4. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

4.1 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein Teilgebiet der Mathematik. Es ist üblich, an den Anfang einer mathematischen Theorie einige Axiome zu setzen, aus denen sich dann alle weiteren Sätze dieser Theorie deduktiv ableiten lassen. Die Axiome selbst werden gesetzt, d.h. sie sind nicht beweisbar. Sie haben in der Regel jedoch einen Bezug zur Anschauung. Wir werden auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese Weise vorgehen und beginnen daher mit dem Axiomensystem, das 1935 von KOLMOGOROV eingeführt wurde. Dieses **Axiomensystem** stellt die **Grundlage der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung** dar.

<u>Axiom 1 (Nichtnegativität):</u>

$P(A) \geq 0$

Wahrscheinlichkeiten sind nichtnegative, relle Zahlen, die den Ereignissen zugeordnet sind.

<u>Axiom 2 (Normierung):</u>

$P(\Omega) = 1$

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, womit eine Normierung der Wahrscheinlichkeit erfolgt. Aus den beiden ersten Axiomen ergibt sich, dass Wahrscheinlichkeiten reelle Zahlen sind, die im Intervall [0; 1] liegen.

Axiom 3 (Additivität):

P(A∪B) = P(A) + P(B),   falls A ∩ B = ∅

Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

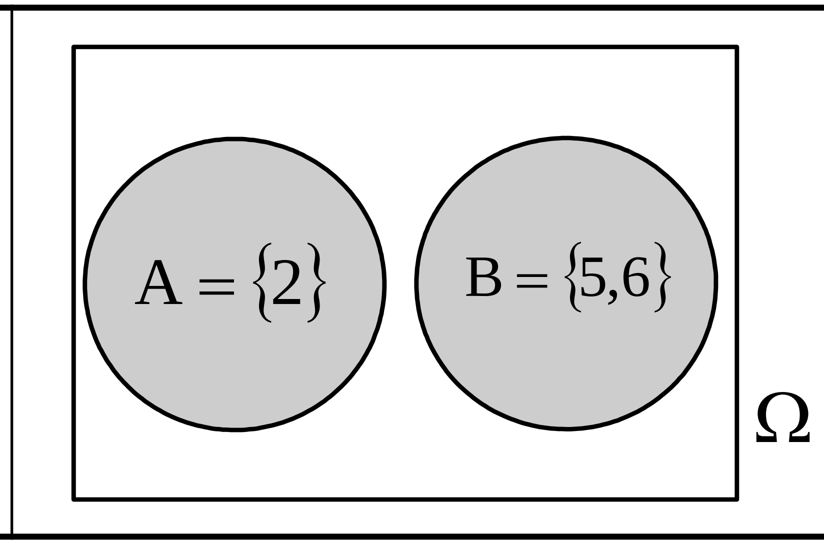
Beispiel 4.1:

P(A) ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfelwurf eine „2“ (Ereignis A) zu werfen, und P(B) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B = {5,6}. Da beide Ereignisse disjunkt sind, also keine Schnittmenge aufweisen, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A oder B eintritt nach Axiom 3 als Summe beider Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$P(A \cup B) = P(\{2,5,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) + P(B) = P(\{2\}) + P(\{5,6\})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$$



Axiome und relative Häufigkeiten

Die Axiome sind eine Präzisierung unserer Erfahrung, was man insbesondere bei einem Vergleich mit dem statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff sieht.

Bei allen drei Axiomen lässt sich ein Bezug zu den Eigenschaften der relativen Häufigkeiten herstellen:

1. $h(A) = n(A) / n \geq 0$
2. $h(\Omega) = n(\Omega) / n = 1$
3. $n(A \cup B) / n = n(A) / n + n(B) / n$, falls $A \cap B = \emptyset$

   oder

   $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$

4.2 Einige Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich deduktiv aus dem Axiomensystem herleiten. Man gewinnt auf diese Weise Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten.

- **Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses**

Die **Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses** $P(\overline{A})$ berechnet sich durch

(4.1) $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$,

da entweder A oder $\overline{A}$ eintritt.

Beispiel 4.2:

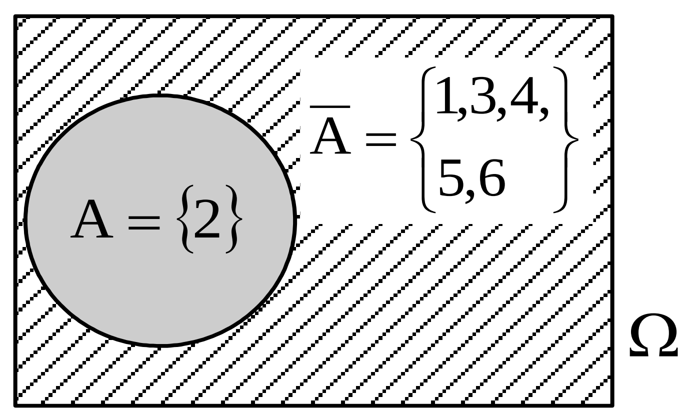
A sei das Ereignis, eine „2“ beim einmaligen Würfelwurf zu würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis $\overline{A}$?

1. Lösungsweg:

$$P(\overline{A}) = P(\{1,3,4,5,6\}) = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

2. Lösungsweg: mit $P(A) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833$$



♦

• Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses

Die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis $\varnothing$ ist gleich 0:

(4.2) $P(\varnothing) = 0.$

Da $\varnothing$ das Komplementärereignis zu Ω ist, gilt

$$\begin{aligned} P(\phi \cup \Omega) &= P(\Omega) && \text{und} \\ P(\phi) + P(\Omega) &= P(\Omega) && \text{und} \\ P(\phi) + 1 &= 1, && \text{d.h. } P(\phi) = 0\,. \end{aligned}$$

• Wahrscheinlichkeit eines Teilereignisses

Wenn A Teilereignis von B ist, $A \subset B$, gilt

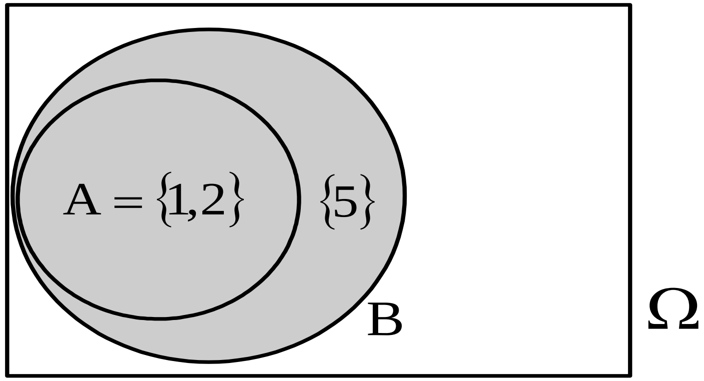
(4.3) $P(A) \leq P(B).$

Beispiel 4.4:

Wir betrachten beim Würfelwurf die beiden Ereignisse A = {1, 2} und B = {1, 2, 5}.

$P(A) = \frac{2}{6}$ und $P(B) = \frac{3}{6}$

$P(A) \leq P(B)$ da $A \subset B$



● Wahrscheinlichkeit für die Differenz von A und B

> Die **Wahrscheinlichkeit für die Differenz von A und B**, $P(A\backslash B)$, ist durch
>
> (4.4) $\quad P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$
>
> gegeben.

Beweis:
Es ist $A = (A\backslash B) \cup (A\cap B)$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A ist gleich $P(A) = P[(A\backslash B) \cup (A\cap B)]$. Da $A\backslash B$ und $A\cap B$ disjunkt sind, kann Axiom 3 angewendet werden, womit man

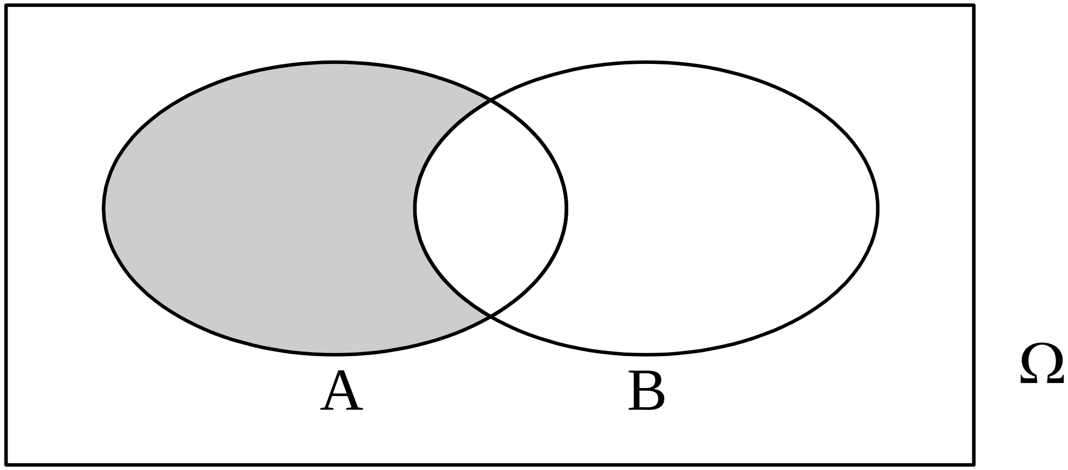
$$P(A) = P(A\backslash B) + P(A\cap B)$$

und damit

$$P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$$

erhält. □

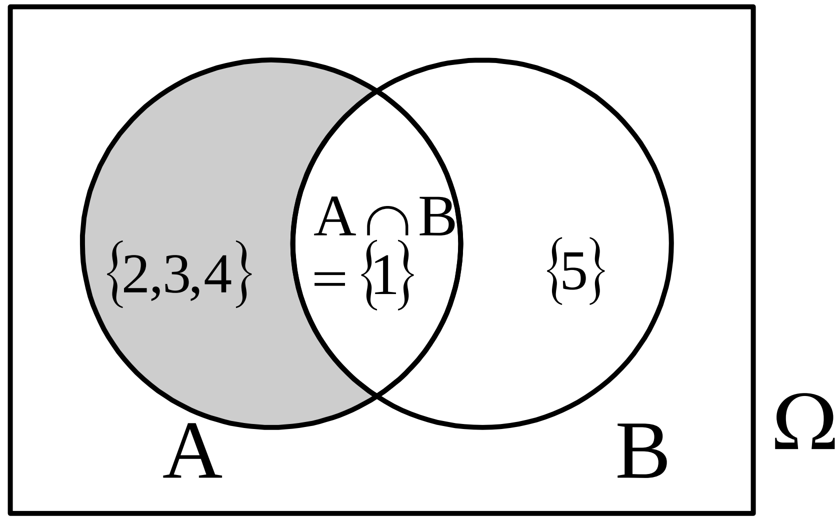
Abbildung: Venn-Diagramm für das Differenzereignis A\B



Beispiel 4.5:

Es seien A = {1, 2, 3, 4} und B = {1, 5} Ereignisse beim Würfelwurf, so ist die Schnittmenge zwischen beiden Ereignissen nicht leer. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für A ohne B?

$$
\begin{aligned}
P(A \backslash B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(\{1,2,3,4\}) - P(\{1\}) \\
&= \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5
\end{aligned}
$$



♦

- **Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von zwei Ereignissen**

Betrachtet wird nun die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung beliebiger Ereignisse. Man beachte, dass Axiom 3 nur für disjunkte Ereignisse gilt.

Additionssatz für zwei Ereignisse

Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, $P(A \cup B)$, ist gleich der Summe beider Einzelwahrscheinlichkeiten, vermindert um die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$:

(4.5) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Beweis:

$A \cup B$ wird als Vereinigung disjunkter Ereignisse geschrieben, um Axiom 3 anwenden zu können. Es ist

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A)$$

Da A und B\A disjunkt sind, kann Axiom 3 angewendet werden:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A),$$

woraus sich (4.5) ergibt, wenn für $P(B \backslash A)$ die Formel (4.4) für das Differenzereignis verwendet wird. □

Gleichung (4.5) gibt den Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse an. Im Fall disjunkter Ereignisse ist $P(A \cap B) = 0$, womit $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ folgt. Damit ergibt sich kein Widerspruch zu Axiom 3. Man beachte, dass zur Berechnung von $P(A \cup B)$ die Kenntnis von $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$ erforderlich ist. Wenn A und B disjunkt sind, dann, aber auch nur dann, reicht die Kenntnis von $P(A)$ und $P(B)$ aus, um $P(A \cup B)$ zu berechnen.

Beispiel 4.6:

Gegeben sind die beiden Ereignisse A = {1, 2, 3, 4} und B = {1, 5} beim Würfelwurf. Um die Schnittmenge A∩B = {1} nicht doppelt zu zählen, muss bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge abgezogen werden.

1. Lösungsweg (logische Überlegung):

Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintreten wird, ist

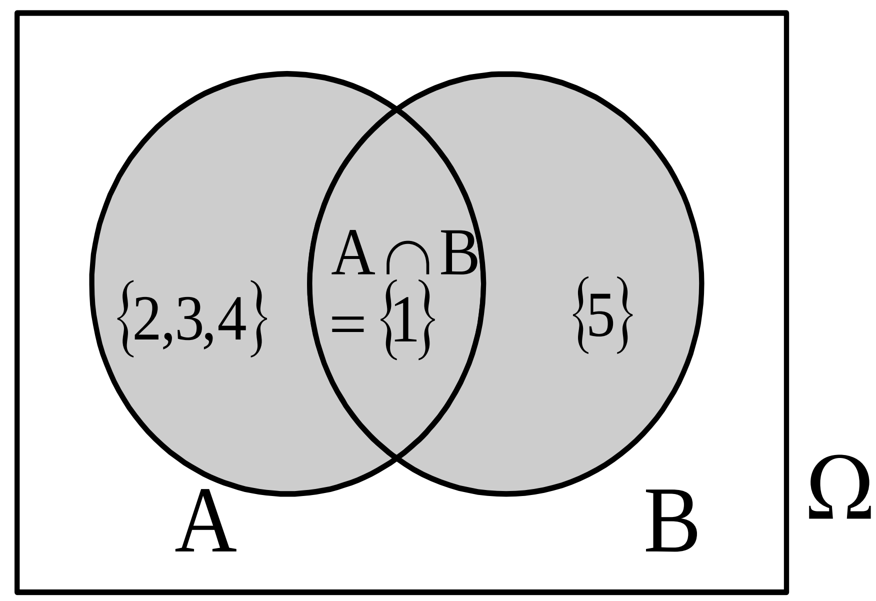
$$P(A \cup B) = P(\{1,2,3,4,5\}) = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

2. Lösungsweg (Additionssatz):

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$



♦

Beispiel 4.7:

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kartenspiel mit 32 Karten eine rote Karte oder ein Ass gezogen werden. Es sei

A: die gezogene Karte ist rot.
B: die gezogene Karte ist ein Ass.

Dann ist

$$P(A) = 16/32; \quad P(B) = 4/32 \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = 2/32$$

Mit dem Additionssatz (4.5) erhält man

$$P(A \cup B) = 16/32 + 4/32 - 2/32 = 18/32 = 0{,}5625$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Karte oder ein Ass zu ziehen, beträgt somit 0,5625.

♦

• Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von drei Ereignissen

Additionssatz für drei Ereignisse

Es seien A, B und C Ereignisse und $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ sowie $P(A \cap B \cap C)$ gegeben. Dann ergibt sich die **Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von A, B und C** durch

(4.6) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Beispiel 4.8:

Bei einem Würfelwurf werden die Ereignisse

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ und $C = \{4, 5, 6\}$

betrachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder C eintritt?

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,5$

$A \cap B = \{2, 4\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/3$

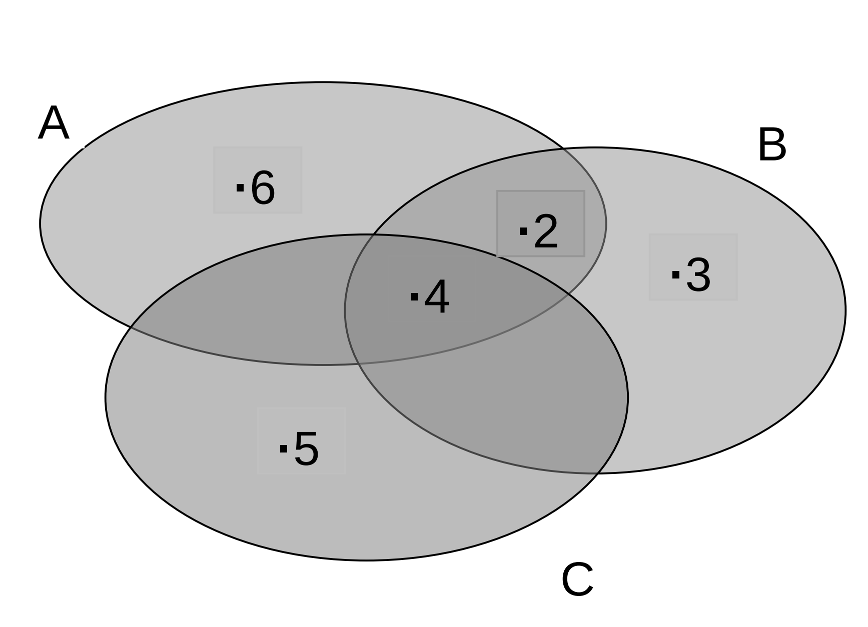
$A \cap C = \{4, 6\} \rightarrow P(A \cap C) = 1/3$

$B \cap C = \{ 4 \} \rightarrow P(B \cap C) = 1/6$

$A \cap B \cap C = \{ 4 \} \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 1/6$

Wahrscheinlichkeit von A oder B oder C:

$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B) - P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C) = 0,5 + 0,5 + 0,5 - 1/3 - 1/3 - 1/6 + 1/6 = 5/6 = 0,833$



♦

4.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

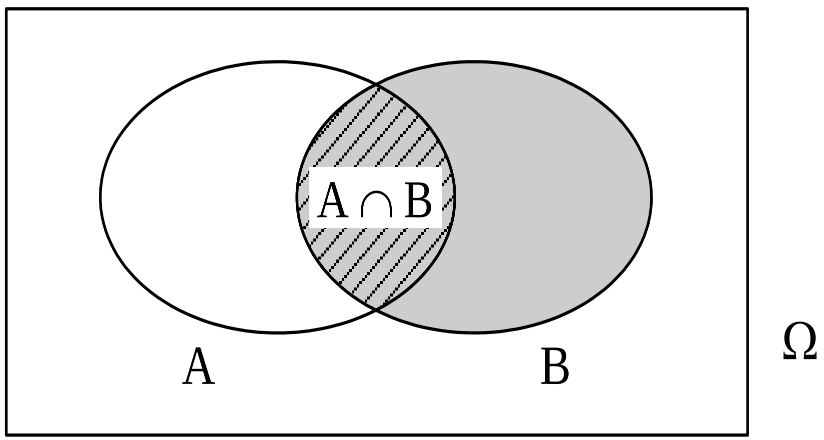
Bisher haben wir die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignissen unabhängig von der Realisation anderer Ereignisse betrachtet. Wir fragen nun, ob sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A ändert, wenn wir die zusätzliche Information haben, dass ein Ereignis B bereits eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeit für A, die sich unter dieser Vorabinformation ergibt, heißt bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B).

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** P(A|B) gibt die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung (Vorabinformation), dass **B bereits eingetreten** ist, an:

(4.7) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Wenn B bereits eingetreten ist; können außerhalb von B liegende Ereignisse nicht mehr stattfinden. Dass gemeinsam mit B auch A eintritt, ist durch die Schnittmenge $A \cap B$ dargestellt. Daher gibt |B| die Anzahl der möglichen Ergebnisse und $|A \cap B|$ die Anzahl der günstigen Ergebnisse an:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Beispiel 4.10:

In einer Stadt X sind 52% der 60 Tsd. Erwerbspersonen männlich und 48% weiblich. 3,24 Tsd. Personen sind arbeitslos (Ereignis A), worunter 1,31 Tsd. männlich (M) und 1,93 Tsd. weiblich (W) sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Erwerbsperson in der Stadt X arbeitslos ist?

Gesucht ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit, arbeitslos (A) zu sein, d.h. P(A):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3{,}24}{60} = 0{,}054.$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann arbeitslos ist?

Die Grundgesamtheit der Erwerbspersonen Ω wird jetzt auf die männlichen Erwerbspersonen M eingeschränkt. Gesucht ist daher die bedingte Wahrscheinlichkeit arbeitslos (A) zu sein unter der Bedingung eine männliche Erwerbsperson (M) zu sein:

$$P(A|M) = \frac{|A \cap M|}{|M|} = \frac{1{,}31}{60 \cdot 0{,}52} = \frac{1{,}31}{31{,}2} = 0{,}042.$$

oder mit $P(M) = 0{,}52$ und $P(A \cap M) = |A \cap M|/|\Omega| = 1{,}31/60 = 0{,}022$

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0.022}{0{,}52} = 0{,}042.$$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Frau arbeitslos ist?

Die Grundgesamtheit der Erwerbspersonen Ω wird jetzt auf die weiblichen Erwerbspersonen W eingeschränkt. Gesucht ist daher die bedingte Wahrscheinlichkeit arbeitslos (A) zu sein unter der Bedingung eine weibliche Erwerbsperson (W) zu sein:

$$P(A|W) = \frac{|A \cap W|}{|W|} = \frac{1{,}93}{60 \cdot 0{,}48} = \frac{1{,}93}{28{,}8} = 0{,}067.$$

oder mit P(W) = 0,48 und P(A∩W) =|A∩W|/|Ω| = 1,93/60 = 0,032

$$P(A|W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{0{,}032}{0{,}48} = 0{,}067.$$ ♦

Beispiel 4.9:

Bei einer Qualitätskontrolle haben von 60 kontrollierten Stücken 15 den Defekt A und 12 den Defekt B. 38 Stück bieten keinen Anlass zur Beanstandung. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stück, das den Defekt A aufweist, auch den Defekt B hat.

Insgesamt sind 22 (= 60 – 38) Stück defekt. Haben 15 Teile den Defekt A und 12 Stück den Defekt B, müssen (15 + 12) – 22 = 5 Teile gleichzeitig den Defekt A und den Defekt B haben. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

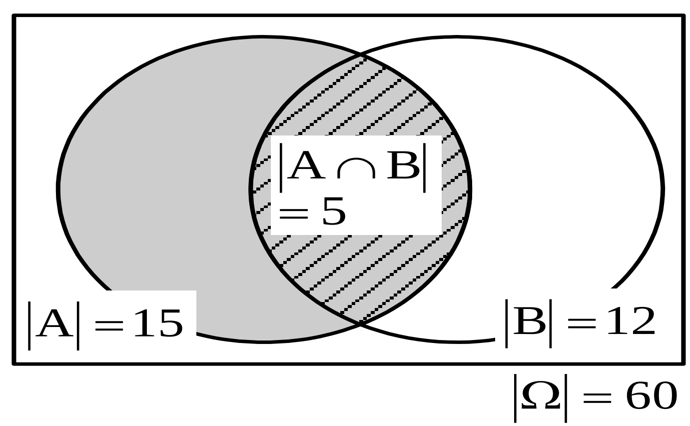
$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{15}{60}=0{,}25\,,\qquad P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{12}{60}=0{,}20\,,\qquad P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{5}{60}=0{,}083$$

Wir wissen, dass das Ereignis A "Teil hat den Defekt A" bereits eingetreten ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zusätzlich noch B "Teil hat den Defekt B" eintritt. Hierbei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung von A, d.h. P(B|A).

$$P(B\mid A)=\frac{|A\cap B|}{|A|}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}=0{,}333$$

oder

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}083}{0{,}25}=0{,}333$$

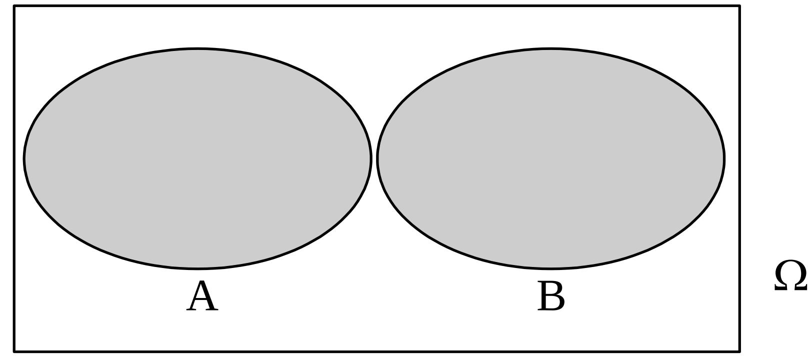


♦

In (4.7) muss $P(B) > 0$ sein, da für $P(B) = 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht definiert ist. Für bedingte Wahrscheinlichkeiten gelten folgende Aussagen:

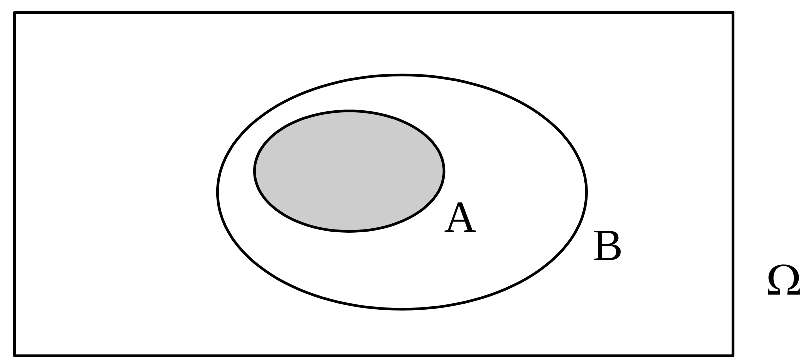
- Sind A und B disjunkt, $A \cap B = \emptyset$, dann ist $P(A|B) = 0$.

Wenn die Ereignisse A und B elementefremd sind, d.h. sich nicht überlappen, kann A nicht mehr eintreten, wenn B bereits eingetreten ist.



- Ist A ein Teilereignis von B, $A \subset B$, dann ist $P(B|A) = 1$.

Wenn A ein Teilereignis von B ist, tritt B stets zugleich ein, sobald A eingetreten ist.



Eine überaus wichtige Folgerung ergibt sich, wenn die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit einfach umgestellt wird. Man erhält dann den **Multiplikationssatz für zwei Ereignisse**.

Multiplikationssatz für zwei Ereignisse

Die **Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B** lässt sich durch

(4.8a) $$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

oder

(4.8b) $$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

berechnen.

Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A \cap B$ zweier Ereignisse, $P(A \cap B)$, ist auch zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von zwei beliebigen Ereignissen und zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Differenz A\B zweier beliebiger Ereignisse, P(A\B), notwendig.

Beispiel 4.10:

In einer Urne befinden sich 12 Kugeln, 4 davon sind weiß und 8 rot. Zwei Kugeln werden gezogen, wobei die entnommenen Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt werden (Ziehen ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Kugeln zu ziehen?

Wir definieren die Ereignisse:
A_1: die erste gezogene Kugel ist weiß,
A_2: die zweite gezogene Kugel ist weiß.

In jeder der zwei Ziehungen gilt das Gleichmöglichkeitsmodell. Es ist

$$P(A_1) = 4/12 = 1/3$$

da vor der 1. Ziehung unter den 12 Kugeln 4 weiße Kugeln sind. Die Wahrscheinlichkeit, im 2. Zug eine weiße Kugel zu ziehen, ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, d.h., ist die Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass im 1. Zug eine weiße Kugel gezogen wurde. Es ist

$$P(A_2 | A_1) = 3/11$$

da vor der zweiten Ziehung unter den 11 Kugeln nur noch 3 weiße Kugeln sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei weiße Kugeln zu ziehen, ist also gleich

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = 1/3 \cdot 3/11 = 3/33 = 1/11 = 0{,}091.$$

Man beachte, dass diese Wahrscheinlichkeit abhängig von der Ziehungsmethode ist. Würde nach dem ersten Zug die entnommene Kugel in die Urne zurückgelegt (Ziehen mit Zurücklegen), wäre $P(A_2|A_1) = 4/12 = 1/3$ und damit

$$P(A_1 \cap A_2) = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9 = 0{,}111. \qquad \blacklozenge$$

Multiplikationssatz für drei Ereignisse

Die **Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A, B, und C** ist durch

(4.9) $$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)$$

gegeben.

Beweis:

Es sei $D = A \cap B$. Dann gilt mit (4.8)

$$P(C \cap D) = P(C|D) \cdot P(D)$$

und nach Einsetzen von $A \cap B$ für D

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B).$$

Wegen (4.8) ist

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A),$$

so dass

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)$$

folgt. ∎

Beispiel 4.11:

In einer Schachtel sind 10 Schrauben, 4 davon sind verzinkt. Drei Schrauben werden entnommen, wobei die gezogenen Schrauben nicht in die Schachtel zurückgelegt werden (Ziehen ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei verzinkte Schrauben zu ziehen?

Wir definieren die Ergebnisse
A_1 = erste Schraube ist verzinkt,
A_2 = zweite Schraube ist verzinkt,
A_3 = dritte Schraube ist verzinkt.

In jeder der drei Ziehungen gilt das Gleichmöglichkeitsmodell. Es ist

$$P(A_1) = 4/10 = 2/5$$

da von den 10 Schrauben 4 verzinkt sind. Die Wahrscheinlichkeit, im 2. Zug eine verzinkte Schraube zu ziehen, ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A_2|A_1) = 3/9 = 1/3$$

denn vor dem 2. Zug sind von den 9 verbleibenden Schrauben nur noch 3 verzinkt. Die Wahrscheinlichkeit, im 3. Zug eine verzinkte Schraube zu ziehen, wird ermittelt unter der Bedingung, dass im 1. Zug und im 2. Zug eine verzinkte Schraube gezogen wurde, d.h., dass $A_1 \cap A_2$ bereits eingetreten ist. Damit erhält man

$$P(A_3|A_2 \cap A_1) = 2/8 = 1/4 \quad ,$$

da vor dem 3. Zug unter den 8 verbliebenen Schrauben nur noch zwei verzinkte sind. Die Wahrscheinlichkeit, drei verzinkte Schrauben zu erhalten, ist also wegen (4.9)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 | A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= 1/4 \cdot 1/3 \cdot 2/5 = 1/30 = 0{,}033.$$

Auch hier sieht man, dass diese Wahrscheinlichkeit abhängig von der Ziehungsmethode ist. Hätten wir nach jedem Zug die entnommene Schraube in die Schachtel zurückgelegt (Ziehen mit Zurücklegen), würde

$$P(A_2 | A_1) = P(A_3 | A_2 \cap A_1) = 4/10 = 2/5$$

sein, da vor jedem Zug von den 10 Schrauben 4 verzinkt sind, so dass

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2/5 \cdot 2/5 \cdot 2/5 = 8/125 = 0{,}064$$

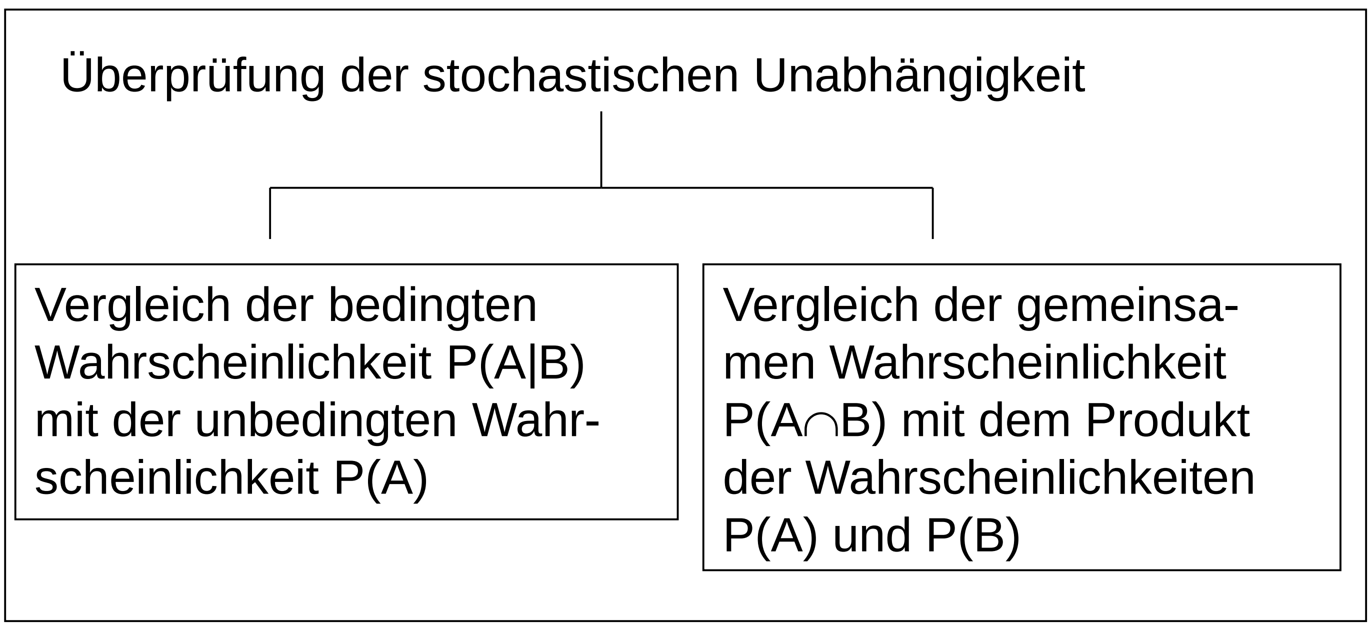
ist. Wenn wir mit Zurücklegen ziehen, dann spielt es z.B. für das Eintreten des Ereignisses A_2 keine Rolle, was im 1. Zug (Ereignis A_1) gezogen wurde. Das Ziehen einer verzinkten Schraube im 1. Zug ändert also nicht die Chance für das Ziehen einer verzinkten Schraube im 2. Zug. Die Bedingung, dass A_1 eingetreten ist, ist somit irrelevant für die Realisierungschance von A_2. ♦

4.4 Stochastische Unabhängigkeit

Bei vielen Fragestellungen ist es wichtig zu wissen, ob Ereignisse stochastisch unabhängig sind. Man kann die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen auf zwei Arten überprüfen:

- durch Vergleich von bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten,
- anhand des Multiplikationssatzes für unabhängige Ereignisse.

Abbildung: Überprüfung der stoschastischen Unabhängigkeit



● **Überprüfung der Unabhängigkeit zweier Ereignisse durch Vergleich der bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten**

> Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** voneinander, wenn die Tatsache, dass B vorliegt, keinerlei zusätzliche Informationen im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit P(A) liefert:
>
> (4.10a) P(A|B) = P(A).

Bei stochstischer Unabhängigkeit ist es also unerheblich für das Eintreten des Ereignisses A, ob das Ereignis B eingetreten ist oder nicht:

$$\underbrace{\left[\frac{|A \cap B|}{|B|} =\right] P(A \mid B)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn B eingetreten ist}}} = \underbrace{P(A)\left[= \frac{|A|}{|\Omega|} =\right]}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn nicht bekannt ist,} \\ \text{ob B eingetreten ist}}} \quad \Rightarrow \quad \text{Unabhängigkeit}$$

Stochastische Abhängigkeit besteht entsprechend dann, wenn das Eintreten von B einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von A hat:

$$\underbrace{\left[\frac{|A \cap B|}{|B|} =\right] P(A \mid B)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn B eingetreten ist}}} \neq \underbrace{P(A)\left[= \frac{|A|}{|\Omega|} =\right]}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn nicht bekannt ist,} \\ \text{ob B eingetreten ist}}} \quad \Rightarrow \quad \text{Abhängigkeit}$$

Wenn die beiden Ereignisse A und B **voneinander unabhängig** sind, muss nicht nur

(4.10a) P(A|B) = P(A)

gelten, sondern ebenfalls

(4.10b) P(B|A) = P(B).

● **Überprüfung der Unabhängigkeit zweier Ereignisse durch Vergleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten**

Multiplikationssatz für zwei unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** voneinander, wenn die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A \cap B$, $P(A \cap B)$, gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten P(A) und P(B) ist:

(4.11a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Beweis:

Durch Auflösen der Berechnungsformel für die bedingten Wahrscheinlichkeiten (4.7) nach $P(A \cap B)$ erhält man

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) \;.$$

Da bei Unabhängigkeit von A und B die Beziehung (4.10a), P(A|B) = P(A), gilt, folgt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \;.$$

أ

Abbildung: Überprüfung stochastischer Unabhängigkeit

Beleg für…

Stochastische Unabhängigkeit	**Stochastische Abhängigkeit**
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
$P(A) = P(A \mid B)$	$P(A) \neq P(A \mid B)$
$P(B) = P(B \mid A)$	$P(B) \neq P(B \mid A)$

Während die **stochastische Unabhängigkeit** zweier Ereignisse bei Kenntnis der bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten auf der Grundlage der Beziehung (4.10a) oder (4.10b) überprüft werden kann, lässt sie sich mit dem Multiplikationssatz (4.11) überprüfen, wenn die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge und die Einzelwahrscheinlichkeiten bekannt sind.

Beispiel 4.12:

Bei dem Zufallsexperiment „Werfen zweier Würfel“ werden zwei Ereignisse betrachtet:

A: "gleiche Augenzahl bei beiden Würfeln" und
B: "ungerade Augenzahl bei dem zweiten Würfel".

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine "gleiche Augenzahl" bei beiden Würfeln und gleichzeitig eine "ungerade Augenzahl beim zweiten Würfeln" zu erhalten? Sind beide Ereignisse unabhängig voneinander?

Anhand der in der folgenden Tabelle lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse bestimmen:

2. Würfel / 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

P(A) = P("gleiche Augenzahl bei beiden Würfeln") $=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

P(B) = P("ungerade Augenzahl beim zweiten Würfel") $=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

P(A∩B) = P("gleiche Augenzahl" und "ungerade Augenzahl beim zweiten Würfel")

$$=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Die stochastische Unabhängigkeit kann hier auf die beiden vorgestellten Arten überprüft werden:

1. Überprüfung der Unabhängigkeit durch Vergleich der bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\left[P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}=0{,}50\right]=\left[P(B)=0{,}50\right]\Rightarrow \text{ Unabhängigkeit}$$

und

$$\left[P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\right]=\left[P(A)=\frac{1}{6}\right]\Rightarrow \text{ Unabhängigkeit}$$

2. Überprüfung der Unabhängigkeit durch Vergleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$\left[P(A \cap B) = \frac{1}{12}\right] = \left[P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}\right] \Rightarrow \quad \text{Unabhängigkeit}$$ ♦

● **Vollständige Unabhängigkeit von drei Ereignissen**

Die Ereignisse A, B und C heißen **vollständig unabhängig** voneinander, wenn sie **paarweise unabhängig** sind,

(4.11a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

(4.11b) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$,

(4.11c) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$,

und die Bedingung

(4.12) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

erfüllen.

Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen ist somit eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die vollständige Unabhängigkeit von Ereignissen.

Beispiel 4.13:

Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir definieren die Ereignisse

A: Augenzahl beim 1. Würfel ist gerade.
B: Augenzahl beim 2. Würfel ist ungerade.
C: Augensumme gerade.

Dann ist

$$P(A) = 18/36 = 1/2,\ P(B) = 18/36 = 1/2,\ P(C) = 18/36 = 1/2,$$
$$P(A \cap B) = 9/36 = 1/4,\ P(A \cap C) = 9/36 = 1/4,\ P(B \cap C) = 9/36 = 1/4,$$
$$P(A \cap B \cap C) = 0.$$

Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten lässt sich leicht anhand der in Beispiel 4.12 wiedergegebenen Ergebnistabelle nachvollziehen. Es ist z.B. $A \cap B \cap C = \varnothing$ und damit $P(A \cap B \cap C) = 0$, weil $A \cap B$ das Ereignis ist, dass der 1. Würfel eine gerade und der 2. Würfel eine ungerade Augenzahl aufweist. Als Ergebnis kann dann aber keine gerade Augensumme eintreten.

Wir wollen nun die Unabhängigkeit der Ereignisse A, B und C überprüfen. Zunächst einmal ist eine **paarweise Unabhängigkeit** der Ereignisse wegen

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1/4 = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ P(A \cap C) &= 1/4 = P(A) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ P(B \cap C) &= 1/4 = P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \end{aligned}$$

gegeben.

Für die vollständige Unabhängigkeit ist noch die Gültigkeit der Bedingung (4.12) erforderlich. Es ist jedoch

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Somit sind die Ereignisse A, B und C zwar **paarweise unabhängig**, aber **nicht vollständig unabhängig**. ♦

4.5 Totale Wahrscheinlichkeit und Bayessche Formel

● Totale Wahrscheinlichkeit

Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit geht von einem **vollständigen System von Ereignissen** aus, das allgemein durch

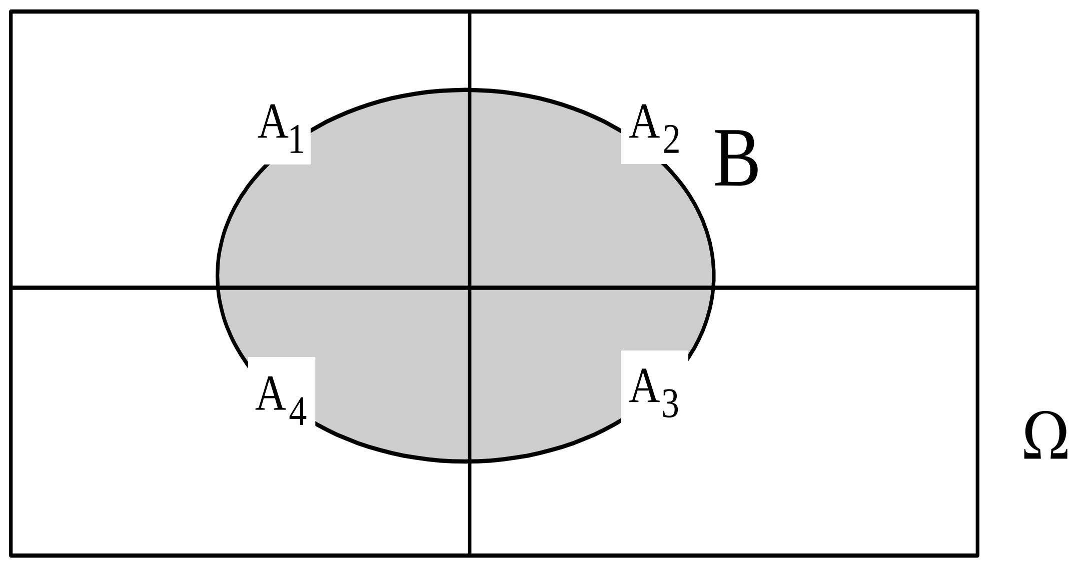
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega \qquad (4.13)$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

definiert ist.

Abbildung: Zerlegung der Ergebnismenge

Das Ereignis B lässt sich als Vereinigung der Schnittereignisse $B \cap A_i$ darstellen:

(4.14) $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$



Da die Schnittereignisse $B \cap A_i$ disjunkt sind,

$$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing, \quad i \neq j,$$

lässt sich die Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$$

unter Verwendung des Axioms 3 in der Form

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

schreiben. Die Wahrscheinlichkeiten $P(B \cap A_i)$ lassen sich bei Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$ und den unbedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ mit dem Multiplikationssatz (4.8a/b) berechnen:

(4.15a) $$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

oder

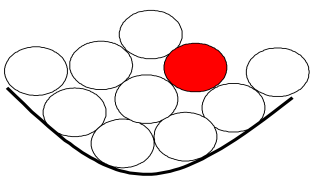
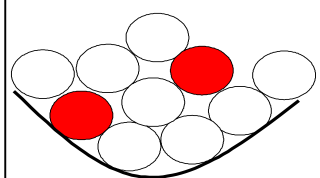
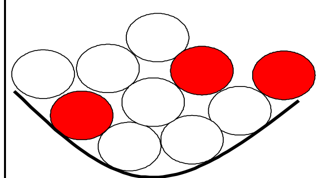
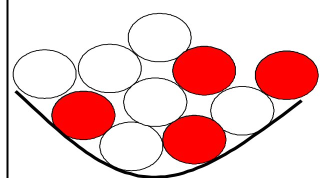
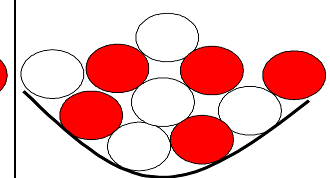
(4.15b) $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Gleichung (4.15a/b) gibt die **Formel der totalen Wahrscheinlichkeit** wieder.

Beispiel 4.14:

Gegeben sind 5 Urnen. Jede Urne enthält 10 Kugeln. In der j-ten Urne, j=1,2,3,4,5, befinden sich j rote Kugeln. Eine Urne wird unter Berücksichtigung der Auswahlwahrscheinlichkeiten 0,4 für die Urne 1, 0,3 für die Urne 2, 0,1 für die Urne 3, 0,2 für die Urne 4 und 0 für die Urne 5 ausgewählt, aus der dann eine Kugel gezogen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel rot ist?
Wir definieren die Ereignisse:

A_j: Auswahl der j-ten Urne, j = 1,2,3,4,5,
B: Die gezogene Kugel ist rot.

Urne 1	Urne 2	Urne 3	Urne 4	Urne 5
				
Auswahlwahrscheinlichkeit für die j-te Urne				
$P(A_1) = 0{,}4$	$P(A_2) = 0{,}3$	$P(A_3) = 0{,}1$	$P(A_4) = 0{,}2$	$P(A_5) = 0$
Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rote Kugel gezogen wird, wenn die j-te Urne bereits ausgewählt wurde				
$P(B \mid A_1) = 1/10$ $= 0{,}1$	$P(B \mid A_2) = 2/10$ $= 0{,}2$	$P(B \mid A_3) = 3/10$ $= 0{,}3$	$P(B \mid A_4) = 4/10$ $= 0{,}4$	$P(B \mid A_5) = 5/10$ $= 0{,}5$

Da die Ereignisse A_j ein vollständiges System von Ereignissen bilden,

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5 = \Omega$ (5 Urnen sind verfügbar)

$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ (Keine Kugel ist mehreren Urnen zugeordnet)

lässt sich zur Berechnung der der gesuchten Wahrscheinlichkeit P(B) mit der Formel (4.15) der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{5} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) \\ &\quad + P(B|A_3) \cdot P(A_3) + P(B|A_4) \cdot P(A_4) + P(B|A_5) \cdot P(A_5), \end{aligned}$$

so dass man

$$P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0 = 0{,}21$$

erhält. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, beträgt also 0,21. ♦

● Bayessche Formel

Angenommen, wir haben eine rote Kugel gezogen, d. h. das Ereignis B ist eingetreten. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der j-ten Urne A_i, i=1, 2, ..., 5, entnommen wurde, d. h. wir suchen $P(A_j|B)$. Die Lösung dieses Problems ergibt sich aus dem Satz von Bayes, den wir jetzt vorstellen werden.

> Die n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden ein vollständiges System. Weiter ist B ein Ereignis mit P(B)>0. Dann gilt der Satz von Bayes
>
> (4.16) $$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}, \; i = 1, \ldots, n$$

$P(A_i)$: A-priori-Wahrscheinlichkeit
$P(A_i|B)$: A-posteriori-Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe der Bayesschen Formel lassen sich die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i|B)$ aus den bekannten A-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ bestimmen.

Herleitung der Bayesschen Formel (4.16):

Nach (4.8a/b) lässt sich die Wahrscheinlichkeit des Schnittereignisses $A_i \cap B$ durch die beiden Gleichungen

(4.17a) $$P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B) \cdot P(B)$$

und

(4.17b) $$P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

wiedergeben. Unter Verwendung von (4.17b) können daher die in (4.7) definierte bedingte Wahrscheinlicheit

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

in der Form

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

darstellen. Nach Einsetzen der totalen Wahrscheinlichkeit (4.15b) erhält man hieraus die Bayessche Formel

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}$$

♦

Beispiel 4.15:

Wir knüpfen an das Beispiel 4.14 an und fragen nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene rote Kugel aus der zweiten Urne stammt?

Die Ereignisse A_i bilden ein vollständiges System von Ereignissen:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5 = \Omega$ (5 Urnen sind verfügbar)

$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$ (Keine Kugel ist mehreren Urnen zugeordnet).

Wir wissen, dass eine rote Kugel gezogen wurde, d.h. dass das Ereignis B eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zusätzlich das Ereignis A_2 eintritt? Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von A_2 unter der Bedingung B.

Da hier ein vollständiges System von Ereignissen vorliegt, lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Bayesschen Formel bestimmen:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{n=5} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0}$$

$$= \frac{0{,}06}{0{,}21} = 0{,}286.$$

♦