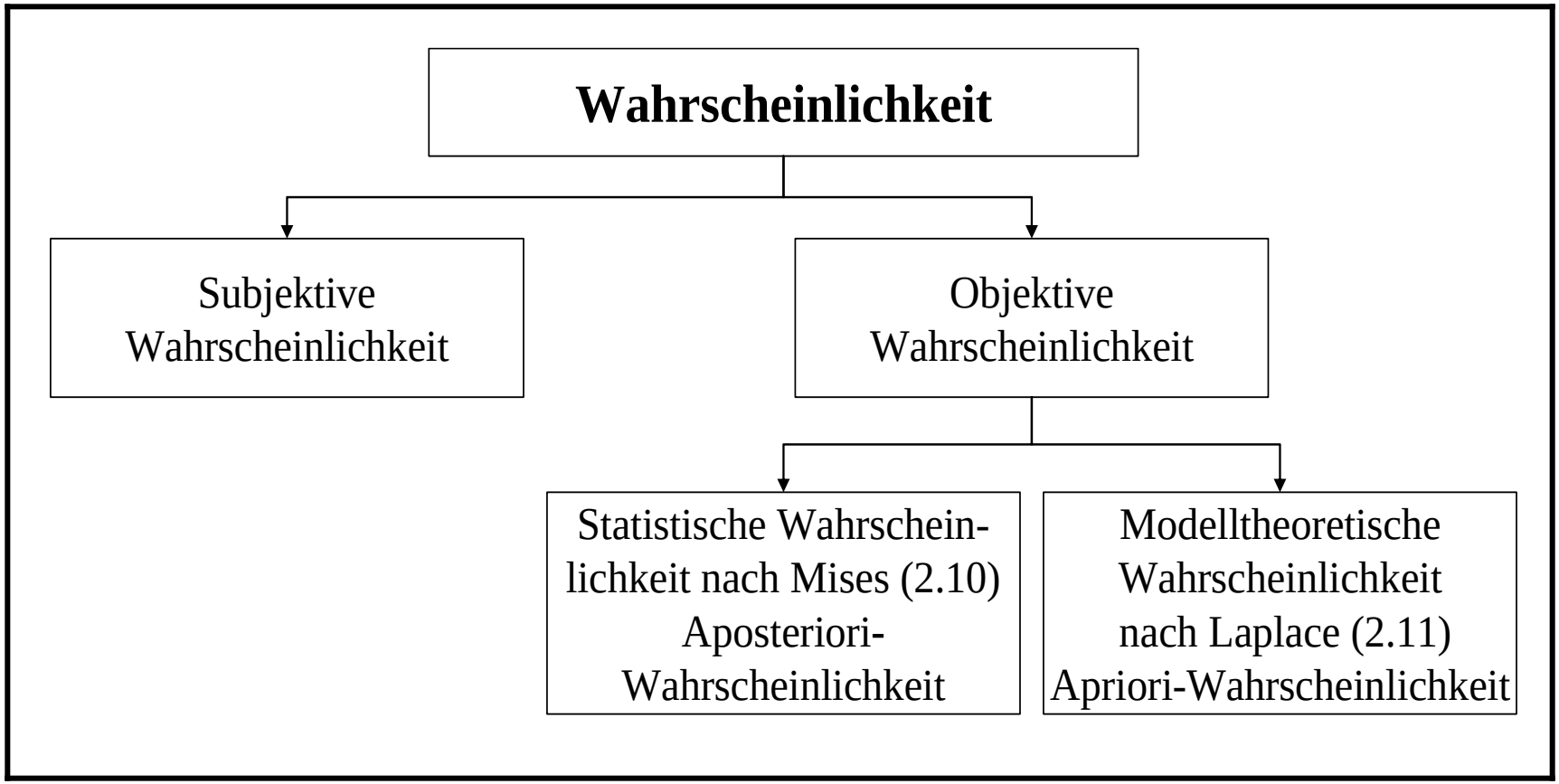
2.3 Wahrscheinlichkeit

Bei Zufallsvorgängen lässt sich nicht mit Sicherheit sagen, welches Ereignis eintreten wird. Gleichwohl werden bestimmten Ereignissen größere **Realisierungschancen** eingeräumt als anderen Ereignissen. So wird man z.B. bei einem Würfelwurf intuitiv davon ausgehen, dass die Chance, eine gerade Augenzahl zu werfen, größer ist als die Chance, eine “1” zu werfen.

In der Statistik geht es uns allerdings nicht nur darum zu sagen, ob die Chance für das Eintreten eines Ereignisses groß oder klein ist. Wir wollen vielmehr dieser **Chance** eine **Zahl zuzuordnen**. Diese Zahl gibt an, wie groß die **Chance für das Eintreten eines Ereignisses** ist. Solche Zahlen heißen **Wahrscheinlichkeiten**.

Da die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses eine Zahl ist, können wir mit Wahrscheinlichkeiten rechnen. Die **Rechenregeln** werden durch die **Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung** festgelegt. Die **Wahrscheinlichkeitsbegriffe** geben dagegen alternative Möglichkeiten zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten an.

Abbildung: Wahrscheinlichkeitsbegriffe



- **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit (Statistische Wahrscheinlichkeit)**

Der Begriff der **statistischen Wahrscheinlichkeit** geht auf von Mises (1931) zurück.

Ein Zufallsvorgang wird n-mal wiederholt
Gegenstand des Interesses: Ereignis A
Absolute Häufigkeit des Ereignisses A: n(A)
Relative Häufigkeit des Ereignisses A. $h_n(A) = n(A) / n$

Die relative Häufigkeit kann sich nach jeder Durchführung des Zufallsvorgangs ändern → Folge relativer Häufigkeiten $h_n(A)$

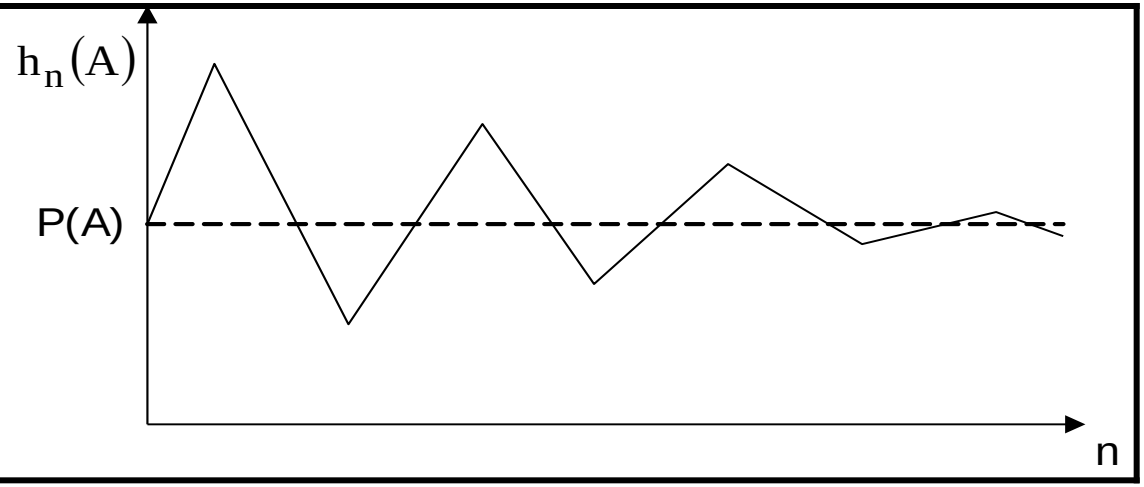
bei geringer Anzahl von Wiederholungen: starke Schwankungen von $h_n(A)$

bei wachsendem n: Stabilisierung der $h_n(A)$ um konstanten Wert (**Stabilitätseigenschaft** der relativen Häufigkeit)

Abbildung: Stabilitätseigenschaft der relativen Häufigkeiten

Definition der statistischen Wahrscheinlichkeit:

(2.1) $$P(A) = \lim_{n \to \infty} h_n(A)$$



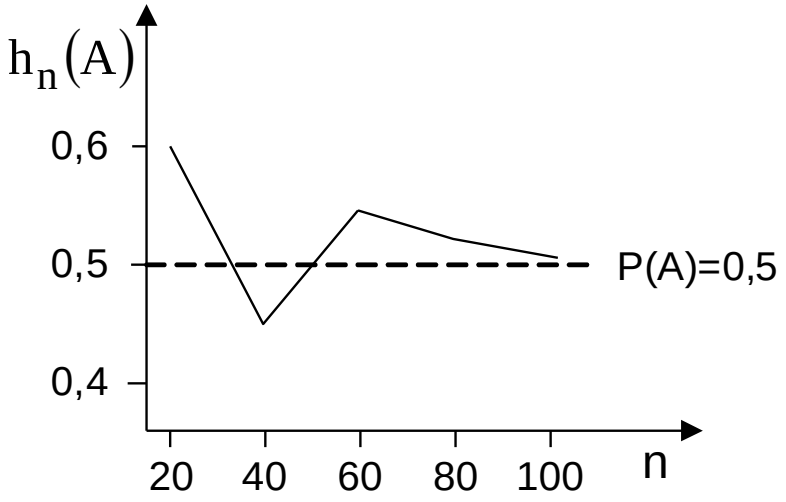
Beispiel:

Bei einem Münzwurf wird das Ereignis A betrachtet, das die Realisation „Kopf“ beinhaltet. Die Durchführung des Experiments liefert die im Folgenden dargestellten Ergebnisse. Bei 20-maligem Münzwerfen wird beispielsweise 12-mal Kopf erzielt.

Tabelle

n	$n(A)$	$h_n(A)$
20	12	$12/20 = 0{,}6$
40	18	0,45
60	33	0,55
80	42	0,525
100	51	0,51

Grafik



Wie aus der Grafik hervorgeht, nähern sich die relativen Häufigkeiten der gesuchten Wahrscheinlichkeit an. ♦

- **Modelltheoretische Wahrscheinlichkeit (Laplacesche Wahrscheinlichkeit)**

Den **modelltheoretischen Ansätzen** ist gemeinsam, dass Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Ereignissen aufgrund eines statistisch-mathematischen Modells vor der Durchführung eines Zufallsvorgangs bestimmt werden (**A-priori-Wahrscheinlichkeiten)**

In der induktiven Statistik sind eine Vielzahl derartiger Modelle verfügbar. Wir beschränken uns hier allerdings auf die Darstellung des historisch ältesten Modells, das man als **Gleichmöglichkeitsmodell** bezeichnet. Es handelt sich dabei um die Definition des französischen Mathematikers Laplace (1749–1827), der von Zufallsvorgängen ausging, deren

- Ergebnismenge endlich ist,
- Elementarereignisse alle gleichwahrscheinlich sind.

Definition der Laplace-Wahrscheinlichkeit:

(2.2) $P(A) = |A| / |\Omega|$

$|A|$: Anzahl der für das Ereignisse A günstigen Ergebnisse (= Mächtigkeit von A)
$|\Omega|$: Anzahl aller möglichen Ergebnisse (= Mächtigkeit von Ω)

Beispiel:
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit für das Werfen einer “geraden Augenzahl" (Ereignis A). Es ist

$$A = \{ 2, 4, 6 \} \quad \rightarrow \quad |A| = 3$$

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} \quad \rightarrow \quad |\Omega| = 6,$$

so dass sich mit der modelltheoretischen Wahrscheinlichkeitsdefinition (2.2)

$$P(A) = |A| / |\Omega| = 3 / 6 = 0{,}5.$$ ♦

Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem zweimaligen Münzwurf „mindestens eine Zahl“ zu werfen? Am besten notiert man zuerst die Elemente der Ergebnismenge:

$$\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\} \ .$$

Günstig sind alle Ausgänge mit Ausnahme von zweimal Kopf:

$$A = \{(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\} \ ,$$

so dass man als gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

erhält. ♦

● Subjektive Wahrscheinlichkeit

In der Wirtschaftspraxis wird sich das Arbeiten mit **subjektiven Wahrscheinlichkeiten** oft nicht vermeiden lassen. So können z. B. die Absatzchancen eines Produkts, das bisher nicht auf dem Markt war, nur über subjektive Wahrscheinlichkeiten beurteilt werden. Subjektive Wahrscheinlichkeiten werden hier oftmals durch Einschätzungen von Experten gewonnen. Eine alternative Form der Gewinnung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten in diesem Bereich sind Unternehmens- und Verbraucherbefragungen.

Auch im Alltagsleben treten immer wieder Fälle auf, in denen ein objektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht anwendbar ist. Wie lässt sich z. B. die Chance einer Fußballmannschaft für den Gewinn eines Spiels beurteilen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Pferd bei einem Rennen den 1. Platz belegt? In solchen Fällen lassen sich Wahrscheinlichkeiten z.B. über **Wettquoten** bestimmen, die sich aus den Wetteinsätzen des Publikums ergeben. Da das Wettverhalten letztlich auf den Einschätzungen der Wettteilnehmer beruht, spricht man in diesem Zusammenhang von subjektiven Wahrscheinlichkeiten.