5. Zufallsvariablen und ihre Verteilung

5.1 Begriff der Zufallsvariablen

Bisher haben wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Sie bestehen aus einem oder mehreren **Ergebnissen eines Zufallsvorgangs**, die **nicht notwendig nummerisch** zu sein brauchen. So sind z.B. beim Münzwurf die Ausgänge „Kopf“ oder „Zahl“, während die Augenzahlen als Ergebnisse bei einem Würfelwurf bereits nummerisch sind.

Mit Hilfe einer durch eine **Zufallsvariable X** definierten **Funktionsvorschrift** lassen sich alle **Ergebnisse eines Zufallsvorgangs quantifizieren**. Durch die Funktionsvorschrift werden den Ausgängen eines Zufallsvorgangs reelle Zahlen zugeordnet.

Eine **Zufallsvariable X** ist also eine **Funktion (Abbildung)**, die den Ergebnissen ω der Ergebnismenge Ω reelle Zahlen zuordnet:

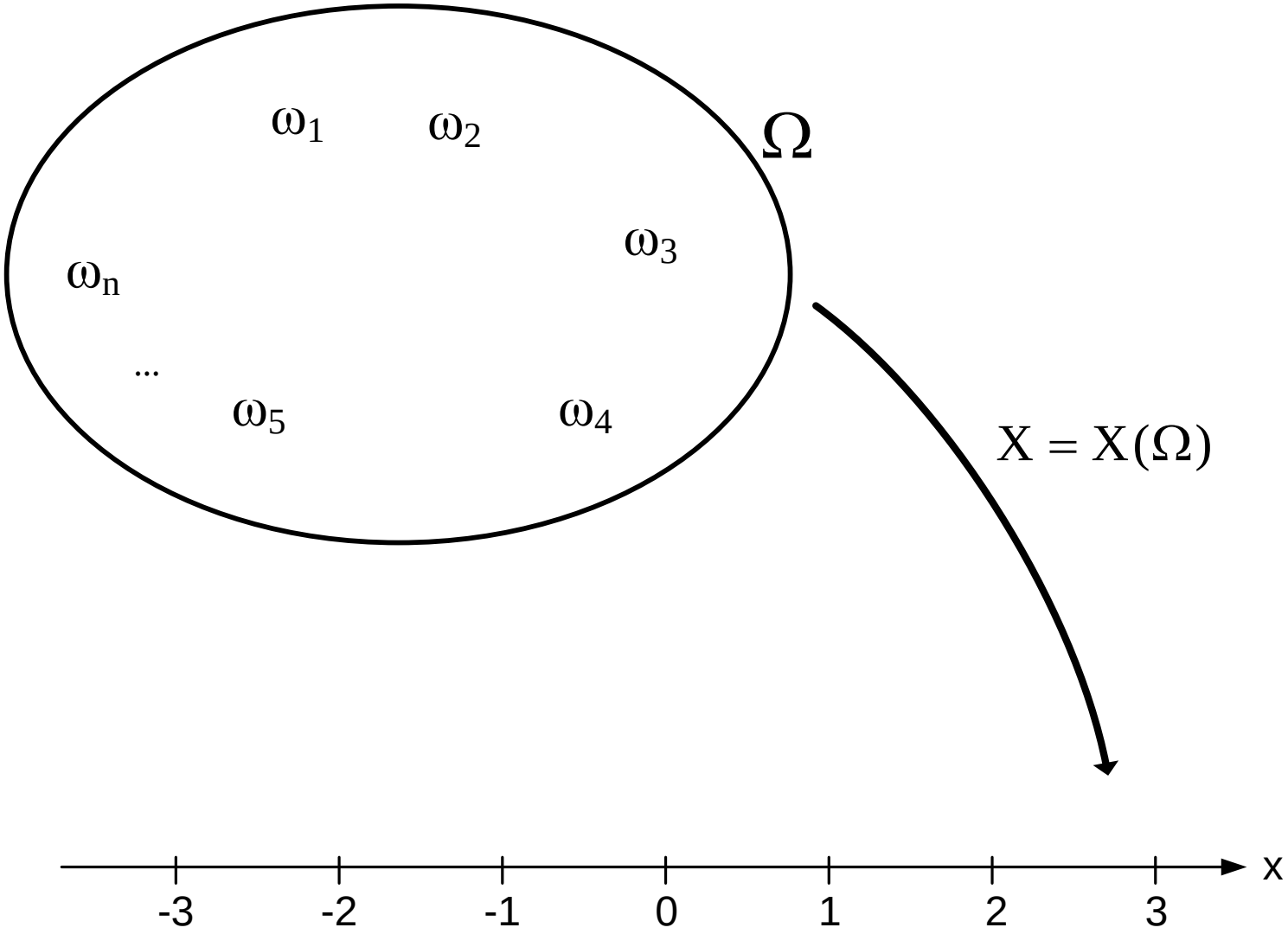
$$\mathbf{X: \Omega \rightarrow |R} \; .$$

Bei einem endlichen Stichprobenraum Ω ist die Zuordnung durch

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 & \text{für} \quad \omega = \omega_1 \\ x_2 & \text{für} \quad \omega = \omega_2 \\ \vdots & \\ x_n & \text{für} \quad \omega = \omega_n \end{cases}$$

gegeben, sofern die Abbildung umkehrbar eindeutig ist.

Abbildung: Konzept der Zufallsvariablen



Beispiel 5.1:

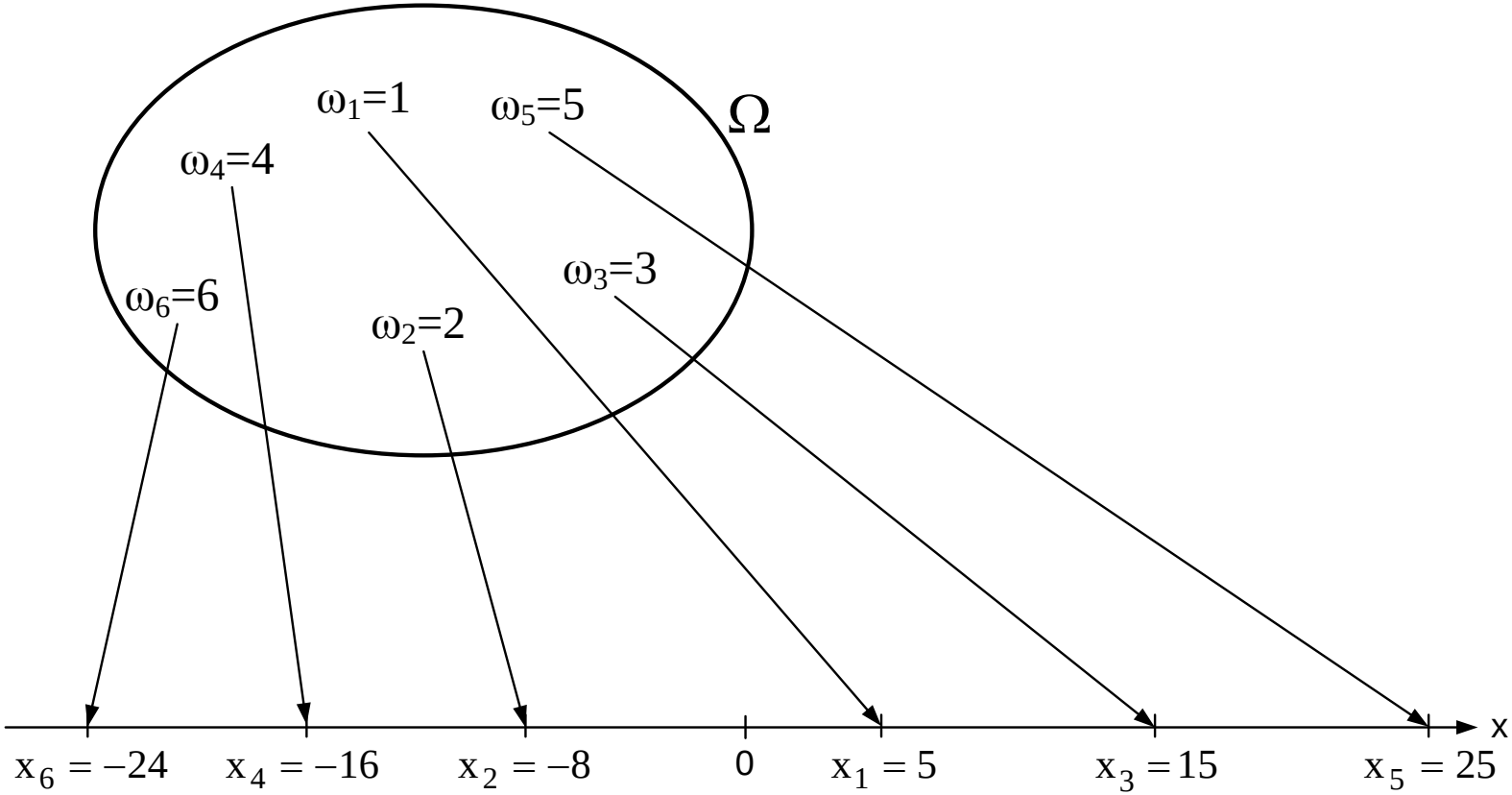
Zur Illustration greifen wir auf den einmaligen Würfelwurf zurück. Bei einem Glücksspiel gewinnt ein Spieler das Fünffache der gewürfelten ungeraden und verliert das Vierfache der geraden Augenzahl in Euro.

Wie ist dann die Zufallsvariable X „Gewinn“ definiert? Wird eine „1“ gewürfelt, dann gewinnt man 5 · 1 € = 5 €. Bei der Augenzahl „2" beträgt der Verlust 4 · 2 € = 8 €.

Die Zufallsvariable ordnet jeder Augenzahl einen bestimmten Gewinn zu:

$$X(\omega) = \begin{cases} -24 & \text{für} \quad \omega = 6 \\ -16 & \text{für} \quad \omega = 4 \\ -8 & \text{für} \quad \omega = 2 \\ +5 & \text{für} \quad \omega = 1 \\ +15 & \text{für} \quad \omega = 3 \\ +25 & \text{für} \quad \omega = 5 \end{cases}$$

Grafisch ist die Zuordnung des Gewinns zu den Augenzahlen des Würfels in der nachstehenden Abbildung wiedergegeben: :


Ω
ω1=1
ω5=5
ω4=4
ω3=3
ω6=6
ω2=2
x
x6 = −24
x4 = −16
x2 = −8
0
x1 = 5
x3 = 15
x5 = 25

♦

Beispiel 5.2:

Bei einer Qualitätskontrolle werden drei Teile aus einem Produktionsprozess entnommen. Dabei wird festgehalten, ob das Teil defekt ist (D) oder nicht ($\overline{D}$).

Die Ergebnismenge ist hier durch

$$\Omega = \{(DDD),(DD\overline{D}),(D\overline{D}D),(\overline{D}DD),(D\overline{D}\overline{D}),(\overline{D}D\overline{D}),(\overline{D}\overline{D}D),(\overline{D}\overline{D}\overline{D})\}$$

gegeben.

Gefragt ist nach der Anzahl der defekten Teile in der Stichprobe. Damit ist zugleich die Zufallsvariable X inhaltlich festgelegt. Formal ist die Zufallsvariable X durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \omega_1 = (\overline{D}\overline{D}\overline{D}) \\ 1 \quad \text{für} & \omega_2 = (\overline{D}\overline{D}D),\ \omega_3 = (\overline{D}D\overline{D}),\ \omega_4 = (D\overline{D}\overline{D}) \\ 2 \quad \text{für} & \omega_5 = (\overline{D}DD),\ \omega_6 = (D\overline{D}D),\ \omega_7 = (DD\overline{D}) \\ 3 & \text{für} \quad \omega_8 = (DDD) \end{cases}$$

definiert. ♦

● Diskrete und stetige Zufallsvariablen

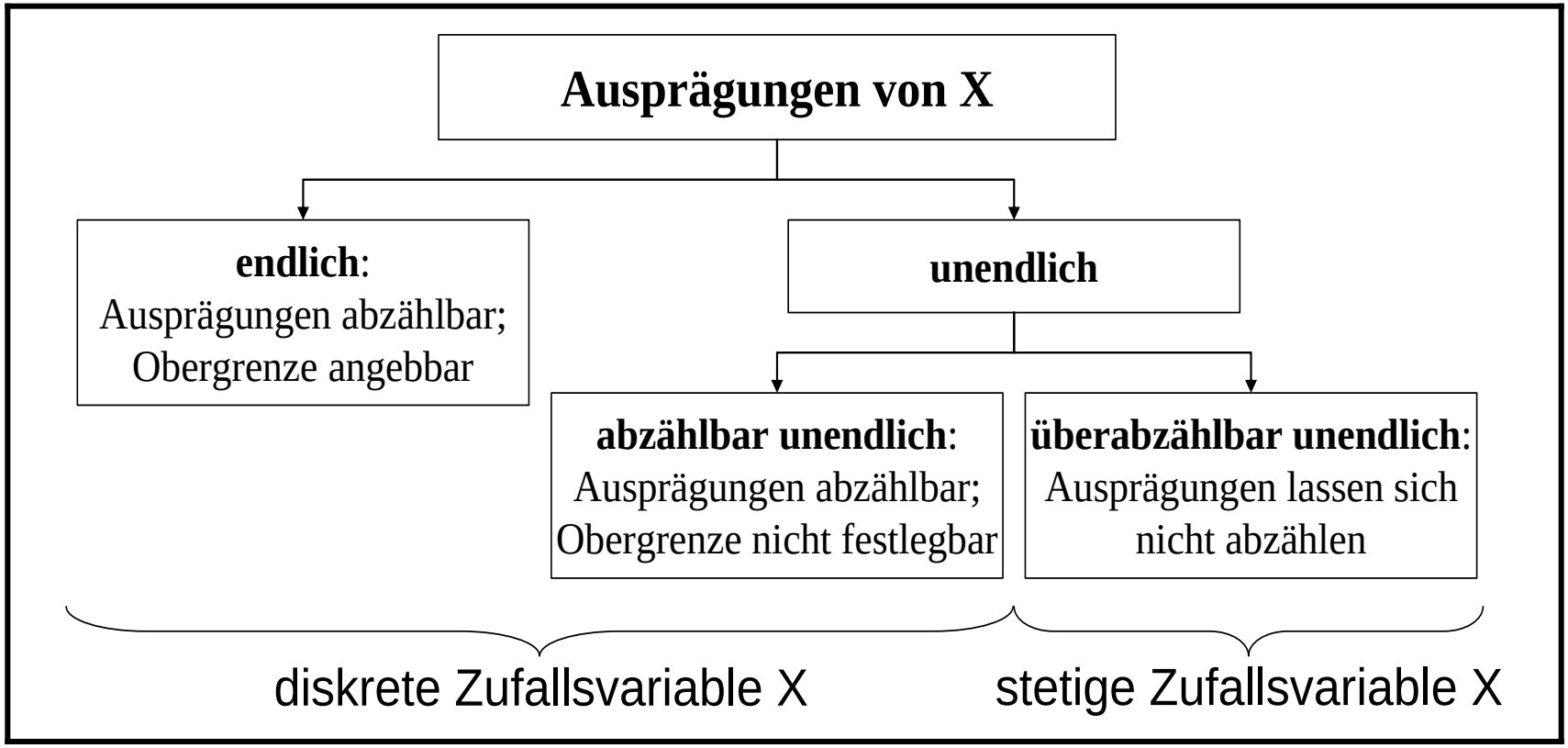
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen kann im Prinzip aus den Wahrscheinlichkeiten der aus einem Zufallsvorgang hervorgehenden Elementarereignisse gewonnen werden. Häufig lässt sich jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X direkt ohne diesen Rückgriff auf die zugrunde liegende Ergebnismenge angegeben werden.

In jedem Fall ist die Unterscheidung zwischen **diskreten und stetigen Zufallsvariablen** bei dem Arbeiten mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen relevant. Die Wahrscheinlichkeiten für stetige Zufallsvariablen werden nämlich vollständig anders berechnet als für diskrete Zufallsvariablen. Während man Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Zufallsvariable X Werte annimmt, die in einem bestimmten Intervall liegen im **diskreten Fall** durch **Summation** erhält, ergeben sie sich im **stetigen Fall** durch **Integration**.

Zufallsvariablen können **diskret** und **stetig** sein.

Wertebereich diskreter Zufallsvariablen: **endlich** oder **abzählbar unendlich**
Wertebereich stetiger Zufallsvariablen: **überabzählbar**

Abbildung: Diskrete und stetige Zufallsvariable



Beispiel 5.3: Diskrete Zufallsvariablen

- Die Zufallsvariable X bezeichnet die Augenzahl beim einmaligen Würfelwurf. Der Wertebereich der Zufallsvariablen X ist endlich, da X nur die Werte $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_6 = 6$ annehmen kann. X ist deshalb eine diskrete Zufallsvariable.

- Die Anzahl der Personen in einem Kaufhaus wird durch die Zufallsvariable X wiedergegeben. X hat abzählbar unendlich viele Ausprägungen, wenn keine Obergrenze angegeben werden kann. Die Zufallsvariable X ist daher diskret.

- X bezeichnet die Anzahl der Werkstücke, die eine Qualitätsnorm nicht erfüllen. Sofern die Produktion in einem vorgegebenen Zeitraum betrachtet wird, hat die Zufallsvariable endlich viele Ausprägungen, deren Obergrenze sich aus der Produktionsplanung ergibt. Auch hier liegt eine diskrete Zufallsvariable vor. ♦

Beispiel 5.4: Stetige Zufallsvariablen

- X ist die Wartezeit vor einem Postschalter. Die Zufallsvariable X hat überabzählbar viele Ausprägungen, die im Intervall [0,T] liegen, wobei T die Öffnungsdauer des Schalters ist. Die Zufallsvariable X ist folglich stetig.

- Die Zufallsvariable X bezeichnet die Dauer von Telefongesprächen. Da X überabzählbar viele Ausprägungen hat, liegt eine stetige Zufallsvariable vor. ♦

Abbildung: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable

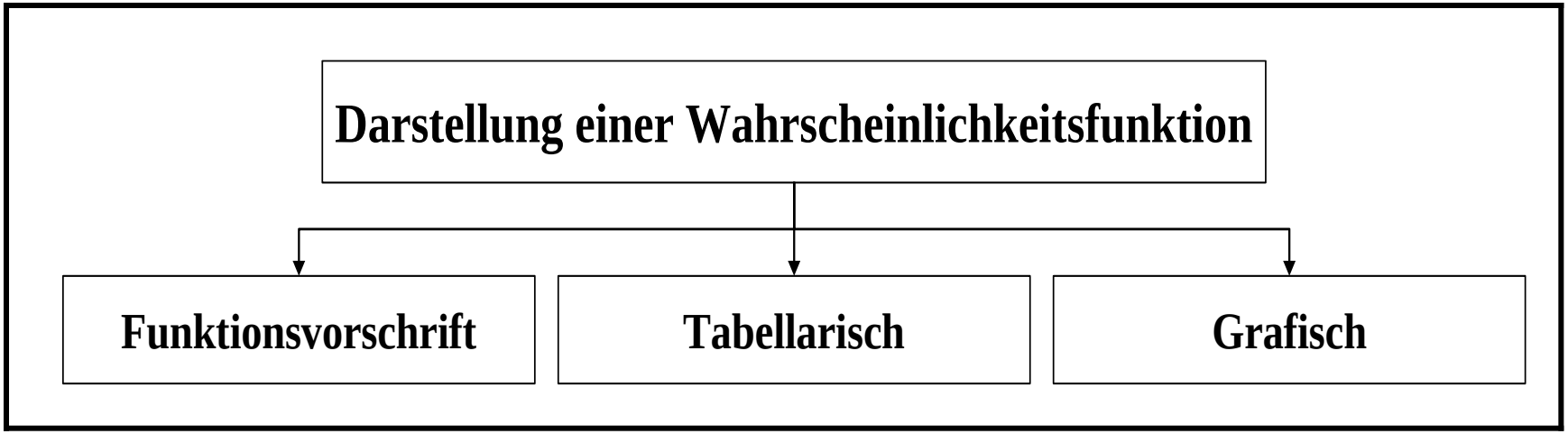
diskret: abzählbar viele Ausprägungen	**stetig:** überabzählbar viele Ausprägungen
Wahrscheinlichkeitsfunktion: Wahrscheinlichkeit für einen x-Wert	**Dichtefunktion:** Wahrscheinlichkeit für ein Intervall als Fläche unterhalb der Dichtefunktion
Verteilungsfunktion: Wahrscheinlichkeit, die sich bis zu einem x-Wert aufsummiert hat	**Verteilungsfunktion:** Wahrscheinlichkeit als Fläche, die sich bis zu einem x-Wert aufsummiert hat

5.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ordnet man den Ausprägungen x_j einer diskreten Zufallsvariablen X Wahrscheinlichkeiten p_j zu, dann erhält man eine **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f(x). $P(X = x_j)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable X den Wert x_j annimmt. Für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_j)$ verwenden wir meistens die Kurzschreibweise p_j.

Des besseren Verständnisses wegen gehen wir bei der Erörterung der Wahrscheinlichkeitsfunktion von einer endlichen Zufallsvariablen X mit m Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus. Die Verallgemeinerung auf unendlich viele Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots$ greifen wir bei den speziellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Kapiel 6 auf.

Abbildung: Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion



● Formale Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion

(5.1) $$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{für } x = x_1 \\ p_2 & \text{für } x = x_2 \\ \vdots & \\ p_m & \text{für } x = x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** gibt die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte der Zufallsvariablen X an. Sie wird mit f(x) bezeichnet.

Eigenschaften:

(5.2) $$0 \le \left[p_j = f(x_j)\right] \le 1$$

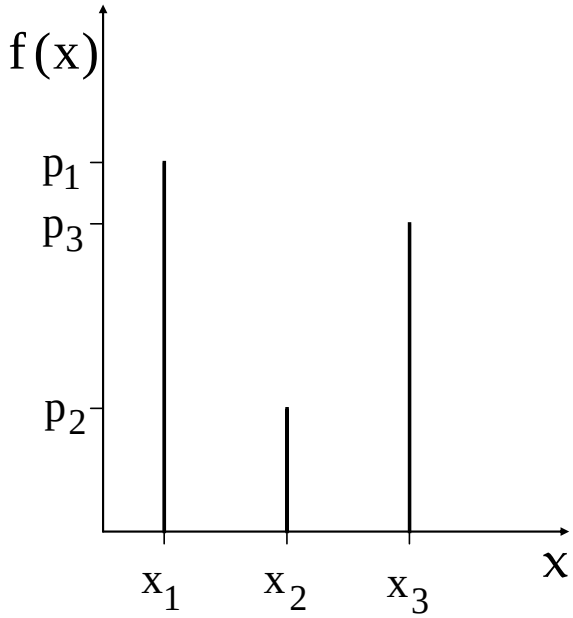
(5.3) $$\sum_{j=1}^{m} f(x_j) = \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

- **Tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion**

x_j	$f(x)$
x_1	$f(x_1) = p_1$
x_2	$f(x_2) = p_2$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m) = p_m$

- **Grafische Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion**

Stabdiagramm



Beispiel 5.5:

Betrachtet wird ein Produktionsprozess, bei dem zwei Teile entnommen werden. Jedes Teil kann defekt (D) oder nicht defekt ($\overline{D}$) sein. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, ein defektes Teil zu entnehmen, gleich p ist:

P(D) = p, und damit $P(\overline{D}) = 1 - p$.

Der Ergebnisraum des Zufallsvorgangs enthält als Elemente alle möglichen Stichproben vom Umfang n=2:

$$\Omega = \{(D,D),(D,\overline{D}),(\overline{D},D),(\overline{D},\overline{D})\}$$

Dabei ist z.B. (D,D) das Ergebnis, daß beide Teile defekt sind. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der defekten Teile in der Stichprobe, so dass X die Ausprägungen 0,1 und 2 hat. Wir nehmen an, dass beide Entnahmen unabhängig voneinander erfolgen. Daher kann der Multiplikationssatz für stochastisch unabhängige Ereignisse angewendet werden.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Teil defekt ist (X=0),

$$f(0) = P(X=0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Teile defekt sind (X=2), ist gleich

$$f(2) = P(X=2) = p \cdot p = p^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Teil defekt ist (X=1), ergibt sich, wenn das 1. Teil defekt ist und das 2. Teil nicht defekt (D, $\overline{D}$) oder das 1. Teil nicht defekt und das 2. Teil defekt ($\overline{D}$, D). Da sich beide Versuchsausgänge gegenseitig ausschließen, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für beide Realisationen addieren:

$$f(1) = P(X=1) = P(D, \overline{D}) + P(\overline{D}, D) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).$$

Formal ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X durch

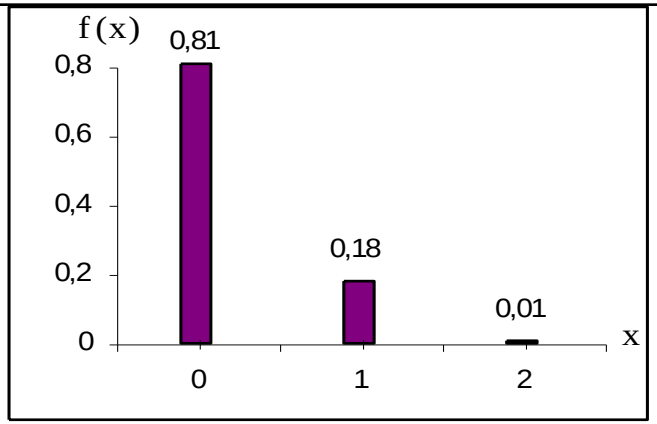
$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{für } x = 0 \\ 2p(1-p) & \text{für } x = 1 \\ p^2 & \text{für } x = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Sie sei für p=0,1 tabellarisch und grafisch dargestellt:

Tabellarische Darstellung

X=x	0	1	2
f(x)	0,81	0,18	0,01

Grafische Darstellung



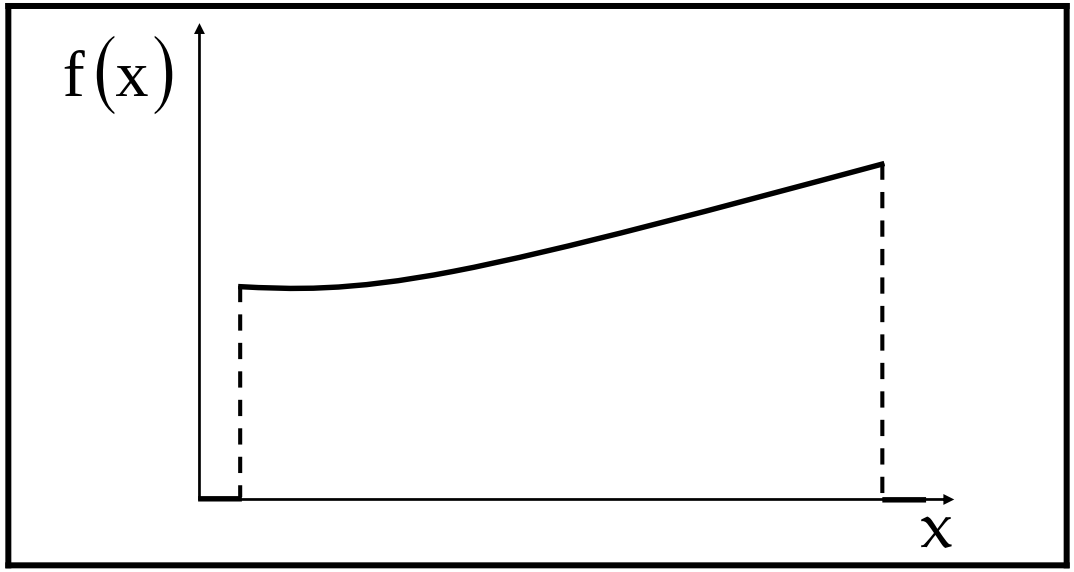
♦

5.3 Dichtefunktion

Das Äquivalent zur Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Zufallsvariablen heißt bei stetigen Zufallsvariablen **Dichtefunktion**.

Erinnern wir uns nun an das **Stabdiagramm**, das im **diskreten Fall** die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** grafisch darstellt. Wenn eine Zufallsvariable X **überabzählbar viele Werte** annehmen kann, dann grenzen die **Stäbe beliebig dicht aneinander** an, d.h. der Abstand zwischen den Stäben ist gleich 0. Wenn wir die **oberen Punkte** der **überabzählbar vielen Stäbe** miteinander verbinden, dann erhalten wir eine **stetige Kurve**, die die **Dichtefunktion** f(x) der Zufallsvariablen X wiedergibt.

Abbildung: Dichtefunktion



Eigenschaften:

(5.4) $f(x) \geq 0$ für alle x

(5.5) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

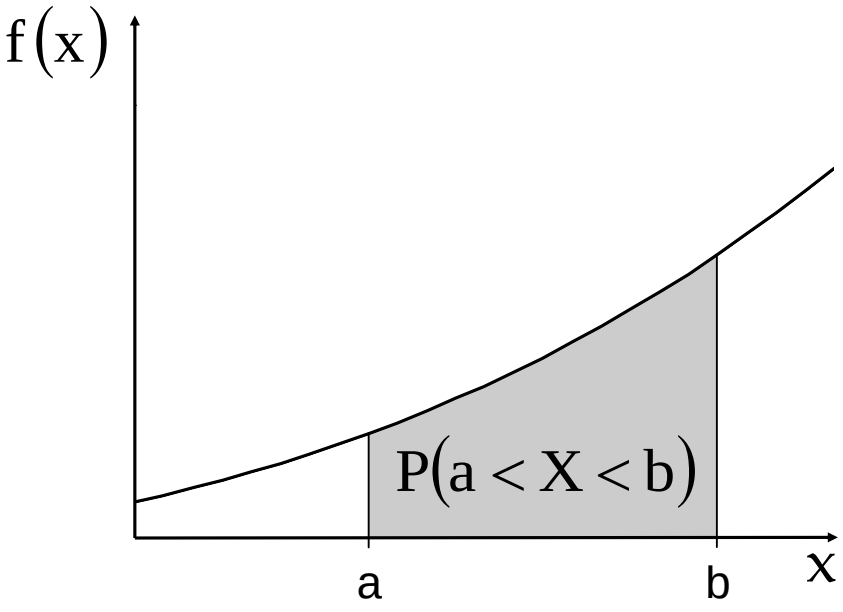
- **Intervallwahrscheinlichkeit**

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable in das Intervall (a < X < b) fällt, ist die Fläche unterhalb der Dichtefunktion, die in diesem Intervall liegt:

(5.6) $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

Da Punktwahrscheinlichkeiten 0 sind, P(X=a)=0, ist es unerheblich, ob die beiden Grenzen a und b in das Intervall einbezogen werden oder nicht:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$$
$$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$



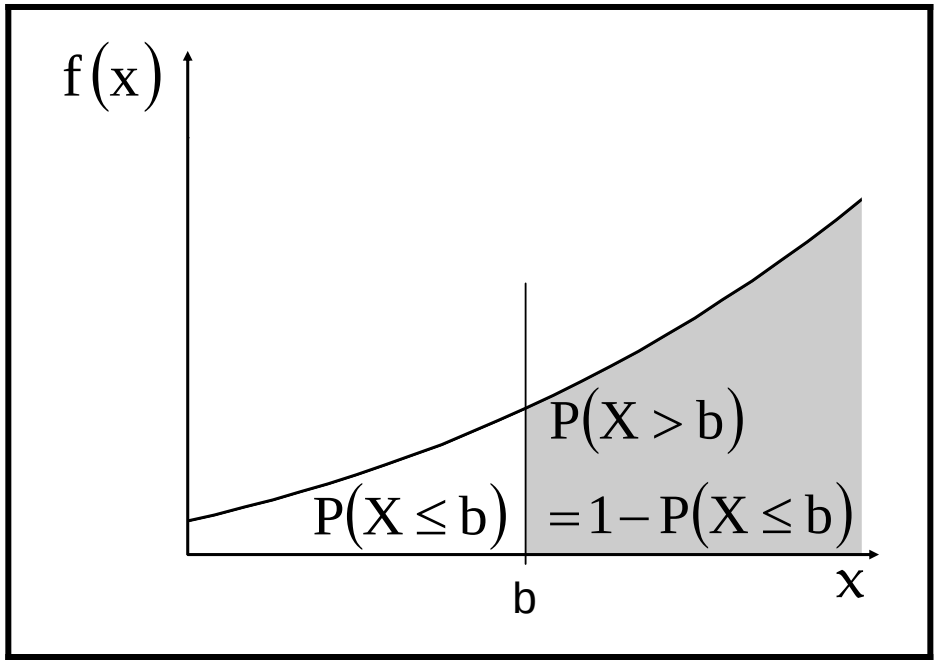
Wahrscheinlichkeit kleiner als b

(5.7) $$P(X < b) = P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Wahrscheinlichkeit größer als b

(5.8) $$P(X > b) = P(X \ge b) = \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - P(X \le b) = 1 - \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Abbildung: Komplementärwahrscheinlichkeit



Wichtige Regeln der Integralrechnung

Regel	Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
Potenzregel	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
Spezialfall: $n = -1$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e-Funktion	$e^{-a \cdot x}$	$(-1/a) \cdot e^{-a \cdot x}$
Faktorregel	$a \cdot g(x)$	$a \cdot \int g(x) \cdot dx$
Spezialfall: $g(x) = 1$	a	$a \cdot x$

Summenregel	$\int [f(x) \pm g(x)] \cdot dx = \int f(x) \cdot dx \pm \int g(x) \cdot dx$
Partielle Integration	$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$

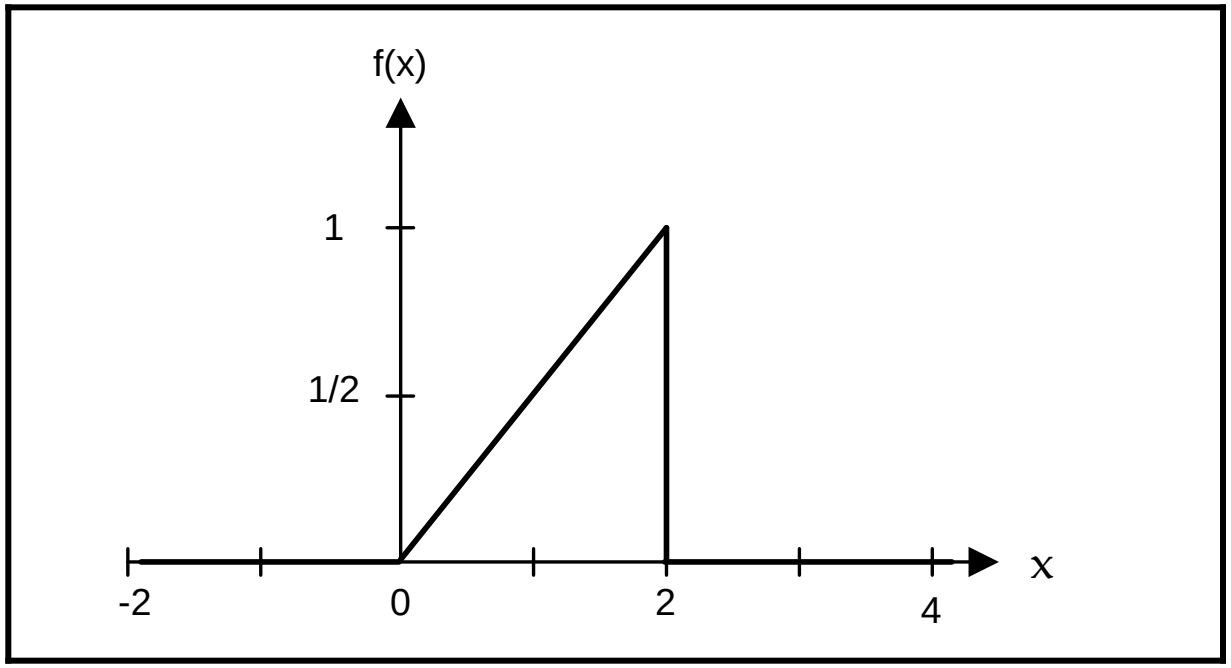
Beispiel 5.6:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ (1/2)\,x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Besitzt die Funktion f(x) die Eigenschaften einer Dichtefunktion?

Abbildung: Graph der Funktion f(x)



Die Funktion f(x) besitzt die Eigenschaften einer Dichtefunktion, wenn sie die Bedingungen (5.4) und (5.5) erfüllt.

1. $f(x) \geq 0$ für alle x

Außerhalb des Intervalls (0, 2] ist die Funktion f(x) gleich 0. Im Intervall (0, 2] nimmt f(x) stets positive Werte an, da die x-Werte aus diesem Intervall größer als 0 sind und mit einem positiven Faktor multipliziert werden. Die Funktion f(x) erfüllt damit die Nichtnegativitätsbedingung (5.4).

2, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Zu prüfen ist, ob die Fläche unterhalb der Dichtefunktion gleich 1 ist:

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) \Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{2} \Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} x^{2} \Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{4} \cdot 2^{2} - \frac{1}{4} \cdot 0^{2} = 1$$

Da die Funktion f(x) die Bedingungen (5.4) und (5.5) erfüllt, kann sie als Dichtefunktion zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden. ♦

Beispiel 5.7:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X ist durch die in Beispiel 5.6 überprüfte Dichefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ (1/2)x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

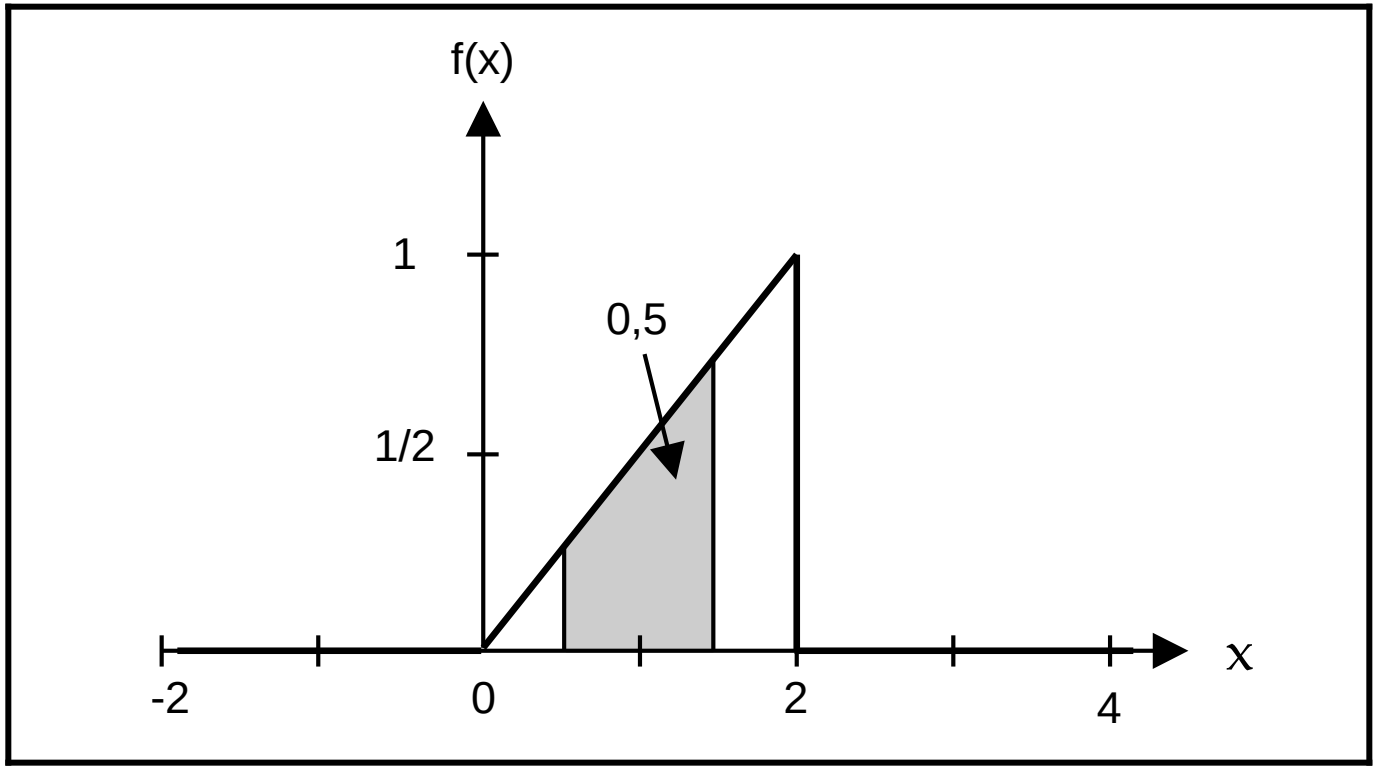
gegeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte zwischen 0,5 und 1,5 annimmt?

Um diese Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, hat man die Fläche unter der Dichte-funktion im intervall [0,5; 1,5] zu ermitteln:

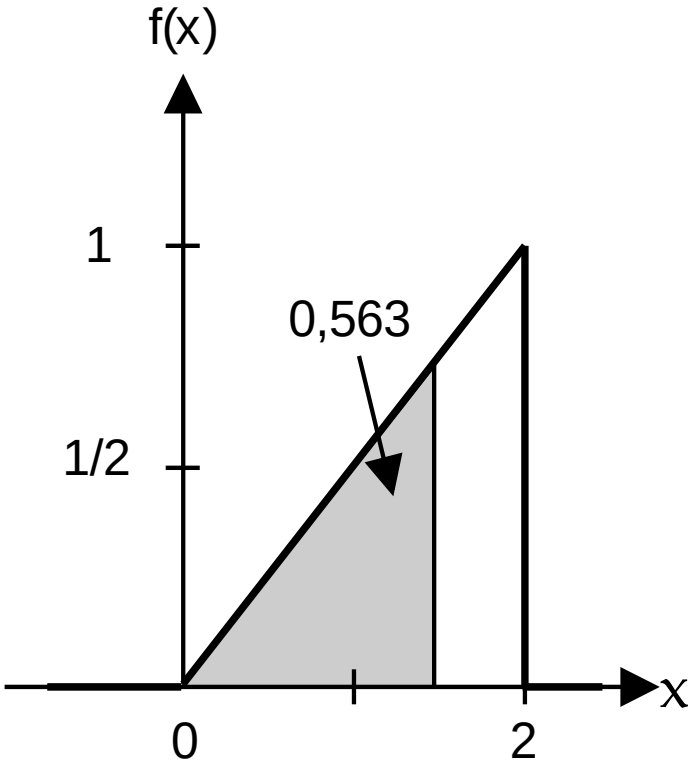
$$\begin{aligned} P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) &= \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) \Bigg|_{0,5}^{1,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Bigg|_{0,5}^{1,5} \\ &= \frac{1}{4} x^2 \Bigg|_{0,5}^{1,5} = \frac{1}{4} \cdot 1{,}5^2 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}(2{,}25 - 0{,}25) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 = 0{,}5 . \end{aligned}$$

Die Identität der berechneten Wahrscheinlichkeit mit der Fläche unter der Dichtefunktion im Bereich zwischen 0,5 und 1,5 auf der x-Achse geht aus der folgenden Grafik hervor.



b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X kleiner als 1,5 ist?

Für die Berechnung wenden wir Formel (5.7) an. Für X < 0 ist die Dichtefunktion für alle Funktionswerte f(x) null. Die untere Integrationsgrenze bildet deshalb die 0.

Berechnung	Grafische Darstellung
$P(X<1{,}5) = \int_0^{1{,}5} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big\vert_0^{1{,}5}$ $= \frac{1}{4}\cdot 1{,}5^2 - \frac{1}{4}\cdot 0^2 = \frac{1}{4}\cdot 2{,}25$ $= 0{,}563$	

♦