6. Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bisher wurden Wahrscheinlichkeitsverteilungen in einer allgemeinen Form dargestellt. In der Praxis treten häufig ganz bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf, die nun vorgestellt werden.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Gleich-Verteilung
- Bernoulli-Verteilung
- Binomialverteilung
- Hypergeometrische Verteilung
- Geometrische Verteil.
- Poisson-Verteilung
- Normal-Verteilung

6.1 Gleichverteilung

A. Diskrete Gleichverteilung

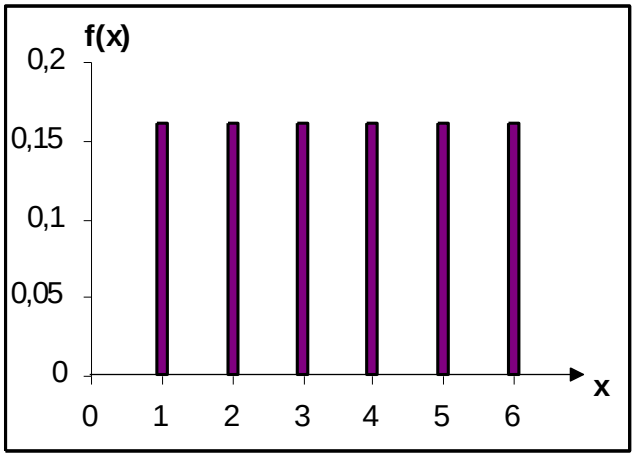
Ist bei einer Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit für jeden Wert $x_1, x_2, \ldots, x_m$ **gleichwahrscheinlich**, so ist ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion durch

(6.1) $$f(x) = \begin{cases} 1/m & \text{für } x = x_1, \ldots, x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Bei einer **diskreten Gleichverteilung** besitzt jeder Ausgang des Zufallsexperiments die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Abbildung: Diskrete Gleichverteilung (m=6)



Erwartungswert	Varianz
(6.2a) $E(X)=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}x_j$	(6.3a) $V(X)=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left[x_j-E(X)\right]^2$
bei natürlichen Zahlen 1,2,…,m: (6.2b) $E(X)=\frac{m+1}{2}$	bei natürlichen Zahlen 1,2,…,m: (6.3b) $V(X)=\frac{m^2-1}{12}$

Beweis von (6.2b):

Unter Verwendung der Summenformel für eine arithmetische Reihe,

$$\sum_{j=1}^{m} j=\frac{m(m+1)}{2},$$

erhalten wir mit (6.1)

$$E(X)=\sum_{x=1}^{m}x\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{m}\sum_{x=1}^{m}x=\frac{1}{m}\cdot\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m+1}{2}. \qquad \square$$

Beweis von (6.3b):

Aus der Analysis ist die Summe der quadrierten natürlichen Zahlen von 1 bis m bekannt:

$$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1}{6}.$$

Damit ist

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{m} x^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{x=1}^{m} x^2 = \frac{1}{m} \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Unter Verwendung des Verschiebungssatzes für Varianzen (5.18) erhalten wir mit (6.2b)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(m+1)(2m+1)}{6} - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2$$

und nach Vereinfachung

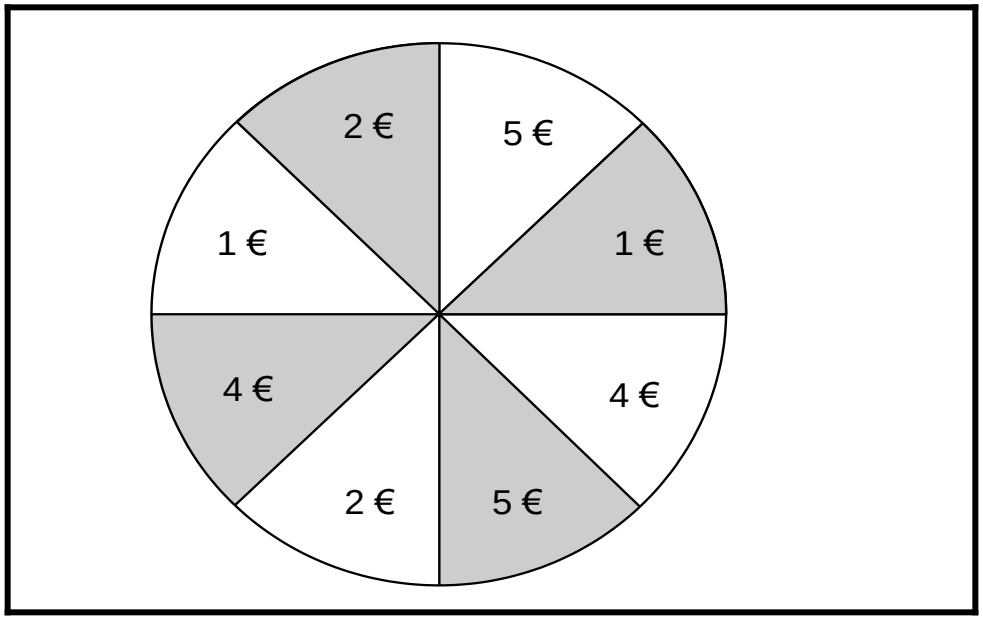
$$V(X) = \frac{2(m+1)(2m+1) - 3(m^2 + 2m + 1)}{12}$$

$$= \frac{4m^2 + 2m + 4m + 2 - 3m^2 - 6m - 3}{12} = \frac{m^2 - 1}{12}.$$

□

Beispiel 6.1:

Auf einem Straßenfest ist ein Glücksrad aufgebaut, bei dem jeder Besucher mit einem Einsatz von 3 € einen bestimmten Gewinn (= Auszahlung minus Einsatz) erzielt. Das Glücksrad ist in 8 Felder eingeteilt, die mit der jeweiligen Auszahlung beschriftet sind:

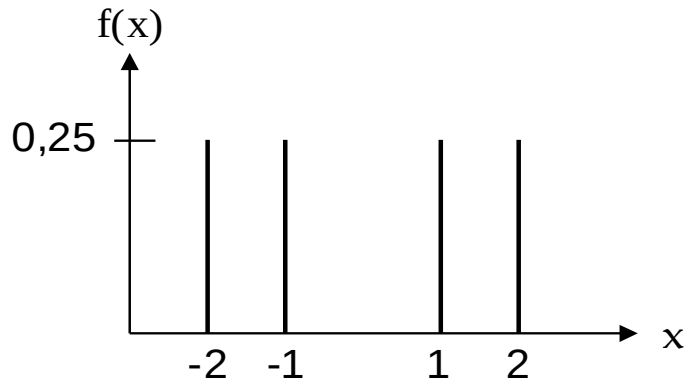


2 von 8 gleich großen Sektoren führen zu einer Auszahlung von 1 €. Der entsprechende Gewinn mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/8 = 1/4 beträgt:

$$\text{Gewinn} = \text{Auszahlung} - \text{Einsatz} = 1 - 3 = -2\,[€]$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Auszahlungen. Man erhält folgende **Wahrscheinlichkeitsfunktion** für die Zufallsvariable X, die den Gewinn wiedergibt:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}25 & \text{für} \quad x=-2 \\ 0{,}25 & \text{für} \quad x=-1 \\ 0{,}25 & \text{für} \quad x=1 \\ 0{,}25 & \text{für} \quad x=2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgrund des Erwartungswerts des Gewinns von

$$E(X)=\frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{4}x_j=\frac{1}{4}\cdot(-2-1+1+2)=\frac{1}{4}\cdot 0=0\,[€],$$

handelt es sich hier um ein “faires” Spiel. Die Varianz

$$V(X)=\frac{1}{4}\cdot\sum_{j=1}^{4}(x_j-3)^2=\frac{1}{4}\cdot\left[(-2-0)^2+(-1-0)^2+(1-0)^2+(2-0)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot(4+1+1+4)=\frac{1}{4}\cdot 10=2{,}5\left[€^2\right],$$

gibt die Streuung des Gewinns wieder. Im Mittel weichen die zu erzielenden Gewinne um

$$\sigma=\sqrt{2{,}5\,[€^2]}=1{,}58\,[€]$$

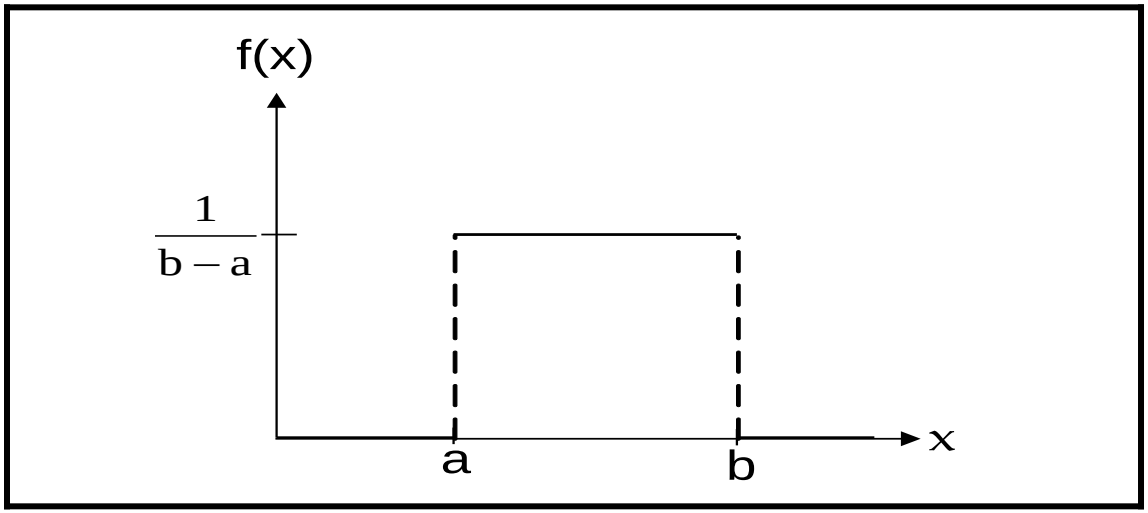
vom erwarteten Gewinn ab. ♦

B. Stetige Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X folgt einer **stetigen Gleichverteilung** mit den Parametern a und b, wenn die Dichtefunktion von X gegeben ist durch

(6.4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abbildung: Dichtefunktion der stetigen Gleichverteilung



Wenn die stetige Zufallsvariable X nur Werte im Intervall [a; b] annehmen kann, dann bezeichnen wir sie als **gleichverteilt**, falls X in Teilintervalle gleicher Länge aus [a; b] mit gleicher Wahrscheinlichkeit hineinfällt.

Verteilungsfunktion:

$$(6.5) \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

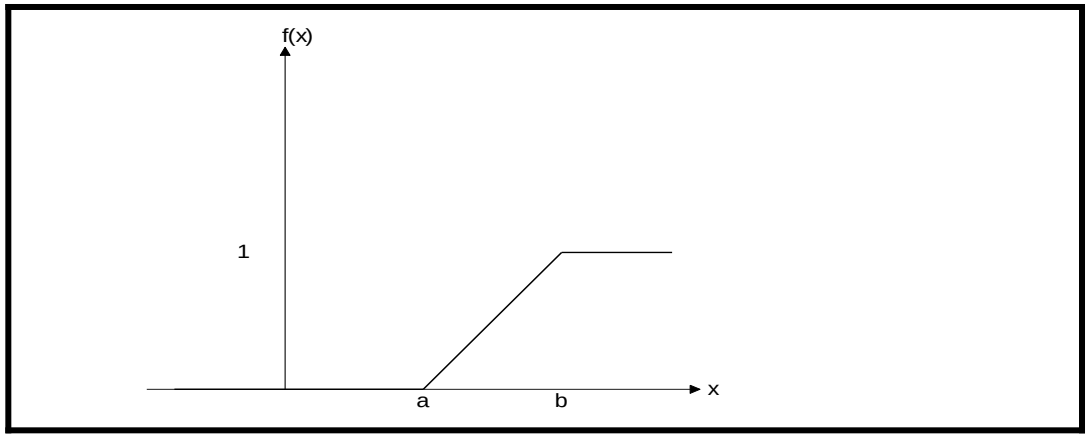
Beweis von (6.5):

Man erhält den Wert der Verteilungsfunktion von X an der Stelle x durch Integration der Dichtefunktion (6.4) im Intervall [a,b] bis zur Stelle x:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{b-a} u \Big|_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} .$$

Wegen des Verlaufs der Dichtefunktion (6.4) hat die Verteilungsfunktion außerdem den Wert 0 für x<a und den Wert 1 für x>b. □

Abbildung: Verteilungsfunktion der stetigen Gleichverteilung



Erwartungswert	Varianz
(6.6) $E(X)=\frac{a+b}{2}$	(6.7) $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

Der Erwartungswert ist gleich der Mitte des Intervalls [a; b]. Die Varianz von X erhöht sich, wenn die Intervalllänge b-a steigt. Mit zunehmender Intervalllänge steigt die Streuung der stetigen, gleichverteilten Zufallsvariablen X.

Beweis von (6.6):

Im stetigen Fall erhält man den Erwartungswert E(X) durch Integration:

$$E(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\cdot dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot x^2\Big|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\left(b^2-a^2\right).$$

Unter Verwendung der binomischen Formel

$$(b+a)\cdot(b-a)=b^2-a^2$$

lässt sich der Ausdruck zu

$$E(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-a}\cdot(a+b)\cdot(a-b)=\frac{a+b}{2}$$

umformen. □

Beispiel 6.2:

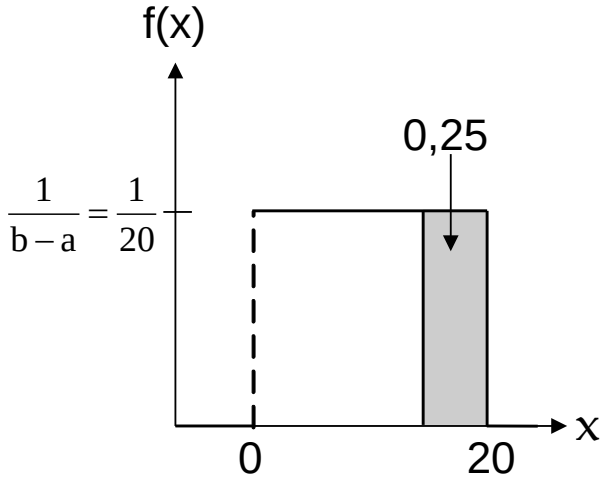
An einem Bahnhof fährt die Schnellbahn exakt alle 20 Minuten ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig eintreffender Fahrgast mehr als 15 Minuten warten muss?

Die Wartezeit ist gleichverteilt mit a = 0 und b = 20. Die Dichtefunktion lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 1/20 & \text{für } 0 \le x \le 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermitteln:

$$P(X \ge 15) = \int_{15}^{20} \frac{1}{20}\,dx = \frac{1}{20}x\Big|_{15}^{20}$$
$$= \frac{20}{20} - \frac{15}{20} = 1 - 0{,}75$$
$$= 0{,}25$$



Die durchschnittliche Wartezeit beträgt

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+20}{2} = 10\,[\mathrm{Min}]$$

und die Varianz der Wartezeit

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{100}{3} = 33{,}333\,[\mathrm{Min}^2]$$

Im Mittel weicht die Wartezeit um

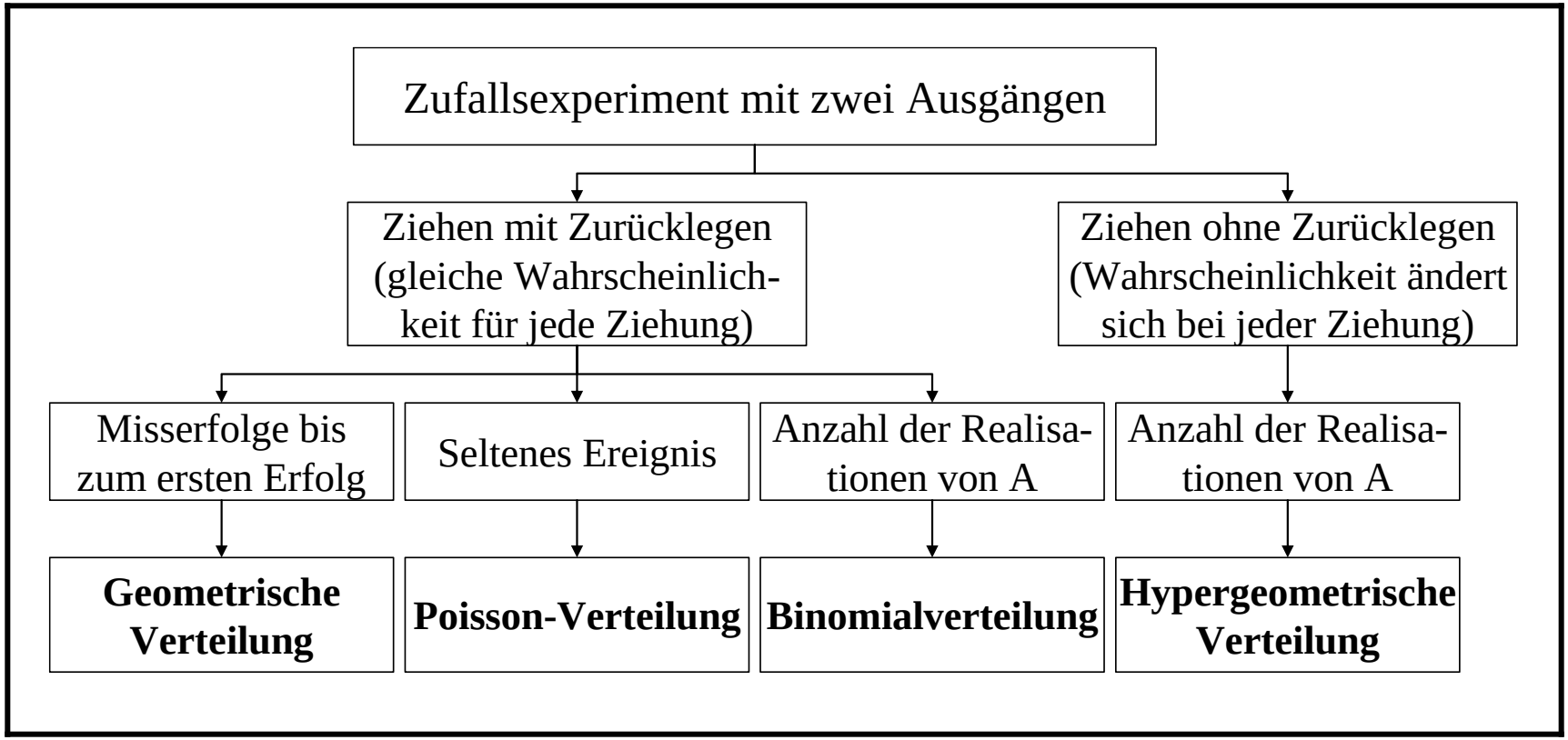
$$\sigma = \sqrt{33{,}333} = 5{,}77\,[\mathrm{Min}]$$

von der erwarteten Wartezeit ab. ♦

6.2 Bernoulli-Verteilung

Die Bernoulli-Verteilung, die wir hier kennen lernen werden, ist die Grundlage aller weiteren diskreten Verteilungsmodelle.

Abbildung: Diskrete Verteilungen, die auf der Bernoulli-Verteilung basieren



Bei der hypergeometrischen Verteilung liegen aufgrund der Abhängigkeit der Ziehungen bei jeder Wiederholung unterschiedliche Bernoulli-Verteilungen vor.

Der **Bernoulli-Prozess** ist ein Zufallsvorgang, bei dem nur das Ereignis A sowie deren Komplementärereignis $\overline{A}$ eintreten können.

Die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse werden bei dem Bernoulli-Prozess als konstant vorausgesetzt:

$$P(A) = p \quad \text{und} \quad P(\overline{A}) = 1 - p.$$

Beispiel 6.3:

Beispiele für einen Bernoulli-Prozess sind:

- Münzwurf: Die möglichen Ausgänge sind Kopf (A) und Zahl ($\overline{A}$).
- Würfelwurf: Die geworfene Augenzahl kann gleich 1 (A) oder größer als 1 ($\overline{A}$) sein.
- Produktionsprozess: Ein entnommenes Teil weist einen Defekt (A) oder keinen Defekt ($\overline{A}$) auf.
- Dauer von Telefongesprächen: Ein Gespräch kann höchstens 5 Minuten (A) oder länger ($\overline{A}$) dauern. ♦

Bei der **Bernoulli-Verteilung** wird der Bernoulli-Prozess einmal durchgeführt.

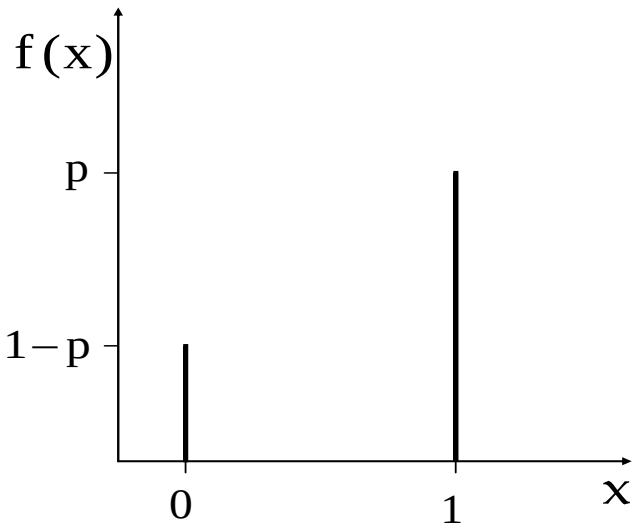
Die Zufallsvariable X, die angibt wie oft das Ereignis A eingetreten ist, kann dann nur die Werte 0 und 1 annehmen. Ihre Wahrscheinlichkeiten sind dann durch

$$P(X=1) = P(A) = p \quad \text{und} \quad P(X=0) = P(\overline{A}) = 1 - p$$

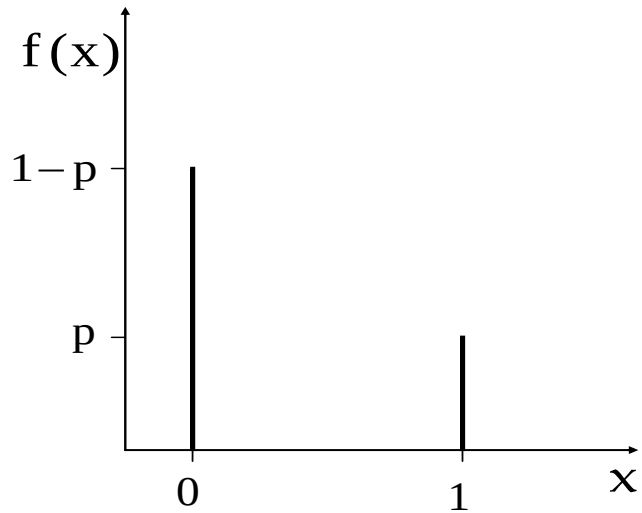
gegeben.

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** der Bernoulli-Verteilung lautet:

(6.8) $$f(x) = \begin{cases} 1-p & \text{für } x = 0 \\ p & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



a) p > 0,5



b) p < 0,5

Erwartungswert	Varianz
(6.9) $E(X) = p$	(6.10) $V(X) = p \cdot (1-p)$

Beweis von (6.9) und (6.10):

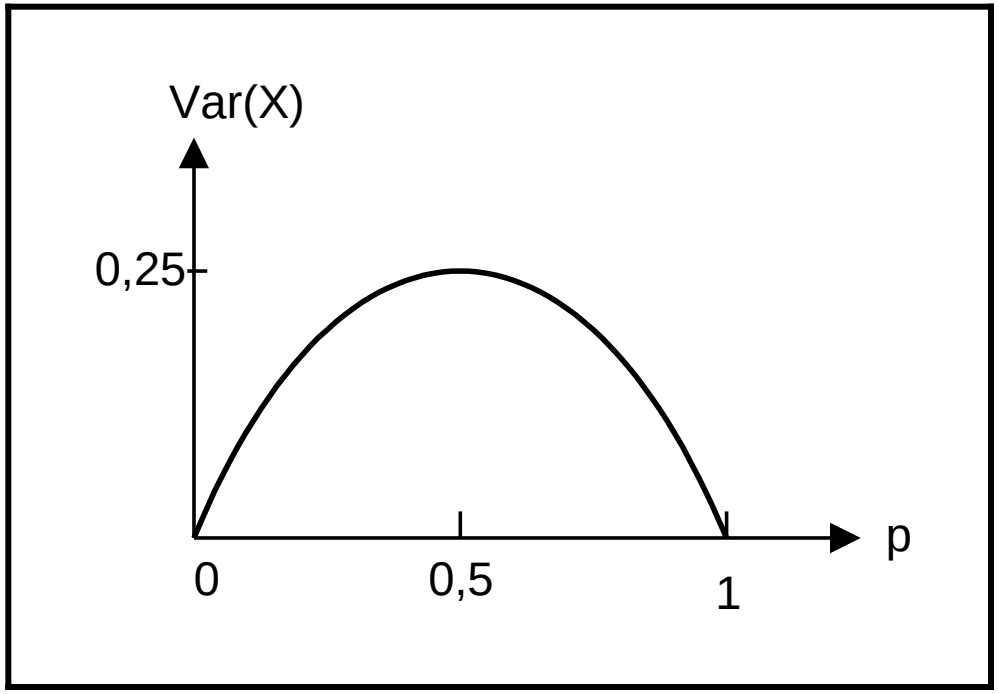
Setzt man die Wahrscheinlichkeitsfunktion (6.8) in die allgemeine Formel (5.12) für den Erwartungswert ein, erhält man

$$E(X) = \sum_{j=1}^{2} x_j \cdot f(x_j) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Für die Varianz folgt mit (6.8) aus (5.13)

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{j=1}^{2} \left[x_j - E(X)\right]^2 \cdot f(x_j) = \sum_{j=1}^{2} (x_j - p)^2 \cdot f(x_j) \\ &= (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p \\ &= p \cdot (1-p) \cdot [p + (1-p)] = p \cdot (1-p). \end{aligned}$$

Abbildung: Varianz der Bernoulli-Verteilung



Die Varianz nimmt zunächst mit steigendem p zu, bis sie bei p = 0,5 ihr Maximum erreicht. Danach sinkt sie wieder mit abnehmenden Raten bis auf 0 ab.

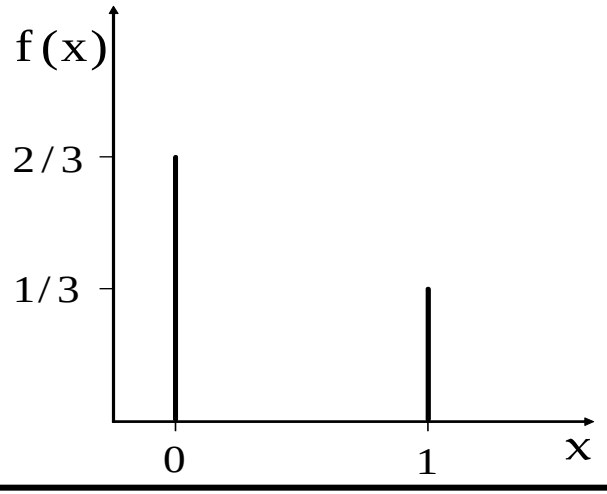
Beispiel 6.3:

Das Ereignis A sei als "Augenzahl kleiner oder gleich 2" beim Würfelwurf definiert. Die Wahrscheinlichkeit für A liegt dann bei 1/3:

$$p = P(A) = 2/6 = 1/3.$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen "Anzahl von A" ist dann wie folgt gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 2/3 & \text{für } x = 0 \\ 1/3 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Der Erwartungswert beträgt

$$E(X) = p = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

und die Varianz

$$V(X) = p \cdot (1-p) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = 0{,}222$$

♦

6.3 Binomialverteilung

Bernoulli-Prozess mit n-maliger Wiederholung

Die **Binomialverteilung** basiert auf einer **n-maligen Durchführung** eines **Bernoulli-Prozesses**, bei der in jedem Versuch nur das Ereignisse A oder das Komplementärereignis $\overline{A}$ eintreten können.

Im Urnenmodell seien die beiden Ereignisse wie folgt definiert:

Ereignis A: rote Kugel und Ereignis $\overline{A}$: nicht-rote Kugel.

Die **Ziehungen** erfolgen dabei **mit Zurücklegen**, so dass sie **unabhängig** voneinander sind. Dadurch ist sichergestellt, dass die Wahrscheinlichkeiten der beiden betrachteten Ereignisse in jedem Versuch unverändert bleiben:

$P(A) = p$ und $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Definition der Zufallsvariablen X:

Zufallsvariable X: Anzahl der Realisationen des Ereignisses A
(Urnenmodell: Anzahl der gezogenen roten Kugeln)

Mögliche Werte der Zufallsvariablen X: 0, 1, 2, …, n

X=0: Keine rote Kugel gezogen, d.h. A tritt 0-mal auf

X=n: Alle gezogenen Kugeln sind rot, d.h. A tritt n-mal auf

Herleitung der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Wenn das Ereignis A x-mal in der Stichprobe enthalten ist, dann muss das Komplementärereignis $\overline{A}$ (n-x)-mal eingetreten sein. Eine mögliche Stichprobe vom Umfang n, in der x-mal A und (n-x)-mal $\overline{A}$ enthalten sind, ist also z.B.

$$\underbrace{AA\ldots A}_{x-mal}\quad\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-x-mal}\ .$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieser konkreten Stichprobe, in der zunächst x-mal das Ereignis A und dann (n-x)-mal das Ereignis $\overline{A}$ enthalten sind, ist durch

$$P\Big(\underbrace{A\cap A\cap\ldots\cap A}_{x-mal}\cap\underbrace{\overline{A}\cap\overline{A}\cap\ldots\cap\overline{A}}_{(n-x)-mal}\Big)$$

gegeben. Aufgrund der Unabhängigkeit der Ziehungen kann der Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse angewandt werden, womit man

$$P\left(A\cap A\cap\ldots\cap A\cap\overline{A}\cap\overline{A}\cap\ldots\overline{A}\right)=\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{x-mal}\cdot\underbrace{P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A})}_{(n-x)-mal}$$

$$=\underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{x-mal}\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}_{(n-x)-mal}=p^{x}(1-p)^{n-x}\ .$$

erhält.

Die obige Wahrscheinlichkeit bezieht sich zunächst auf eine Stichprobe, in der A die ersten x und $\overline{A}$ die nächsten n-x Positionen belegt. Wie viele Stichproben von x-maligem Eintreffen von A bei n Zufallsexperimenten gibt es? Nach den Regeln der Kombinatorik erhalten wir die gesuchte Anzahl unterschiedlicher Stichproben mit der Formel für **Permutationen mit Wiederholung**:

$$P_{n,x} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} = \binom{n}{x} .$$

Es gibt also $\binom{n}{x}$ mögliche Stichproben, die an beliebigen Positionen x rote und n-x nicht-rote Kugeln enthalten. Jede dieser Stichproben hat dabei die gleiche Wahr scheinlichkeit von $p^x(1-p)^{n-x}$, sich zu realisieren. Da die Stichproben disjunkt sind, ist

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0,1,\ldots,n$$

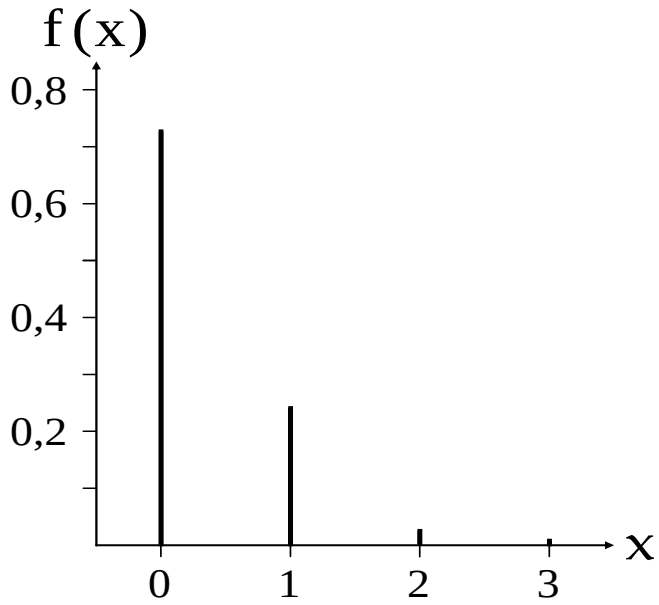
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Durchführungen eines Zufallsvorgangs x-mal das Ereignis A und (n-x)-mal das Ereignis $\overline{A}$ eintritt, sofern die Durchführungen unabhängig voneinander erfolgen.

Eine Zufallsvariable X folgt einer **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p, wenn die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** von X durch

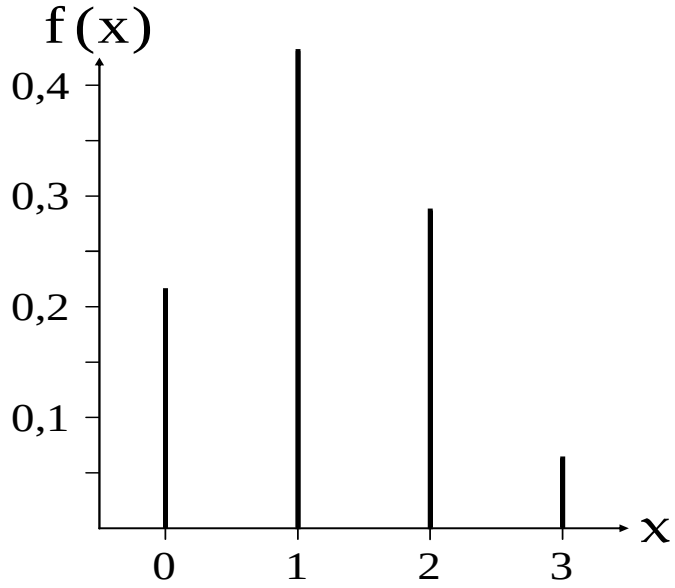
(6.11) $$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

Abbildung: Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Binomialverteilung mit n=3

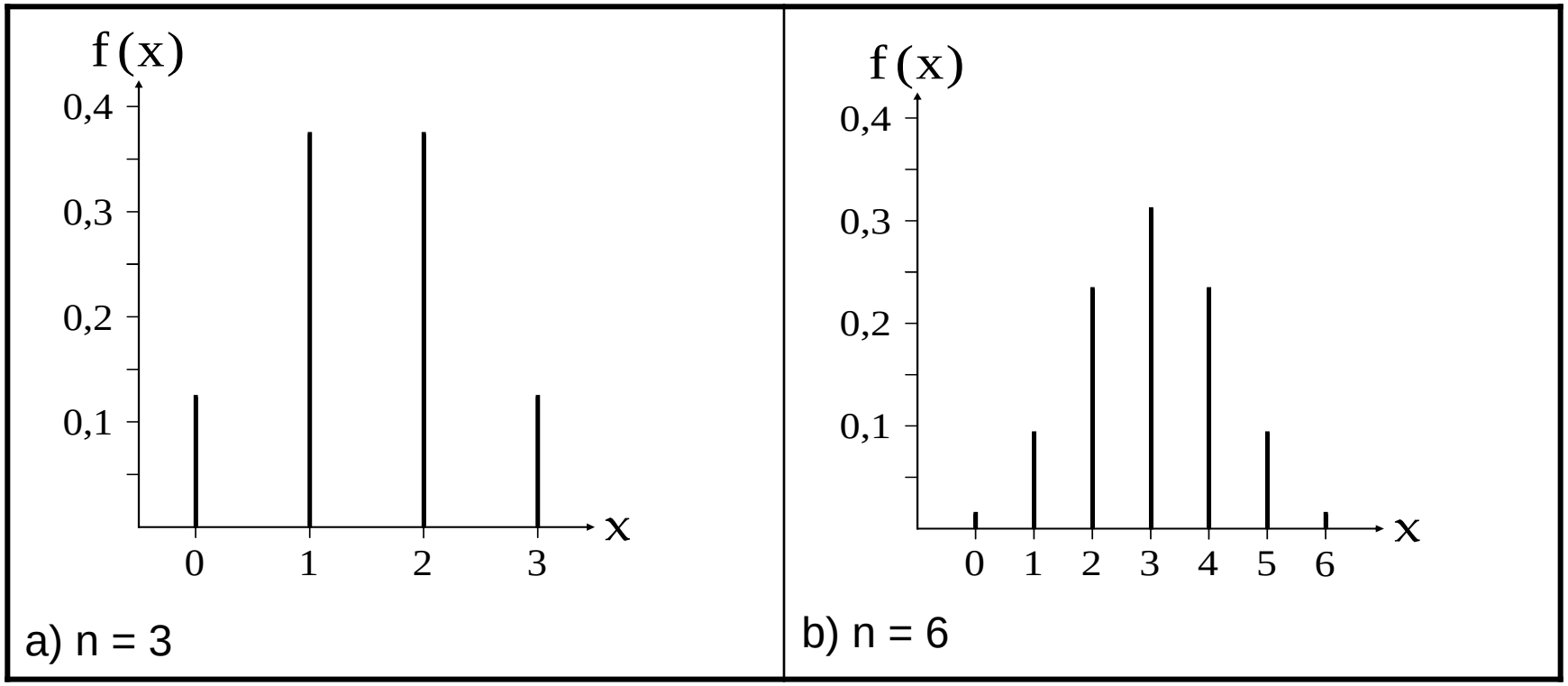


a) p = 0,1



b) p = 0,4

Abbildung: Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Binomialverteilung mit p = 0,5



Erwartungswert	Varianz
(6.12) $E(X) = n \cdot p$	(6.13) $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Beweis von (6.12) und (6.13):

Für den Beweis von (6.12) wird X als Summe der n Bernoulli-verteilten Zufalls-variablen X_i betrachtet:

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Da die Zufallsvariablen X_i bernoulli-verteilt sind, ist $E(X_i)=p$ für alle i=1,...,n, so dass man

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p.$$

erhält. Aufgrund der Unabhängigkeit lässt sich die Varianz von X in der Form

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

darstellen. Unter Verwendung von (6.10) erhält man hieraus

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

♦

Beispiel 6.4:

Es sei die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, beim dreimaligen Werfen einer Münze (n=3) genau zweimal (x=2) Kopf zu werfen. Da beide Seiten der Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, ist p=0,5.

Ein günstiges Ergebnis, d-h. ein Ergebnis mit 2 x Kopf und 1 x Zahl ist

1. Wurf	2. Wurf	3. Wurf

Die Wahrscheinlichkeit, diese Kombinationsmöglichkeit zu realisieren, ist

$$p \cdot p \cdot (1-p) = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^1 = 0{,}5^3 = 0{,}125$$

Wie viele günstige Ergebnisse gibt es? Nach der Formel für Permutationen mit Wiederholung gibt es

$$P_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

unterschiedliche Anordnungen, bei denen jeweils zweimal Kopf und einmal Zahl vorkommt. Alle drei Kombinationsmöglichkeiten besitzen die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(X=2) = f(2) = 0{,}125 \cdot 3 = 0{,}375.$$

Zum selben Ergebnis kommt man unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung (6.11):

$$P(X=2)=f(2)=\binom{3}{2}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^1=0{,}375.$$

Der Erwartungswert der betrachteten binomialverteilten Zufallsvariablen beträgt

$$E(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}5=1{,}5$$

und die Varianz

$$V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)=3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}75.$$ ♦

Beispiel 6.5:

Bei der Produktion eines Gutes sind 10% Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 produzierten Stücken mindestens 4 Ausschuss sind?

Hier ist die Binomialverteilung anzuwenden, weil ein Bernoulliprozess mit n=20 Wiederholungen vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ausschussstück ist bei jeder Ziehung konstant und beträgt 0,1 (=p). Ob ein defektes oder brauchbares Gut ausgewählt wurde, verändert nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das nächste entnommene Teil Ausschuss ist. Die Zufallsvariable X ist als Anzahl der Ausschussstücke definiert.

Mit der Ausschusswahrscheinlichkeit p=0,1 lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x)=\begin{cases}\binom{20}{x}\cdot 0{,}1^{x}\cdot 0{,}9^{20-x} & \text{für } x=0,1,2,\ldots,20\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Die direkte Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit für mindestens vier Ausschussteile,

$$P(X\geq 4)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+\ldots+f(18)+f(19)+f(20),$$

Erweist sich als aufwändig. Es bietet sich deshalb an, die Formel der Komplementärwahrscheinlichkeit zu verwenden:

$$\begin{aligned}P(X\geq 4)&=1-P(X<4)\\&=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right].\end{aligned}$$

Mit den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X=0)=f(0)=\binom{20}{0}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{20}=\frac{20!}{0!\cdot 20!}\cdot 0{,}1^{0}\cdot 0{,}9^{20}=0{,}1216,$$

$$P(X=1)=f(1)=\binom{20}{1}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{19}=\frac{20!}{1!\cdot 19!}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{19}=0{,}2702,$$

$$P(X=2)=f(2)=\binom{20}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}=0{,}2852,$$

$$P(X=3)=f(3)=\binom{20}{3}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^{17}=\frac{20!}{3!\cdot 17!}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^{17}=0{,}1901$$

erhält man

$$\begin{aligned}P(X\geq 4)&=1-(0{,}1216+0{,}2702+0{,}2852+0{,}1901)\\&=1-0{,}8671=0{,}1329\,.\end{aligned}$$

♦

Verteilungsfunktion:

Für die Verteilungsfunktion F(x) der Binomialverteilung gibt es keinen kompakten Ausdruck. Man erhält sie durch Kumulierung der Wahrscheinlichkeiten f(y) mit $y\leq x$:

(6.14) $$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{y\leq x}\binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}.$$