10. Intervallschätzung

10.1 Begriff des Konfidenzintervalls

Mit unterschiedlichen Stichproben werden verschiedene Punktschätzer $\hat{\theta}$ für den Parameter der Grundgesamtheit θ erzielt. Wenn m Stichproben aus der Grundgesamtheit entnommen werden, dann lassen sich daraus bis zu m verschiedene Schätzwerte $\hat{\theta}$ berechnen. Die Punktschätzer werden aufgrund des Stichprobenfehlers im Allgemeinen auch von θ abweichen.

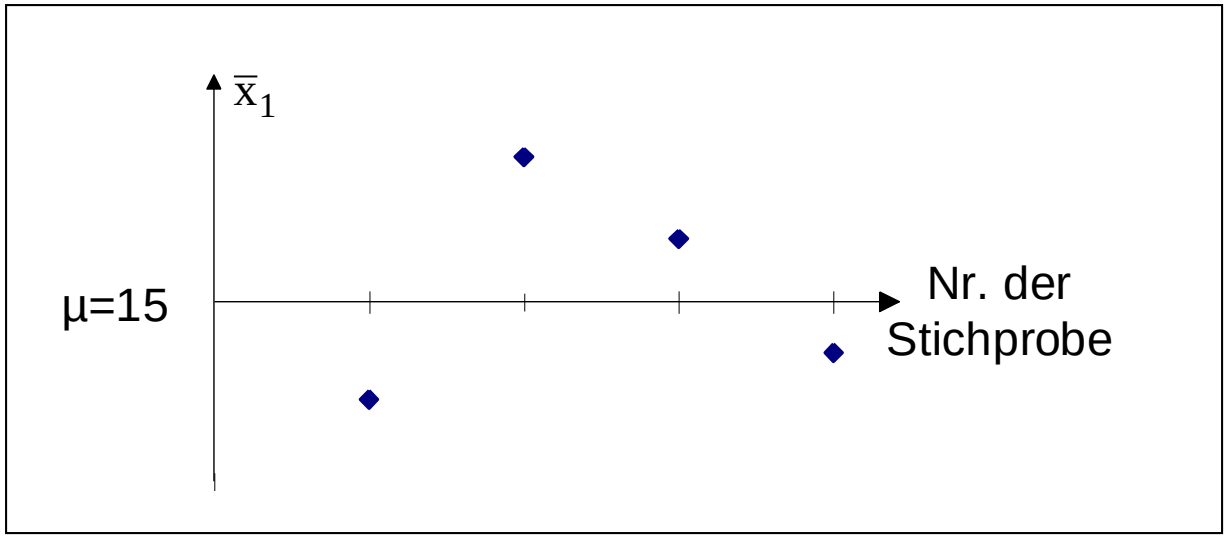
Beispiel 10.1:

Gegeben sind m=4 Stichproben, die der Grundgesamtheit entnommen wurden. Für den unbekannten Erwartungswert μ der Grundgesamtheit wird die Schätzfunktion $\overline{X}$ eingesetzt. Die beobachteten Realisationen von $\overline{X}$ sind die arithmetischen Mittel $\overline{x}_l$ der Stichprobenwerte, wobei l=1,...,4 ist. Folgendes Ergebnis wurde ermittelt:

l	1	2	3	4
$\overline{x}_l$	14,5	16,0	15,5	14,8

Wenn nun z.B. μ=15 ist, dann liegt die in der folgenden Abbildung dargestellte Situation vor.

Abbildung: Punktschätzung



Wir sehen, dass sich die Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_1$ die alle Realisationen der erwartungstreuen, effizienten und konsistenten Schätzfunktion $\bar{X}$ sind, unterscheiden. Außerdem wird mit keiner Punktschätzung der wahre Parameter μ=15 getroffen. ♦

Die Gütekriterien für Schätzfunktionen beziehen sich nur auf den Durchschnitt von Stichproben, nicht aber auf eine konkrete Stichprobe. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punktschätzer $\hat{\theta}$ einen Schätzwert liefert, der mit dem unbekannten Parameter der Grundgesamtheit, θ, übereinstimmt, klein (bei stetigen Zufallsvariablen gleich 0). Wir können aber insbesondere nicht beurteilen, wie verlässlich der konkrete Schätzwert für θ ist. Um zumindest den Bereich abzugrenzen, in dem der unbekannte Parameter erwartet werden kann, geht man zu einer **Intervallschätzung** über.

Ausgehend von einer **Punktschätzung** $\hat{\theta}$ wird bei der **Intervallschätzung** ein Intervall $[c_1,c_2]$ mit $c_1<c_2$ angegeben, in dem der unbekannte Parameter bei vielen Wiederholungen der Stichprobenziehung häufig, d.h. mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt. Die Grenzen dieses Intervall $c_1=\hat{\theta}-d_1$ und $c_2=\hat{\theta}+d_2$, werden dabei aus derselben Stichprobe wie der Schätzwert $\hat{\theta}$ ermittelt, d.h. c_1 und c_2 sind Realisationen von Zufallsvariablen, die im allgemeinen von Stichprobe zu Stichprobe schwanken.

Beispiel 10.2:

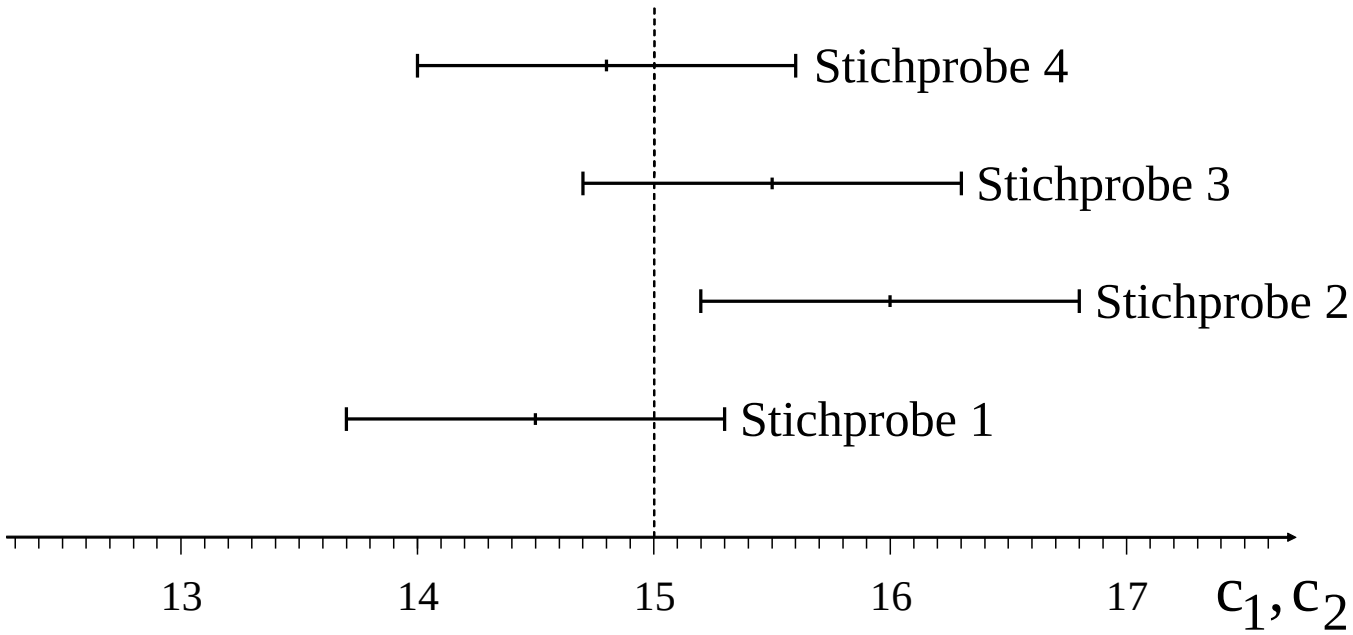
Wenn im Beispiel 10.1 $d_1 = d_2 = 0{,}8$ ist, dann erhält man

l	$\bar{x}_1$	$[c_1, \quad c_2]$
1	14,5	[13,7 ; 15,3]
2	16,0	[15,2 ; 16,8]
3	15,5	[14,7 ; 16,3]
4	14,8	[14,0 ; 15,6]

Das arithmetische Mittel in der Grundgesamtheit μ befindet sich annahmegemäß bei 15. Damit stimmt kein Punktschätzer (= Stichprobenmittel) mit μ überein. Jedoch wird der wahre Parameter μ=15, den wir vorher mit keiner Punktschätzung getroffen haben, in drei von vier, d.h. von 75% der Intervalle überdeckt.

Grafisch ist diese Situation in der nachfolgenden Abbildung wiedergegeben.

Abbildung: Intervallschätzung



♦

Ein Intervall $[C_1,C_2]$, das mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ den unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit enthält, heißt **Konfidenz- oder Vertrauensintervall** für θ zum Niveau $1-\alpha$:

(10.1) $P(C_1 \leq \theta \leq C_2) = 1-\alpha$.

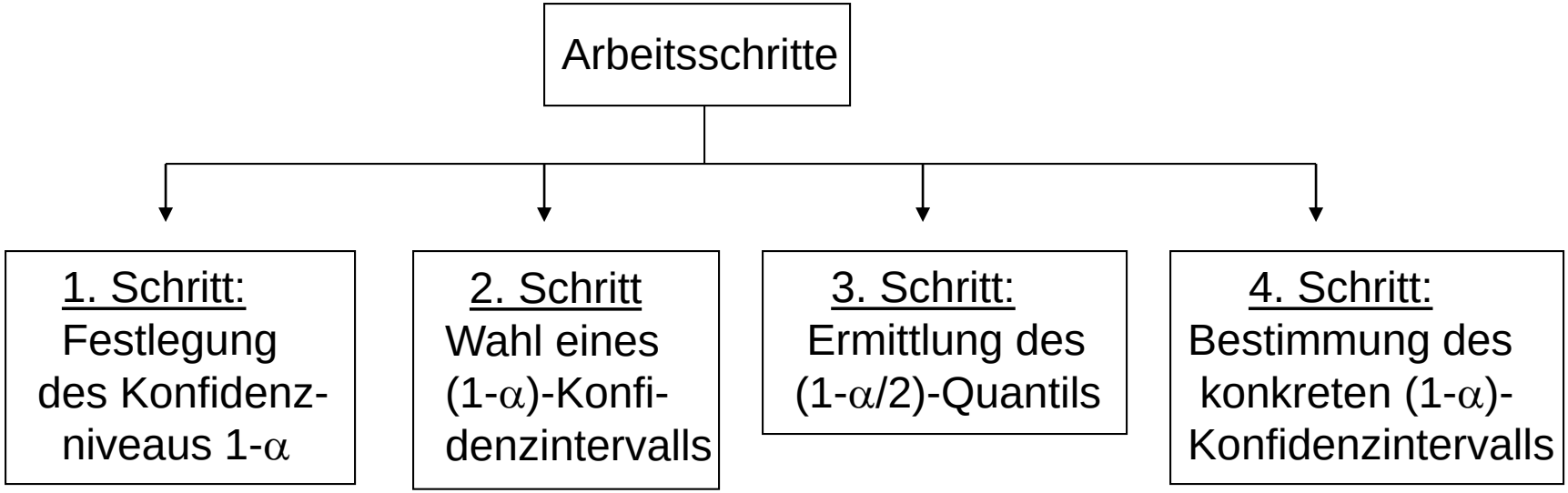
Für das **Konfidenzniveau** wird zumeist $1-\alpha=0{,}95$ oder $1-\alpha=0{,}99$ gewählt.

Die Intervallgrenzen C_1 und C_2 sind hierbei Stichprobenfunktionen, d.h. Zufallsvariablen, die sich aus den Stichprobenvariablen $X_1, X_2, ..., X_n$ ergeben. Gleichung (10.1) gibt die Situation **vor der Stichprobenziehung** wieder.

Nach der Stichprobenziehung liegen konkrete Werte c_1 und c_2 für die Intervallgrenzen vor. $[c_1, c_2]$ ist also das **konkrete Konfidenzintervall** zum Niveau $1-\alpha$.

Da die Grenzen c_1 und c_2 feste Größen sind und der Parameter θ eine Konstante ist, lässt sich nach Ziehen der Stichprobe keine Wahrscheinlichkeitsaussage mehr machen. Vielmehr ist das konkrete Konfidenzintervall mit einer **Häufigkeitsaussage** verbunden. Ein auf diese Weise konstruiertes Konfidenzintervall wird in $(1-\alpha)\cdot 100\%$ aller Fälle den unbekannten Parameter der Grundgesamtheit überdecken.

Übersicht: Arbeitsschritte bei der Berechnung des Konfidenzintervalls



10.2 Konfidenzintervalle für den Erwartungswert

A. Konfidenzintervall für μ bei bekannter Varianz σ^2

Um das Konstruktionsprinzip und die Eigenschaften von Konfidenzintervallen zu erläutern, unterstellen wir zunächst, dass die Varianz $\boldsymbol{\sigma^2}$ der Grundgesamtheit bekannt ist. Außerdem nehmen wir an, dass die betrachtete Zufallsvariable X normalverteilt ist.

Annahme 1a: Varianz $\boldsymbol{\sigma^2}$ bekannt

Annahme 2a: Grundgesamtheit normalverteilt

Als Punktschätzer für μ verwenden wir das arithmetische Mittel der Stichprobe, $\overline{X}$, das ein erwartungstreuer, effizienter und konsistenter Schätzer für Erwartungswert ist.

Da $\overline{X}$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ^2/n,

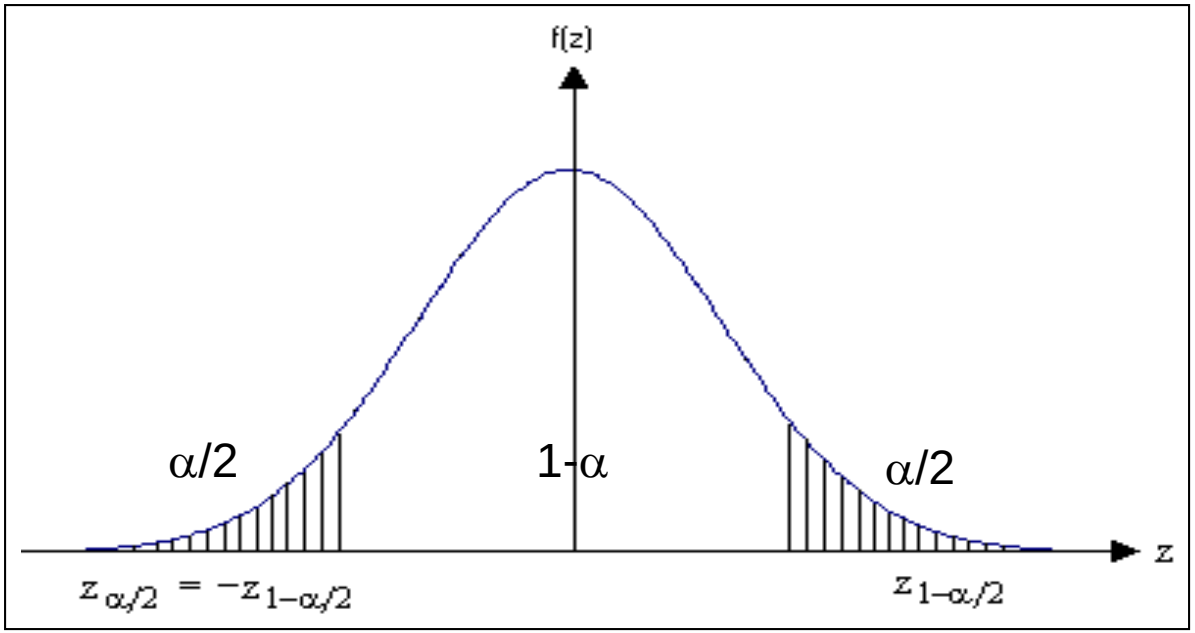
$$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n),$$

ist die standardisierte Zufallsvariable (=standardisiertes Stichprobenmittel)

(10.2) $$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

standardardnormalverteilt.

Abbildung: Dichtefunktion der Standardnormalverteiltung mit symmetrischem Intervall



Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable Z in das symmetrische Intervall zwischen $-z_{1-\alpha/2}$ und $z_{1-\alpha/2}$ fällt:

(10.3) $$P\left(z_{\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}\right) = P\left(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \ .$$

Nach Einsetzen von (10.2) für Z erhält man

(10.4) $$P\left(-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \ .$$

Bei bekanntem μ und σ^2 ist (10.4) das zentrale Schwankungsintervall für das standardisierte Stichprobenmittel.

Durch elementare Umformungen erhalten wir daraus das gesuchte Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter μ der Grundgesamtheit zum Niveau 1-α:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \le \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \le z_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(-z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-\mu \le z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-\overline{X}-z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\overline{X}+z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Wird mit -1 multipliziert, kehren sich die Ungleichheitszeichen um. Man erhält dann

$$P\left(\overline{X}+z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ge \mu \ge \overline{X}-z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

und nach Umstellung schließlich

$$\boxed{(10.5) \qquad P\left(\overline{X}-z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha}$$

Das Intervall (10.5) ist das **Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert μ einer Grundgesamtheit zum Niveau 1-α**, sofern die Grundgesamtheit normalverteilt und ihre Varianz σ^2 bekannt ist

Diese Aussage, die einen Schluss von der Stichprobe auf die unbekannte Grundgesamtheit wiedergibt (indirekter Schluss), bezieht sich auf die Situation vor der Ziehung der Stichprobe. Man beachte, dass der **indirekte Schluss vollständig auf** den **direkten Schluss zurückgeführt** werden kann (Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe).

Wenn die Stichprobe entnommen wird, dann wird im Konfidenzintervall die Schätzfunktion $\overline{X}$ durch den festgestellten Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ ersetzt. Wir erhalten auf diese Weise das **konkrete (1-α)-Konfidenzintervall**

(10.6) $$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

in dem der unbekannte Parameter μ im Mittel in $(1-\alpha)\cdot 100\%$ aller Fälle enthalten ist.

Approximative Gültigkeit des Konfidenzintervalls (10.5) bei nicht-normalverteilter Grundgesamtheit, wenn Annahme 2a durch

Annahme 2b: großer Stichprobenumfang (Faustregel: $n > 30$)

ersetzt wird ($\rightarrow$ Zentraler Grenzwertsatz).

Beispiel 10.2:

In einer Brauerei ist eine Abfüllanlage für Bier auf eine Sollmenge von 1 hl (= 100 l) pro Fass eingestellt worden. Der Hersteller der Anlage hat angegeben, dass die Abfüllmengen mit einer Standardabweichung von 0,3 l streuen. Im Zeitablauf ist es möglich, dass die Sollmenge von 1 hl nicht konstant bleibt, so dass die Abfüllmaschine neu justiert werden muss. Der Produktionsleiter hat Bedenken, ob die Sollmenge tatsächlich noch 1 hl beträgt, nachdem bei einer Stichprobe von 50 Fässern Bier eine durchschnittliche Abfüllmenge von 100,2 l gemessen worden ist. Er bestimmt ein 95%-Konfidenzintervall um zu überprüfen, ob der Produktionsprozess noch unter den gesetzten Bedingungen verläuft.

<u>Schritt 1:</u> Festlegung des Konfidenzniveaus 1-α

Das Konfidenzniveau 1–α ist hier in der Aufgabe vorgegeben und beträgt 0,95.

<u>Schritt 2:</u> 95%-Konfidenzintervall für μ

Gesucht ist ein Konfidenzintervall für den Mittelwert der Grundgesamtheit (=Sollmenge). Als Punktschätzer wird daher das Stichprobenmittel $\overline{X}$ verwendet, die Standardabweichung σ ist hier aufgrund der Herstellerangabe vorgegeben. Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes (Faustregel: n=50 > 30) ist das normalverteilte Konfidenzintervall

$$P\left(\overline{X} - z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

anzuwenden.

Schritt 3: Ermittlung des (1-α/2)-Quantils $z_{0,975}$ der Standardnormalverteilung

Zu dem Konfidenzniveau 1-α = 0,95 benötigt man zur Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls das 0,975-Quantil der Standardnormalverteilung:

$$\Psi(z) = 0{,}95 \;\rightarrow\; z = 1{,}96$$

Schritt 4: Bestimmung des konkreten 95%-Konfidenzintervalls

Mit n = 50, $\bar{x}$ = 100,2 und σ = 0,3 erhält man das konkrete 95%-Konfidenzintervall

$$\left[\bar{x} - z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{x} + z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$\left[100{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{50}}\,;\; 100{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{50}}\right] =$$

$$[100{,}2 - 0{,}083\,;\; 100{,}2 + 0{,}083] = [100{,}117\,;\; 100{,}283].$$

Interpretation:

Aufgrund der vorliegenden Stichprobe erstreckt sich das 95%-Konfidenzintervall auf einen Bereich von 100,117 l bis 100,283 l. Da dieses Intervall die eingestellte Soll-Abfüllmenge von 100 l nicht enthält, kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass der Produktionsprozeß noch unter den gesetzten Bedingungen verläuft. Die Firma wird daher die Abfüllanlage neu justieren. ♦

B. Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2 (kleine Stichproben)

Annahme 1b: Varianz σ^2 unbekannt

Annahme 2a: Grundgesamtheit normalverteilt

In diesem Fall werden Punktschätzer für μ und σ^2 zur Bestimmung des Konfidenzintervalls benötigt. Als Punktschätzer für μ verwenden wir wiederum das arithmetische Mittel der Stichprobe $\overline{X}$. Als Punktschätzer für die Varianz σ^2 wird die erwartungstreue Schätzfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

verwendet.

Da die Grundgesamtheit normalverteilt ist, ihre Varianz σ^2 jedoch aus der Stichprobe geschätzt werden muss, ist die standardisierte Zufallsvariable (=standardisiertes Stichprobenmittel)

(10.7) $$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

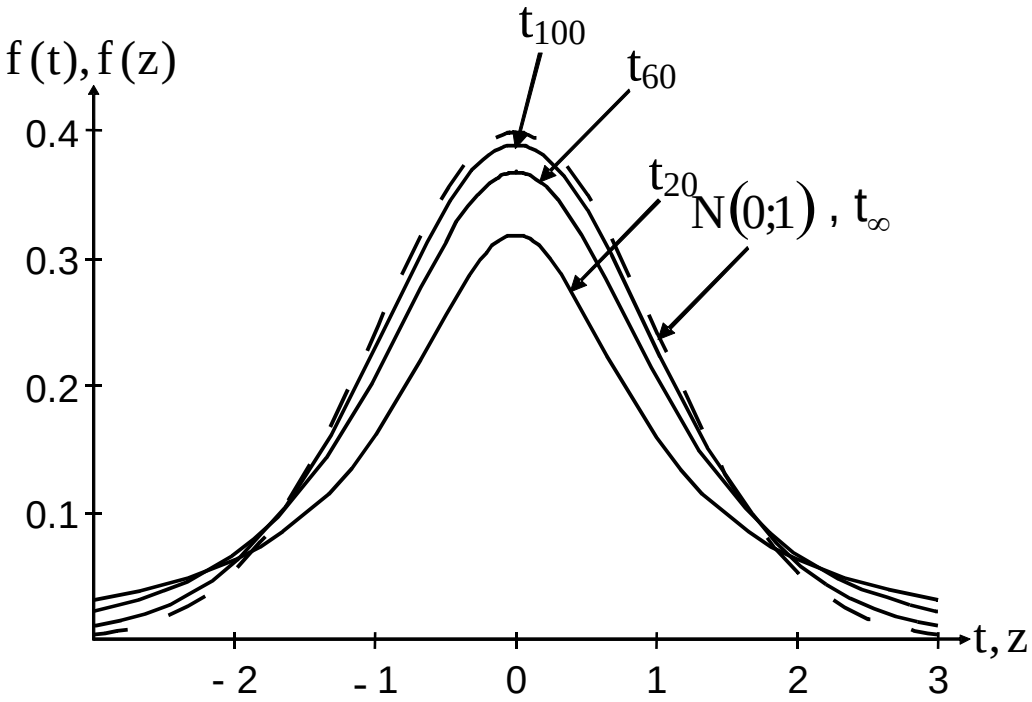
t-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden.

Exkurs: t-Verteilung

Die **t-Verteilung** (Student-t-Verteilung) gehört zu den stetigen Verteilungsmodellen und verläuft symmetrisch um den Nullpunkt. Ihre Dichtefunktion ist in Abhängigkeit von der Anzahl der v Freiheitsgrade in nachfolgenden Abbildung dargestellt.

Die **t-Verteilung** ist flacher und hat breitere Enden als die **Standardnormalverteilung**. Damit hat sie eine größere Streuung als die Standardnormalverteilung. Sie ergibt sich dadurch, dass mit der Verwendung des Punktschätzers S^2 für die Varianz der Grundgesamtheit σ^2 ein gewisser Verlust an Genauigkeit einhergeht. Wenn der Stichprobenumfang n und damit auch die Zahl der Freiheitsgrade über alle Grenzen wächst, geht die t-Verteilung in die Standardnormalverteilung über.

Abbildung: Dichtefunktionen der t-Verteilung und Normalverteilung



Begriff der Freiheitsgrade

Die Summe der Abweichungen der Realisationen x_i der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert μ bei n-maliger Wiederholung eines Zufallsvorgangs,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=(x_1-\mu)+(x_2-\mu)+\ldots+(x_n-\mu)$$

,

hat n Freiheitsgrade, da sie beliebige Werte annehmen kann. Dies ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn der Erwartungswert μ durch den Punktschätzer $\bar{x}$ ersetzt wird. Die Summe der Abweichungen der Realisationen x_i der Zufallsvariablen X vom Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ ist aufgrund der Schwerpunkteigenschaft des arithmetischen Mittels gleich 0:

(E1) $$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})=0$$

.

Wenn n-1 Abweichungen (x_i - $\bar{x}$) gegeben sind, liegt aufgrund der Bedingung (Restriktion) E1 die n-te Abweichung (x_n- $\bar{x}$) fest:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\underbrace{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_{n-1}-\bar{x})}_{\text{gegeben}}+\underbrace{(x_n-\bar{x})}_{\substack{\text{nicht mehr}\\ \text{frei variierbar}}}=0$$

Man sagt daher, dass die Abweichungssumme E1 n-1 Freiheitsgrade hat, was auch für die Abweichungsquadratsumme und damit für die Stichprobenvarianz s^2 zutrifft. Allgemein gilt, dass mit jedem zusätzlich geschätzten Parameter 1 Freiheitsgrad verloren geht.

Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable T in das symmetrische Intervall zwischen $-t_{n-1;1-\alpha/2}$ und $t_{n-1;1-\alpha/2}$ fällt:

(10.8) $$P\left(t_{n-1,\alpha/2} \le T \le t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = P\left(-t_{n-1,1-\alpha/2} \le T \le t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$t_{n-1;1-\alpha/2}$ ist das (1-α/2)-Quantil einer t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden

Nach Einsetzen von (10.7) für T erhält man

$$P\left(-t_{n-1,1-\alpha/2} \le \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Nach einigen Umformungen erhält man hieraus das Konfidenzintervall für μ zum Niveau 1-α:

(10.9) $$\boxed{P\left(\overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha}$$

Das Intervall (10.9) ist das **Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert μ einer Grundgesamtheit zum Niveau 1-α**, sofern die Grundgesamtheit normalverteilt und ihre Varianz σ^2 unbekannt ist.

Da die t-Verteilung für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung strebt, kommt das **t-verteilte Konfidenzintervall** bei **kleinen Stichproben** zur Anwendung, so-fern die Varianz σ^2 unbekannt ist (Faustregel: $n \le 30$).

Konkretes (1-α)-Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2 (kleiner Stichprobenumfang):

(10.10) $$\left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

In dem konkreten Konfidenzintervall (10.10) sind die Zufallsvariablen $\bar{X}$ und S durch ihre Stichprobenrealisationen ersetzt worden. Es enthält im Durchschnitt in (1-α)$\cdot$ 100% aller Fälle den unbekannten Parameter μ der Grundgesamtheit.

Vergleich einiger (1-α/2)-Quantile der t-Verteilung bei alternativen Stichprobenumfängen n mit den entsprechenden Quantilen $z_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung:

	$t_{n-1,1-\alpha/2}$					
1-α	n = 5	n = 10	n = 30	n = 60	n = ∞	$z_{1-\alpha/2}$
0,95	2,776	2,262	2,045	2,000	1,960	1,960
0,99	4,604	3,250	2,756	2,660	2,576	2,576

Beispiel 10.3:

Wie in Beispiel 10.2 soll eine Abfüllanlage für Bier daraufhin überprüft werden, ob sie korrekt auf eine Sollmenge von 1 hl (= 100 l) pro Fass eingestellt ist. Im Unterschied zum vorherigen Beispiel fehlt eine Herstellerangabe über die Streuung der Abfüllmengen. Sie ist vielmehr aus einer Stichprobe von 25 Fässern Bier berechnet worden. Hierbei ergab sich eine durchschnittliche Abfüllmenge von 100,2 l bei einer Standardabweichung von 0,28 l.

Wie lautet unter diesen Bedingungen das 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Abfüllmenge (=Sollmenge)?

<u>Schritt 1:</u> Festlegung des Konfidenzniveaus 1-α

Das Konfidenzniveau 1–α ist hier in der Aufgabe vorgegeben und beträgt 0,95.

<u>Schritt 2:</u> 95%-Konfidenzintervall für μ

Gesucht ist ein Konfidenzintervall für den Mittelwert der Grundgesamtheit (=Sollmenge). Als Punktschätzer wird daher das Stichprobenmittel $\overline{X}$ verwendet, die Standardabweichung der Grundgesamtheit, σ, wird aufgrund der fehlenden Herstellerangabe durch die Standardabweichung der Stichprobe, S, geschätzt. Aufgrund des kleinen Stichprobenumfangs (Faustregel: n=25 < 30) ist das t-verteilte Konfidenzintervall

$$P\left(\overline{X} - t_{24;0,975} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{24;0,975} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

anzuwenden.

<u>Schritt 3:</u> Ermittlung des (1-α/2)-Quantil $t_{24;0,975}$ der t-Verteilung

Zu dem Konfidenzniveau 1-α = 0,95 benötigt man zur Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls das 0,975-Quantil der t-Verteilung mit n-1=24 Freiheitsgraden:

$$t_{24;0,975} = 2,06.$$

<u>Schritt 4:</u> Bestimmung des konkreten 95%-Konfidenzintervalls

Mit n = 25, $\overline{X}$ = 100,2 und s = 0,28 erhält man das konkrete 95%-Konfidenzintervall

$$\left[\bar{x} - t_{24;0,975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{24;0,975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$\left[100,2 - 2,06 \cdot \frac{0,28}{\sqrt{25}}\ ;\ 100,2 + 2,06 \cdot \frac{0,28}{\sqrt{25}}\right] =$$

$$[100,2 - 0,115\ ;\ 100,2 + 0,115] = [100,085\ ;\ 100,315].$$

<u>Interpretation:</u>

Da das konkrete 95%-Konfidenzintervall die ursprüngliche Sollmenge von 100 l nicht überdeckt, ist Abfüllanlage neu zu adjustieren. ♦

C. Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2 (große Stichproben)

Annahme 1b: Varianz σ^2 unbekannt
Annahme 2b: großer Stichprobenumfang (n>30)

Da die t-Verteilung für $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung strebt, geht das t-verteilte Konfidenzintervall (10.9) bei großem Stichprobenumfang in das normalverteilte Konfidenzintervall

(10.11) $$P\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

über (Faustregel: n>30). Die Annahme einer normalverteilten Grundgesamtheit ist hier nicht mehr erforderlich, da die Normalverteilung der Grenzen des Konfidenzintervalls aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt.

Konkretes (1-α)-Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz σ^2 (großer Stichprobenumfang):

(10.12) $$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Beispiel 10.3:

Hauptursache für Löcher bei Inventuren im Einzelhandel sind Kundendiebstähle. Eine Stichprobenerhebung bei 30 Einzelhandelsunternehmen in einer Region ergab, dass bei 1600 Ladendiebstählen in einem Geschäftsjahr im Durchschnitt Waren im Wert von 101,50 € entwendet worden sind. Der Wert der entwendeten Waren variiert dabei mit einer Standardabweichung von 60 €.

a) Wie lautet das 99 %-Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Wert der Diebstähle?

<u>Schritt 1:</u> Festlegung des Konfidenzniveaus 1-α

Das Konfidenzniveau 1–α ist hier in der Aufgabe vorgegeben und beträgt 0,99.

<u>Schritt 2:</u> 99%-Konfidenzintervall für μ

Gesucht ist ein Konfidenzintervall für den Mittelwert aller Kundendiebstähle (=Grundgesamtheit). Als Punktschätzer für μ wird daher das Stichprobenmittel $\overline{X}$ verwendet, die Standardabweichung aller Kundendiebstähle, σ, wird durch die Standardabweichung der Stichprobe, S, geschätzt. Aufgrund des großen Stichprobenumfangs (Faustregel: n=1600 > 30) kann trotz fehlender Kenntnis der Varianz σ^2 das normalverteilte Konfidenzintervall

$$P\left(\overline{X} - z_{0,995} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{0,995} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}99$$

angewandt werden.

Schritt 3: Ermittlung des (1-α/2)-Quantils $z_{0,995}$ der Standardnormalverteilung

Zu dem Konfidenzniveau 1-α = 0,99 benötigt man zur Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls das 0,995-Quantil der Standardnormalverteilung:

$$\Psi(z_{0,995}) = 0{,}99 \;\rightarrow\; z_{0,995} = 2{,}5758$$

Schritt 4: Bestimmung des konkreten 99%-Konfidenzintervalls

Mit n = 1600, $\overline{x}$ = 101,50 und s = 60 erhält man das konkrete 99%-Konfidenzintervall

$$\left[\overline{x} - z_{0,995} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{0,995} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$\left[101{,}50 - 2{,}5758 \cdot \frac{60}{\sqrt{1600}},\quad 101{,}50 + 2{,}5758 \cdot \frac{60}{\sqrt{1600}}\right] =$$

$$\left[101{,}50 - 3{,}86,\quad 101{,}50 + 3{,}86\right] = \left[97{,}64,\quad 105{,}36\right].$$

Interpretation:

Als Intervallschätzung für die durchschnittliche Höhe der Diebstähle erhält man bei einem Konfidenzniveau von 99% einen Bereich von 97,64 € bis 105,36 €. ♦

b) Wir interessieren uns nun dafür, wie hoch man bei einem Konfidenzniveau von 99% den Werteverlust zu veranschlagen hat, wenn die Einzelhandelsunternehmen von 48000 Kundendiebstählen und einer Aufklärungsquote von 60% ausgehen können.

Es wird damit gerechnet, dass 40% der 48000 Diebstähle, also 19200 Diebstähle nicht aufgeklärt werden. Da nur durch diese Diebstähle ein Verlust entsteht, ist hier von einem Umfang der Grundgesamtheit in Höhe von N=19200 auszugehen. Es bezeichnet

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

die durchschnittliche Höhe der Kundendiebstähle in der Grundgesamtheit mit dem Umfang N, so dass

$$N\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

der Werteverlust ist, der bei N=19200 Diebstählen auftreten wird. Da μ unbekannt ist, ist natürlich auch Nμ unbekannt. Gesucht ist also das 99%-Konfidenzintervall für Nμ. Hierzu benötigen wir die Varianz des Schätzers N $\overline{X}$ für Nμ,

$$V(N\overline{X}) = N^2 V(\overline{X}) = N^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

da μ durch $\overline{X}$ geschätzt wird. Bei unbekannter Varianz in der Grundgesamtheit wird σ^2 durch S^2 ersetzt. Die Standardabweichung der Zufallsvariablen N $\overline{X}$ ist dann

durch

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(N\overline{X}\right)} = N \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

gegeben.

Daraus erhält man das 99 %-Konfidenzintervall für Nμ:

$$P\left(N\overline{X} - z_{0,995} \cdot \frac{NS}{\sqrt{n}} \le N\mu \le N\overline{X} + z_{0,995} \cdot \frac{NS}{\sqrt{n}} \right) = 0{,}99$$

oder

$$P\left[N\left(\overline{X} - z_{0,995} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \le N\mu \le N\left(\overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \right] = 0{,}99.$$

Offenbar erhält man die Intervallgrenzen des Konfidenzintervalls für Nμ, indem die Grenzen des Konfidenzintervalls für μ mit N multipliziert werden. Mit N=19200 ergibt sich als konkretes Konfidenzintervall:

$$[19200 \cdot 97{,}64; 19200 \cdot 105{,}36] = [1874688;\ 2022912]$$

In durchschnittlich 99 % aller Fälle ist der Werteverlust durch Kundendiebstähle in diesem Intervall enthalten. Dieses Ergebnis gilt allerdings nur dann, wenn etwa 40% der Diebstähle nicht aufgeklärt werden. ♦

10.3 Konfidenzintervall für den Anteilswert

Gesucht ist ein **Konfidenzintervall für** den **unbekannten Anteil** p der Merkmalsträger mit einer Eigenschaft A. Da p zugleich die Wahrscheinlichkeit angibt, dass an einem zufällig ausgewählten Merkmalsträger die Eigenschaft A festgestellt wird, lässt sich dieses **Konfidenzintervall** auch als eine Intervallschätzung für eine **unbekannte Wahrscheinlichkeit** P(A) interpretieren.

Die n unabhängigen und identisch verteilten Stichprobenvariablen $X_1,...,X_n$ können nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Als Punktschätzer für den unbekannten Anteilswert p der Grundgesamtheit verwenden wir den Stichprobenanteilswert

$$\overline{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

der die relative Häufigkeit derjenigen Merkmalsträger angibt, die über die Eigenschaft A verfügen. $\overline{P}$ ist eine erwartungstreue, effiziente und konsistente Schätzfunktion für p.

Die standardisierte Zufallsvariable (= standardisierter Stichprobenanteilswert)

(10.13) $$Z = \frac{\overline{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

ist bei großen Stichproben aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes asymptotisch standardnormalverteilt (Faustregel: $n > 9/[\overline{p}(1-\overline{p})]$), so dass

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \le \frac{\overline{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

gilt. Wird der Standardfehler $\sigma_{\overline{P}} = \sqrt{p(1-p)/n}$ hierin unter Verwendung der Schätzfunktion für die Varianz von $\overline{P}$

(10.14) $$\hat{\sigma}^2_{\overline{P}} = \frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}$$

geschätzt, erhält man das Konfidenzintervall für den Anteilswert p zum Niveau 1-α:

(10.15) $$P\left(\overline{P} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})}}{\sqrt{n}} \le p \le \overline{P} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Das konkrete Konfidenzintervall für p ist durch

(10.16) $$\left[\overline{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}}{\sqrt{n}}; \overline{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}}{\sqrt{n}}\right]$$

gegeben.

Beispiel 10.4:

Bei einer Qualitätskontrolle wurde an 100 von 500 Stücken ein Mangel festgestellt. Wie groß ist das 95%-Konfidenzintervall für den Anteil p der mit einem Mangel behafteten Teile in der Produktion?

<u>Schritt 1:</u> Festlegung des Konfidenzniveaus 1-α

Das Konfidenzniveau 1–α ist hier in der Aufgabe vorgegeben und beträgt 0,95.

<u>Schritt 2:</u> 95%-Konfidenzintervall für p

Zu bestimmen ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit p, dass ein produziertes Stück einen Mangel aufweist. Als Punktschätzer für p verwenden wir den Stichprobenanteilswert $\overline{P}$, mit dem auch der Standardfehler $\sigma_{\overline{P}}$ geschätzt wird. Mit $\overline{p}$ = 100/500 = 0,2 erhält man die Ungleichung

$$(n = 500) > \frac{9}{\overline{p}(1-\overline{p})} = \frac{9}{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)} = 56{,}25$$

die es erlaubt, das normalverteilte Konfidenzintervall

$$P\left(\overline{P} - z_{0,975} \cdot \frac{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})}}{\sqrt{n}} \le p \le \overline{P} + z_{0,975} \cdot \frac{\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})}}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p anzuwenden.

<u>Schritt 3:</u> Ermittlung des (1-α/2)-Quantils $z_{0,975}$ der Standardnormalverteilung

Zu dem Konfidenzniveau 1-α = 0,95 benötigt man zur Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls das 0,975-Quantil der Standardnormalverteilung:

$$\Psi(z_{0,975}) = 0{,}95 \;\rightarrow\; z_{0,975} = 1{,}96$$

<u>Schritt 4:</u> Bestimmung des konkreten 95%-Konfidenzintervalls

Mit n = 500 und $\bar{p}$ = 0,2 erhält man das konkrete 95%-Konfidenzintervall

$$\left[\bar{p} - z_{0,975} \cdot \frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}; \bar{p} + z_{0,975} \cdot \frac{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}}{\sqrt{n}}\right] =$$

$$\left[0{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}}{\sqrt{500}}; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}2 \cdot (1-0{,}2)}}{\sqrt{500}}\right] =$$

$$\left[0{,}2 - 1{,}96 \cdot 0{,}018; 0{,}2 + 1{,}96 \cdot 0{,}018\right] = [0{,}165; 0{,}235] \;.$$

♦

10.4 Konfidenzintervall für die Varianz

Wir gehen wieder von einer unabhängigen und identisch verteilten Stichprobe $(X_1, X_2, ..., X_n)$ einer Grundgesamtheit aus. Es wird ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für die unbekannte Varianz σ^2 unter folgenden Voraussetzungen konstruiert:

Annahme 1: (Approx.) normalverteilte Grundgesamtheit
Annahme 2: Erwartungswert μ unbekannt.

Wird der Erwartungswert μ durch den Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ geschätzt, dann ist die Schätzfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

ein geeigneter Punktschätzer für die unbekannte Varianz σ^2. Die Zufallsvariable $(n-1)\cdot S^2/\sigma^2$ ist chi-quadrat-verteilt (χ^2-verteilt) mit n-1 Freiheitsgraden:

(10.17a) $$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

χ^2 kann alternativ durch

(10.17b) $$\chi^2 = \frac{n\cdot S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ oder (10.17c) $$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

gleichwertig berechnet werden.

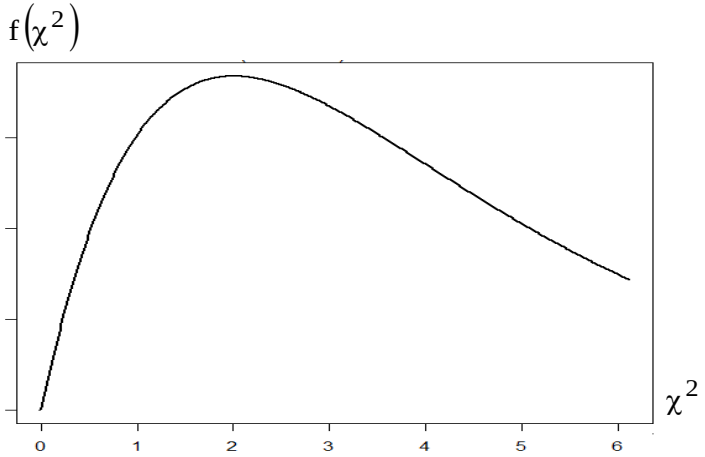
Exkurs: χ^2-Verteilung

Es seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$,

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma},$$

unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann besitzt die Quadratsumme

$$(*)\ \chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$



eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Hierbei lässt sich die Quadratsumme auch in der Form

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

darstellen.

Wird μ durch den Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ geschätzt, dann ist die Quadratsumme

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$$

χ^2-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden. Allgemein ist (*) χ^2-verteilt mit n-k Freiheitsgraden, wenn k Parameter aus der Stichprobe zu schätzen sind. •

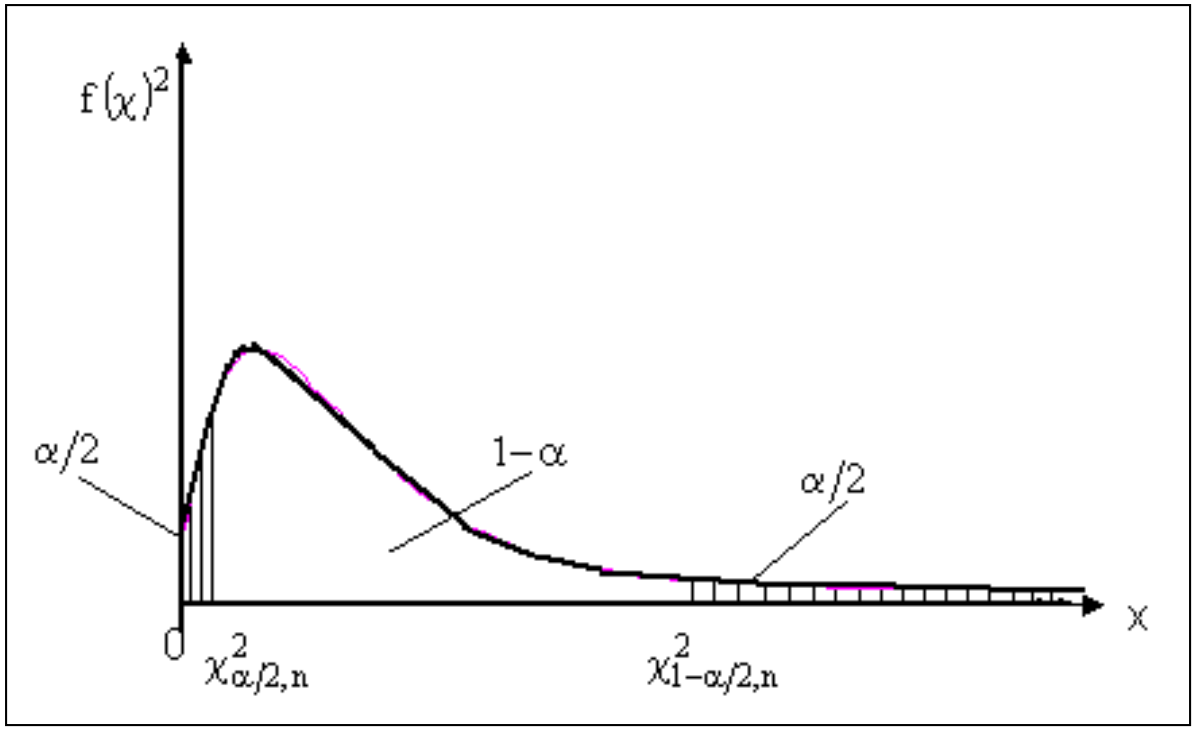
Es bezeichnen $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ und $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ das $\alpha/2$ und 1-$\alpha/2$-Quantil der χ^2-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable (10.17) in das Intervall zwischen $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ und $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ fällt, durch

(10.18) $$P\left(\chi^2_{n-1;\alpha/2} \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

gegeben. Hieraus erhält man nach Umformungen das (1-α)-Konfidenzintervall für die unbekannte Varianz σ^2:

(10.19) $$\boxed{P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right) = 1-\alpha \quad .}$$

Abbilung: Dichtefunktion und Quantile der χ^2-Verteilung



Konkretes Konfidenzintervall für σ^2 zum Niveau 1-α:

(10.20) $$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$$

Beispiel 10.5:

Ein Unternehmen stellt Schrauben her. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang 91 ergibt für den Durchmesser ein arithmetisches Mittel von 5 mm bei einer Standardabweichung von 0,03 mm.

Führen Sie eine Intervallschätzung für die mit der Standardabweichung gemessene Präzision des Schraubendurchmessers bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90% durch!

Wir bestimmen zunächst ein 90%-Konfidenzintervall für die Varianz σ^2, aus dem dann das Intervall für die Standardabweichung bestimmt wird.

<u>Schritt 1:</u> Festlegung des Konfidenzniveaus 1-α

Das Konfidenzniveau 1–α ist hier in der Aufgabe vorgegeben und beträgt 0,90.

<u>Schritt 2:</u> 90%-Konfidenzintervall für σ^2

Gesucht ist ein Konfidenzintervall für die Varianz des Schraubendurchmessers der von dem Unternehmen produzierten Schrauben. Als Punktschätzer hierzu verwenden wir den erwartungstreuen Varianzschätzer S^2:

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{n-1;0,95}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_{n-1;0,05}}\right) = 0{,}90 \ .$$

<u>Schritt 3:</u> Ermittlung des Quantile $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ und $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ der χ^2-Verteilung

Zu dem Konfidenzniveau 1-α = 0,90 benötigt man zur Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls das 0,05- und 0,95-Quantil der χ^2-Verteilung. Für n-1=90 Freiheitsgraden ergeben sich die Tabellenwerte

$$\chi^2_{90;0,05} = 69{,}1 \quad \text{und} \quad \chi^2_{90;0,95} = 113{,}1 \quad .$$

<u>Schritt 4:</u> Bestimmung des konkreten 90%-Konfidenzintervalls für σ^2

Mit n = 91 und $s^2 = 0{,}03^2$ erhält man das konkrete 90%-Konfidenzintervall

$$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{90;0,95}}, \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{90;0,05}}\right] = \left[\frac{90\cdot 0{,}03^2}{113{,}1}; \frac{90\cdot 0{,}03^2}{69{,}1}\right] =$$

$$\left[\frac{0{,}081}{113{,}1}; \frac{0{,}081}{69{,}1}\right] = [0{,}000716; 0{,}001172]$$

für σ^2.

Das 90%-Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ (= Präzision) ergibt sich nach Ziehen der Wurzel aus den Intervallgrenzen:

$$\left[\sqrt{0{,}000716}; \sqrt{0{,}001172}\right] = [0{,}027; 0{,}034]$$

Mit 90%iger Sicherheit liegt die Standardabweichung des Schraubendurchmessers zwischen 0,027 und 0,034 mm. ♦

10.5 Notwendiger Stichprobenumfang

● Zielkonflikt zwischen Sicherheit und Genauigkeit

Der Zielkonflikt zwischen Sicherheit und Genauigkeit soll anhand des Konfidenzintervalls für den Erwartungswert μ bei bekannter Varianz σ^2 aufgezeigt werden.

Länge L des Konfidenzintervalls (10.5) als Differenz zwischen Intervallobergrenze und –untergrenze:

(10.21) $$L = \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Wird das Konfidenzniveau 1-α erhöht, hat man zwar eine **größere Sicherheit**, dass der unbekannte Parameter μ in dem Konfidenzintervall liegt.
- Mit einem höheren Konfidenzniveau 1-α wird das Quantil $z_{1-\alpha/2}$ größer, so dass das Intervall breiter wird. Ein breiteres Intervall bedeutet aber eine **ungenauere Intervallschätzung**.

● Stichprobenumfang und Genauigkeit

Bei **gegebenem Konfidenzniveau** 1-α hängt die Länge des Konfidenzintervalls (10.5) allein vom Stichprobenumfang n ab. Bei gleichem Stichprobenumfang ergibt sich eine gleiche Länge der Konfidenzintervalle. Mit **wachsendem Stichprobenumfang** n **erhöht sich** die **Genauigkeit**.

Determinanten des notwendigen Stichprobenumfangs

- Konfidenzniveau 1-α
- Streuung in der Grundgesamtheit
- Genauigkeit

A. Notwendiger Stichprobenumfang bei Intervallschätzung von μ

Fehlermarge (= halbe Länge des Konfidenzintervalls)

(10.22) $$e = \frac{1}{2} \cdot L = \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

Notwendiger Stichprobenumfang:
Stichprobenumfang, der mindestens erforderlich ist, damit eine vorgegebene Fehlermarge e bei gegebenem Konfidenzniveau 1-α nicht überschritten wird

(10.23a) $$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right)^2 = \frac{z^2_{1-\alpha/2} \cdot \sigma^2}{e^2}$$

Reduktion der Fehlermarge (= Stichprobenfehler) um die Hälfte
→ wird nicht durch Verdoppelung, sondern Vervierfachung des Stichprobenumfangs erreicht:

$$n_{e/2} = \frac{z^2_{1-\alpha/2} \cdot \sigma^2}{(e/2)^2} = \frac{z^2_{1-\alpha/2} \cdot \sigma^2}{(1/4) \cdot e^2} = 4 \cdot n_e$$

n_e: Stichprobenumfang bei ursprünglicher Fehlermarge e

$n_{e/2}$: Stichprobenumfang bei halber Fehlermarge

Allgemein kann eine Verringerung der Fehlermarge nur durch eine überproportionale Erhöhung des Stichprobenumfangs erreicht werden.

In der Regel wird die Varianz der Grundgesamtheit, σ^2, unbekannt sein. Man kann den Stichprobenumfang n in (10.23a) in diesem Fall nicht einfach unter Verwendung der Stichprobenvarianz s^2 bestimmen, da die Stichprobe ja erst noch gezogen werden soll. Vielmehr ist σ^2 durch die Vorabinformation σ^{*2} zu ersetzen:

(10.23b) $$n = \frac{z^2_{1-\alpha/2} \cdot \sigma^{*2}}{e^2} \quad .$$

Eine Vorabinformation σ^{*2} über die Varianz der Grundgesamtheit kann sich z.B. aus vorherigen Untersuchungen ergeben.

Beispiel 10.6:

Ein Marktforschungsinstitut führt eine Untersuchung über die Einkommenssituation der deutschen Bevölkerung durch. Aufgrund ähnlicher Untersuchungen in Frankreich und den Niederlanden wird eine Standardabweichung in der Grundgesamtheit von

$$\sigma^* = 2.000\,[€]$$

unterstellt. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, wenn die Fehlermarge bei 200 € und der Sicherheitsgrad 1-α bei 95 % liegen sollen?

Wir bestimmen den notwendigen Stichprobenumfang unter Verwendung von Formel (10.23b):

$$n = \frac{z_{0,975}^2 \cdot \sigma^{*2}}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 2.000^2}{200^2} = 384{,}16\,.$$

Aufgrund der Mindestbedingung wählen wir den nächsthöheren Wert. Der notwendige Stichprobenumfang muss also mindestens 385 Personen umfassen. ♦

B. Notwendiger Stichprobenumfang bei Intervallschätzung von p

Bei einer Schätzung des Anteilswerts oder der Wahrscheinlichkeit p ist die Varianz der Grundgesamtheit (= Varianz der Bernoulli-Verteilung) σ^2 durch p(1-p) gegeben:

$$\sigma^2 = p\cdot(1-p).$$

Damit erhält man bei 0,1-Variablen (1: Ereignis A, 0: Ereignis $\overline{A}$) die **Fehlermarge**

(10.24) $$e = \frac{1}{2}\cdot L = \frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Nach Auflösen nach n ergibt sich hieraus

(10.25a) $$n = \frac{z^2_{1-\alpha/2}\cdot p\cdot(1-p)}{e^2}.$$

Ersetzt man hierin die unbekannte Wahrscheinlichkeit p durch die Vorabinfomation p*, dann erhält man den **notwendigen Stichprobenumfang**

(10.25b) $$\boxed{n = \frac{z^2_{1-\alpha/2}\cdot p^*\cdot(1-p^*)}{e^2}.}$$

Sofern keinerlei Vorabinformationen vorhanden sind, geht man bei der Festlegung des Stichprobenumfangs vom **ungünstigsten Fall** p*=0,5 aus (max. Varianz):

(10.25c) $$n = \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{4\cdot e^2}.$$

Beispiel 10.7:

Ein Meinungsforschungsinstitut soll ermitteln, ob die Mehrheit der Bundesbürger für eine Direktwahl des Bundespräsidenten ist. Wie groß ist der Stichprobenumfang mindestens zu wählen, wenn die Genauigkeit der Schätzung bei einem Konfidenzniveau von 90 % bei ±3 % liegen soll?

Da keine Vorabinformationen über p vorhanden sind, gehen wir vom ungünstigsten Fall p = 0,5 aus. Damit beträgt der notwendige Stichprobenumfang

$$n = \frac{z_{0,95}^2}{4 \cdot e^2} = \frac{1,6449^2}{4 \cdot 0,03^2} = \frac{2,7057}{0,0036} = 751,6$$

Das Meinungsforschungsinstitut muss also mindestens 752 Personen befragen. ♦