Apl. Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

Aufgaben mit Lösungen zur Zeitreihenanalyse (Kap. 2)

Aufgabe 2.1

In welche Bewegungskomponenten lassen sich ökonomische Zeitreihen zerlegen? Wie lassen sich die Komponenten inhaltlich erklären?

Lösung:

Ökonomische Zeitreihen lassen sich in systematische und eine Residualkomponente zerlegen. Während die systematischen Komponenten gewisse Regelmäßigkeiten enthalten, wird die Residualkomponente bei der Zeitreihenzerlegung als Restkomponente aufgefasst, die durch Zufallseinflüsse und irreguläre Bewegungen geprägt ist.

Die systematische Komponente umfasst die glatte Komponente, die aus Trend und Konjunktur besteht, und bei unterjährigen Zeitreihen zusätzlich die Saisonkomponente. Der Trend, der z.B. auf den technischen Fortschritt, das Bevölkerungswachstum oder Produktzyklen zurückgeführt werden kann, spiegelt die langfristige Bewegungsrichtung einer Zeitreihe wider. Die Konjunkturkomponente gibt das Auf und Ab der wirtschaftlichen Aktivität um den Trend wieder. Die zyklischen Konjunkturschwankungen haben eine variable Wellenlänge von etwa 4 bis 8 Jahren.

Die z.B. in Quartals- oder Monatsdaten vorzufindene Saisonkomponente hat dagegen eine konstante Wellenlänge von einem Jahr. Sie ist auf natürliche oder institutionell bedingte jahreszeitliche Einflüsse zurückzuführen. Natürliche Einflüsse sind z.B. witterungsbedingte Einflüsse, während institutionell bedingte Einflüsse z.B. durch Feiertage, Ferien, und Zahlungstermine hervorgerufen werden.

Aufgabe 2.2

Der Rohölpreis ($) hat sich in einem Zeitraum von acht Perioden unter beträchtlichen Schwankungen verändert:

Periode	1	2	3	4	5	6	7	8
Rohölpreis ($)	22	26	30	27	24	28	31	27

a) Glätten Sie die Rohölpreise unter Verwendung eines 3-gliedrigen gleitenden Durchschnitts!

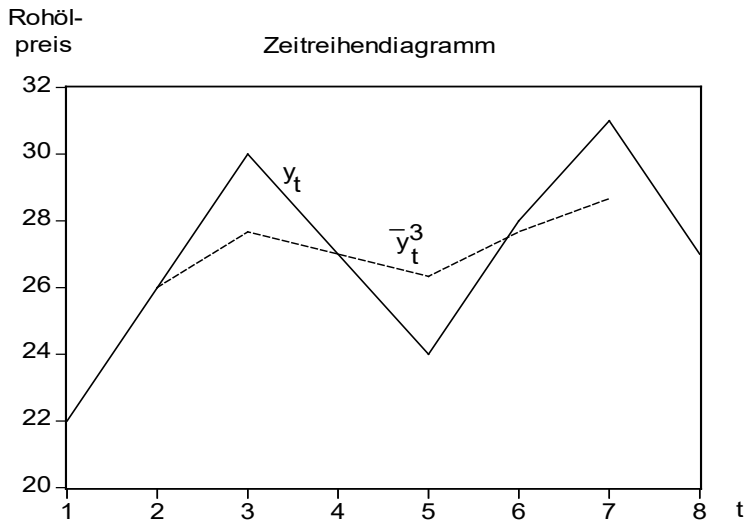
Lösung:

3-gliedriger gleitender Durchschnitt: $\bar{y}_t^3 = \frac{1}{3} \cdot (y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$

Periode (t)	y_t	$\bar{y}_t^3$
1	22	–
2	26	$\bar{y}_2^3 = \frac{1}{3} \cdot (22 + 26 + 30) = 26{,}0$
3	30	$\bar{y}_3^3 = \frac{1}{3} \cdot (26 + 30 + 27) = 27{,}7$
4	27	$\bar{y}_4^3 = \frac{1}{3} \cdot (30 + 27 + 24) = 27{,}0$
5	24	$\bar{y}_5^3 = \frac{1}{3} \cdot (27 + 24 + 28) = 26{,}3$
6	28	$\bar{y}_6^3 = \frac{1}{3} \cdot (24 + 28 + 31) = 27{,}7$
7	31	$\bar{y}_7^3 = \frac{1}{3} \cdot (28 + 31 + 27) = 28{,}7$
8	27	–

b) Visualisieren Sie den Glättungseffekt der gleitenden 3er Durchschnitte in einem Zeitreihendiagramm!

Lösung:



Aufgabe 2.3

Was versteht man unter der Saisonkomponente im Komponentenmodell? Erläutern Sie das Konzept einer saisonbereinigten Zeitreihe!

Lösung:

Die Saisonkomponente spiegelt jährlich wiederkehrende zyklische Schwankungen in unterjährigen Zeitreihen (z.B. Quartals- oder Monatsdaten) wider. Sie ist auf natürliche oder institutionell bedingte jahrzeitliche Einflüsse zurückzuführen.

Während die Wellenlänge der Saisonzyklen konstant ist und ein Jahr umfasst, kann ihre Amplitude konstant oder variabel sein. In ersterem Fall liegt eine konstante Sasionfigur vor, die durch das additive Komponentenmodell erfasst werden kann. Die sich in letzterem Fall ergebende variable Saisonfigur wird in einem multiplikativen Komponentenmodell abgebildet, sofern die Saisonausschläge im Zeitverlauf zu- oder abnehmen.

Hat man die Saisonkomponente ermittelt, lässt sie sich aus der originären Zeitreihe „herausrechnen“. Man erhält dadurch eine saisonbereinigte Zeitreihe, die angibt, wie sich eine Variable entwickelt hätte, wenn sie keinerlei saisonalen Einflüssen unterliegen würde. Wenn sich z.B. die Produktion in der Bauwirtschaft im Frühjahr erhöht, so kann dies durch eine veränderte Baukonjunktur und/oder witterungsbedingt verursacht sein. Die saisonbereinigte Produktion zeigt an, ob der Produktionsanstieg tatsächlich auf eine verbesserte ökonomische Entwicklung zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 2.4

Ein Maschinenbauunternehmen hatte in einem Zeitraum von 3 Jahren saisonal abhängige Bestellmengen für eine Spezialmaschine zu verzeichnen:

Jahr	1				2				3			
Quartal	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Bestellmenge	10	15	17	12	13	17	20	15	15	20	21	17

Hinweis: Rechnen Sie jeweils mit zwei Dezimalstellen!

a) Ermitteln Sie zentrierte gleitende Durchschnitte der Bestellmengen für das erste und dritte Jahr unter Beachtung der zeitlichen Zuordnung!

Lösung:

Zentrierte gleitende Durchschnitte (Quartalsdaten →p=4):

in Teil b) $\bar{y}_t^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2} \cdot y_{t+2} \right)$

d_{ij}	Periode Jahr (i)/Quartal (j)	y_{ij}	$\bar{y}_{ij}^4$
–	1 / I	10	–
–	1 /II	15	–
3,12	1 / III	17	$\bar{y}_{13}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10 + 15 + 17 + 12 + \frac{1}{2} \cdot 13 \right) = \frac{1}{4} \cdot 55{,}5 = 13{,}88$
-2,5	1 / IV	12	$\bar{y}_{14}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15 + 17 + 12 + 13 + \frac{1}{2} \cdot 17 \right) = \frac{1}{4} \cdot 58 = 14{,}5$
-2,13	2 / I	13	$\bar{y}_{21}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 17 + 12 + 13 + 17 + \frac{1}{2} \cdot 20 \right) = \frac{1}{4} \cdot 60{,}5 = 15{,}13$
1,12	2 / II	17	$\bar{y}_{22}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12 + 13 + 17 + 20 + \frac{1}{2} \cdot 15 \right) = \frac{1}{4} \cdot 63{,}5 = 15{,}88$
3,5	2 / III	20	$\bar{y}_{23}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 13 + 17 + 20 + 15 + \frac{1}{2} \cdot 15 \right) = \frac{1}{4} \cdot 66 = 16{,}5$
-2,13	2 / IV	15	$\bar{y}_{24}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 17 + 20 + 15 + 15 + \frac{1}{2} \cdot 20 \right) = \frac{1}{4} \cdot 68{,}5 = 17{,}13$
-2,63	3 / I	15	$\bar{y}_{31}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 20 + 15 + 15 + 20 + \frac{1}{2} \cdot 21 \right) = \frac{1}{4} \cdot 70{,}5 = 17{,}63$
2,0	3 / II	20	$\bar{y}_{32}^4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15 + 15 + 20 + 21 + \frac{1}{2} \cdot 17 \right) = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18{,}0$
–	3 / III	21	–
–	3 / IV	17	–

b) Bestimmen Sie die unnormierte Saisonkomponente der Bestellmengen unter der Annahme additiver Saisonschwankungen!

<u>Hinweis:</u> Die zentrierten gleitenden Durchschnitte für das zweite Jahr lauten in zeitlicher Reihenfolge 15,13; 15,88; 16,5 und 17,13.

Lösung:

$$d_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{ij}^{4} \quad (\text{s. Teil a})$$

$$s_1^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{3} d_{i1} = \frac{1}{2} \cdot [(-2{,}13) + (-2.63)] = -\frac{4{,}76}{2} = -2{,}38$$

$$s_2^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{3} d_{i2} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}12 + 2{,}0) = \frac{3{,}12}{2} = 1{,}56$$

$$s_3^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2} d_{i3} = \frac{1}{2} \cdot (3{,}12 + 3{,}5) = \frac{6{,}62}{2} = 3{,}31$$

$$s_4^* = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{2} d_{i4} = \frac{1}{2} \cdot [(-2{,}5) + (-2.13)] = -\frac{4{,}63}{2} = -2{,}32$$

c) Wie lautet die normierte Saisonkomponente?

Lösung:

$$\bar{d} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^{4} s_j^* = \frac{1}{4}[(-2{,}38) + 1{,}56 + 3{,}31 + (-2{,}32)] = \frac{1}{4} \cdot 0{,}17 = 0{,}04$$

$$s_1 = s_1^* - \bar{d} = -2{,}38 - 0{,}04 = -2{,}42$$

$$s_2 = s_2^* - \bar{d} = 1{,}56 - 0{,}04 = 1{,}52$$

$$s_3 = s_3^* - \bar{d} = 3{,}31 - 0{,}04 = 3{,}27$$

$$s_3 = s_4^* - \bar{d} = -2{,}32 - 0{,}04 = -2{,}36$$

d) Geben Sie die saisonbereinigten Werte für das erste Jahr an!

Lösung:

$$y_{ij}^* = y_{ij} - s_j$$

$$y_{11}^* = y_{11} - s_1 = 10 - (-2{,}42) = 12{,}42$$

$$y_{12}^* = y_{12} - s_2 = 15 - 1{,}52 = 13{,}48$$

$$y_{13}^* = y_{13} - s_3 = 17 - 3{,}27 = 13{,}73$$

$$y_{14}^* = y_{14} - s_4 = 12 - (-2{,}36) = 14{,}36$$

Aufgabe 2.5

Bei einem saisonabhängigen Produkt sind in einem Zeitraum von 3 Jahren pro Quartal folgende Bestellmengen registriert worden:

Jahr	1				2				3			
Quartal	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Bestellmenge	8	12	14	13	11	16	17	17	13	18	21	20

a) Glätten Sie die Zeitreihe der Bestellmenge mit einem zentrierten gleitenden Durchschnitt!

Lösung:

Zentrierte gleitende Durchschnitte (Quartalsdaten → p = 4);

für Teil b) $\bar{y}_t^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2}\cdot y_{t+2}\right)$

Periode Jahr (i)/ Quartal (j)	y_{ij}	$\bar{y}_{ij}^4$	d_{ij}
1/I	8	-	-
1/II	12	-	-
1/III	14	$\bar{y}_{13}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 8 + 12 + 14 + 13 + \frac{1}{2}\cdot 11\right) = \frac{1}{4}\cdot 48{,}5 = 12{,}125$	1,875
1/IV	13	$\bar{y}_{14}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 12 + 14 + 13 + 11 + \frac{1}{2}\cdot 16\right) = \frac{1}{4}\cdot 52 = 13$	0
2/I	11	$\bar{y}_{21}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}14 + 13 + 11 + 16 + \frac{1}{2}17\right) = \frac{1}{4}\cdot 55{,}5 = 13{,}875$	-2,875
2/II	16	$\bar{y}_{22}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 13 + 11 + 16 + 17 + \frac{1}{2}\cdot 17\right) = \frac{1}{4}\cdot 59 = 14{,}75$	1,25
2/III	17	$\bar{y}_{23}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}11 + 16 + 17 + 17 + \frac{1}{2}\cdot 13\right) = \frac{1}{4}\cdot 62 = 15{,}5$	1,5
2/IV	17	$\bar{y}_{24}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 16 + 17 + 17 + 13 + \frac{1}{2}\cdot 18\right) = \frac{1}{4}\cdot 64 = 16$	1
3/I	13	$\bar{y}_{31}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 17 + 17 + 13 + 18 + \frac{1}{2}\cdot 21\right) = \frac{1}{4}\cdot 67 = 16{,}75$	-3,75
3/II	18	$\bar{y}_{32}^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 17 + 13 + 18 + 21 + \frac{1}{2}\cdot 20\right) = \frac{1}{4}\cdot 70{,}5 = 17{,}625$	0,375
3/III	21	-	-
3/IV	20	-	-

b) Bestimmen Sie die Saisonkomponente für ein additives Komponentenmodell!

Hinweis: Rechnen Sie mit vier Dezimalstellen!

Lösung:

$d_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{ij}^{4}$ (s. Teil a))

Unnormierte Saisonkomponente:

$$s_1^* = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3} d_{i1} = \frac{1}{2}\left[(-2{,}875)+(-3{,}75)\right] = -\frac{6{,}625}{2} = -3{,}3125$$

$$s_2^* = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3} d_{i2} = \frac{1}{2}(1{,}25+0{,}375) = \frac{1{,}625}{2} = 0{,}8125$$

$$s_3^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} d_{i3} = \frac{1}{2}(1{,}875+1{,}5) = \frac{3{,}375}{2} = 1{,}6875$$

$$s_4^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} d_{i4} = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Normierte Saisonkomponente:

$$\bar{d} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} s_j^* = (-3{,}3125+0{,}8125+1{,}6875+0{,}5)/4 = -0{,}3125/4 = -0{,}0781$$

$$s_1 = s_1^* - \bar{d} = -3{,}3125-(-0{,}0781) = -3{,}2344$$

$$s_2 = s_2^* - \bar{d} = 0{,}8125-(-0{,}0781) = 0{,}8906$$

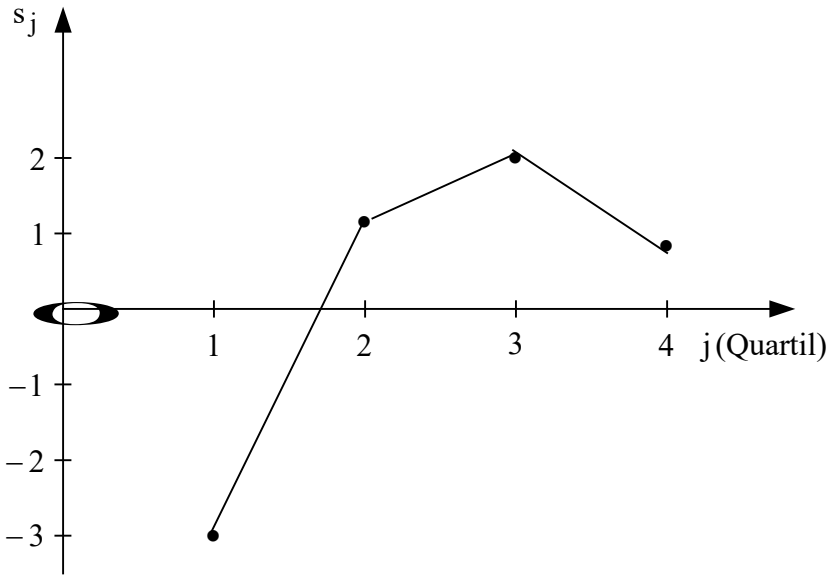
$$s_3 = s_3^* - \bar{d} = 1{,}6875-(-0{,}0781) = 1{,}7656$$

$$s_4 = s_4^* - \bar{d} = 0{,}5-(-0{,}0781) = 0{,}5781$$

c) Visualisieren Sie das Saisonprofil der produktbezogenen Bestellmenge!

Lösung:

Saisonprofil



Aufgabe 2.6

Die Beschäftigung (Tsd. Std.) ist in einem Unternehmen stark saisonabhängig:

10. Jahr	Quartal I	Quartal II	Quartal III	Quartal IV
1	30	36	38	32
2	32	40	40	34
3	36	42	44	36

a) Glätten Sie die Beschäftigung mit der Methode der gleitenden Durchschnitte! Zeigen Sie den Glättungseffekt in einem Zeitreihendiagramm auf!

Lösung

Zentrierte gleitende Durchschnitte (p=4):

$$\bar{y}_t^4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2} \cdot y_{t+2})$$

$$\bar{y}_{1/III}^4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot y_{1/I} + y_{1/II} + y_{1/III} + y_{1/IV} + \frac{1}{2} \cdot y_{2/I})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot 30 + 36 + 38 + 32 + \frac{1}{2} \cdot 32) = \frac{1}{4} \cdot 137 = 34{,}25$$

$$\bar{y}_{1/IV}^4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot y_{1/II} + y_{1/III} + y_{1/IV} + y_{2/I} + \frac{1}{2} \cdot y_{2/II})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot 36 + 38 + 32 + 32 + \frac{1}{2} \cdot 40) = \frac{1}{4} \cdot 140 = 35$$

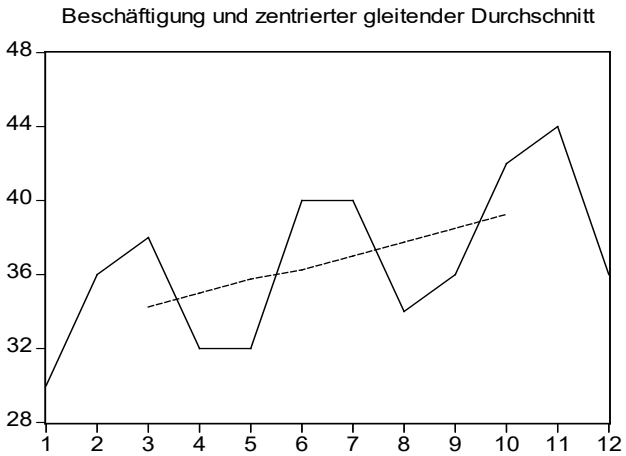
$$\bar{y}_{2/I}^4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot y_{1/III} + y_{1/IV} + y_{2/I} + y_{2/II} + \frac{1}{2} \cdot y_{2/III})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot 38 + 32 + 32 + 40 + \frac{1}{2} \cdot 40) = \frac{1}{4} \cdot 143 = 35{,}75$$

$$\bar{y}_{2/II}^4 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot y_{1/IV} + y_{2/I} + y_{2/II} + y_{2/III} + \frac{1}{2} \cdot y_{2/IV})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2} \cdot 32 + 32 + 40 + 40 + \frac{1}{2} \cdot 34) = \frac{1}{4} \cdot 145 = 36{,}25$$

$$\bar{y}_{2/III}^4 = 37, \quad \bar{y}_{2/III}^4 = 37{,}75, \quad \bar{y}_{3/I}^4 = 38{,}5, \quad \bar{y}_{3/II}^4 = 39{,}25$$



b) Bestimmen Sie die additive Saisonkomponente und stellen Sie grafisch dar!

Jahr (i)	Quartal (j)	y_{ij}	$\bar{y}^4_{ij}$	d_{ij}
1	1 (I)	30	-	-
1	2 (II)	36	-	-
1	3 (III)	38	34,25	3,75
1	4 (IV)	32	35	-3
2	1 (I)	32	35,75	-3,75
2	2 (II)	40	36,25	3,75
2	3 (III)	40	37	3
2	4 (IV)	34	37.75	-3,75
3	1 (I)	36	38,5	-2,5
3	2 (II)	42	39,25	2,75
3	3 (III)	44	-	-
3	4 (IV)	36	-	-

Unnormierte Saisonkomponente:

$$s_1^* = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3} d_{i1} = \frac{1}{2}[(-3{,}75)+(-2{,}5)] = \frac{1}{2}(-6{,}25) = -3{,}13$$

$$s_2^* = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3} d_{i2} = \frac{1}{2}(3{,}75+2{,}75) = \frac{1}{2}6{,}5 = 3{,}25$$

$$s_3^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} d_{i3} = \frac{1}{2}(3{,}75+3) = \frac{1}{2}6{,}75 = 3{,}38$$

$$s_4^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} d_{i1} = \frac{1}{2}[(-3)+(-3{,}75)] = \frac{1}{2}(-6{,}75) = -3{,}38$$

$$\bar{d} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} s_j^* = \frac{1}{4}[(-3{,}13)+3{,}25+3{,}38+(-3{,}38)] = \frac{1}{4}0{,}12 = 0{,}03$$

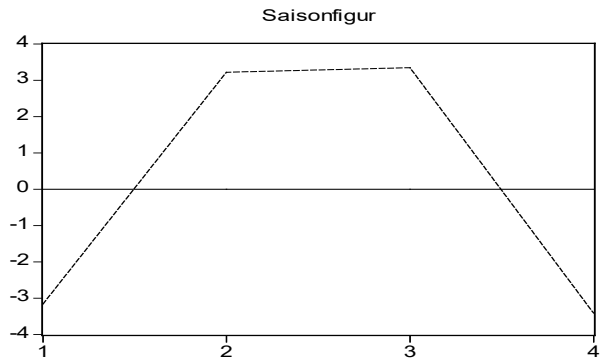
Normierte Saisonkomponente:

$$s_1 = s_1^* - \bar{d} = -3{,}13 - 0{,}03 = -3{,}16$$

$$s_2 = s_2^* - \bar{d} = 3{,}25 - 0{,}03 = 3{,}22$$

$$s_3 = s_3^* - \bar{d} = 3{,}38 - 0{,}03 = 3{,}35$$

$$s_4 = s_4^* - \bar{d} = -3{,}38 - 0{,}03 = -3{,}41$$



c) Ermitteln Sie die saisonbereinigte Zeitreihe und interpretieren Sie sie!

Lösung

Saisonbereinigte Zeitreihe: $y_{ij}^{*} = y_{ij} - s_j$

Jahr (i)	Quartal (j)	y_{ij}	s_j	y_{ij}^{*}
1	1 (I)	30	-3,16	33,16
1	2 (II)	36	3,22	32,78
1	3 (III)	38	3,35	34,65
1	4 (IV)	32	-3,41	35,41
2	1 (I)	32	-3,16	35,16
2	2 (II)	40	3,22	36,78
2	3 (III)	40	3,35	36,65
2	4 (IV)	34	-3,41	37,41
3	1 (I)	36	-3,16	39,16
3	2 (II)	42	3,22	38,78
3	3 (III)	44	3,35	40,65
3	4 (IV)	36	-3,41	39,41

Die saisonbereinigte Zeitreihe gibt an, wie sich die Beschäftigung des Unternehmens unter Ausschaltung der saisonalen Schwankungen im Zeitverlauf entwickelt hat.

Aufgabe 2.7

Der Umlauf von Aktien (Mrd. €) hat sich in einem Zeitraum von 5 Jahren wie folgt entwickelt:

Jahr	1	2	3	4	5
Aktienumlauf	121,9	132,0	144,7	151,6	160,8

a) Schätzen Sie die Trendgerade des Aktienumlaufs mit der Methode der kleinsten Quadrate!

Lösung

Arbeitstabelle:

	t	t'	t'^2	$y_{t'}$	$y_{t'} \cdot t'$
	1	-2	4	121,9	-243,8
	2	-1	1	132	-132
	3	0	0	144,7	0
	4	1	1	151,6	151,6
	5	2	4	160,8	321,6
∑	15	0	10	711	97,4

Steigungsmaß: $\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{5} y_{t'} \cdot t'}{\sum_{t=1}^{5} t'^2} = \frac{97,4}{10} = 9,74$

Achsenabschnitt (extrapolierter Wert für t = 0):

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{5} y_{t'}}{5} - \hat{a}_1 \frac{\sum_{t=1}^{5} t}{5} = \frac{711}{5} - 9,74 \cdot \frac{15}{5} = 112,98$$

$\boxed{\text{Trendgerade: } m_t = 112,98 + 9,74 \cdot t}$

b) Zu wie viel Prozent lässt sich der Umlauf von Aktien durch einen linearen Trend erklären?

Lösung

Arbeitstabelle:

	t	y_t	$\hat{y}_t = 112{,}98 + 9{,}74 \cdot t$	y_t^2	$\hat{y}_t^2$
	1	121,9	122,72	14859,61	15060,1984
	2	132	132,46	17424	17545,6516
	3	144,7	142,2	20938,09	20220,84
	4	151,6	151,94	22982,56	23085,7636
	5	160,8	161,68	25856,64	26140,4224
$\sum$	15	711	711	102060,9	102052,876

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} y_t = \frac{1}{5} \cdot 711 = 142{,}2$$

Determinationskoeffizient (Bestimmtheitsmaß):

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{y}_t^2 - n \cdot \bar{y}^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - n \cdot \bar{y}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{5} \hat{y}_t^2 - 5 \cdot 142{,}2^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - 5 \cdot 142{,}2^2} = \frac{102.052{,}876 - 5 \cdot 142{,}2^2}{102.060{,}9 - 5 \cdot 142{,}2^2} = \frac{948{,}676}{956{,}7} = 0{,}992$$

Die Trendgerade erklärt damit im betrachteten 5-Jahres-Zeitraum den Umlauf von Aktien zu 99,2%.

Aufgabe 2.8

Der Umsatz (Mill. €) des Unternehmens LINT hat sich in einem 5-Jahres-Zeit-raum wie folgt entwickelt:

Jahr	1	2	3	4	5
Umsatz	30	35	39	46	50

a) Bestimmen Sie die lineare Trendfunktion des Umsatzes mit der Methode der kleinsten Quadrate ohne und mit Zentrierung!

Lösung

1. Möglichkeit: Trendbestimmung ohne Zentrierung

Arbeitstabelle:

t	y_t	t^2	$y_t \cdot t$
1	30	1	30
2	35	4	70
3	39	9	117
4	46	16	184
5	50	25	250
Σ 15	200	55	651

Kleinst-Quadrate-Schätzer für a_0 und a_1 (n=5):

$$\hat{a}_1 = \frac{5\sum y_t \cdot t - \sum y_t \sum t}{5\sum t^2 - (\sum t)^2} = \frac{5 \cdot 651 - 200 \cdot 15}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{255}{50} = 5{,}1$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum y_t}{n} - \hat{a}_1 \cdot \frac{\sum t}{n} = \frac{200}{5} - 5{,}1 \cdot \frac{15}{5} = 40 - 5{,}1 \cdot 3 = 24{,}7$$

$$\boxed{\text{Trendgerade: } m_t\ (= \hat{y}_t) = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot t}$$

2. Möglichkeit: Trendbestimmung mit Zentrierung

Arbeitstabelle:

t	t'	$y_{t'}$	t'^2	$y_{t'} \cdot t'$
1	-2	30	4	-60
2	-1	35	1	-35
3	0	39	0	0
4	1	46	1	46
5	2	50	4	100
Σ	0	200	10	51

Kleinst-Quadrate-Schätzer für a_0 und a_1 (n=5):

$$\hat{a}_1 = \frac{n\sum y_{t'} \cdot t'}{n\sum t'^2} = \frac{5 \cdot 51}{5 \cdot 10} = \frac{255}{50} = 5{,}1 \qquad [\ \hat{a}_0' = \frac{\sum y_{t'}}{n} = \frac{200}{5} = 40\ ]$$

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum y_{t'}}{n} - \hat{a}_1 \cdot \frac{\sum t}{n} = \frac{200}{5} - 5{,}1 \cdot \frac{15}{5} = 40 - 5{,}1 \cdot 3 = 24{,}7$$

$$\boxed{\text{Trendgerade: } m_t\ (= \hat{y}_t) = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot t}$$

b) Wie groß ist die prozentuale Abweichung des Umsatzes vom Trendwert im vierten Jahr?

Lösung

Umsatz des vierten Jahres: $y_4 = 46$

Trendwert für t=4: $m_4 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t = 4) = 24{,}7 + 20{,}4 = 45{,}1$

Abweichung vom Trendwert (=Residuum): $\hat{u}_4 = y_4 - m_4 = 46 - 45{,}1 = 0{,}9$

Prozentuale Abweichung vom Trendwert: $\frac{|\hat{u}_4|}{m_4} \cdot 100\% = \frac{|0{,}9|}{45{,}1} \cdot 100\% = 2{,}0\%$

c) Zu wie viel Prozent erklärt der lineare Trend die Streuung der Umsätze?

Lösung

gesucht: Bestimmtheitsmaß

Trendwerte:
$m_1 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t=1) = 29{,}8$
$m_2 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t=2) = 34{,}9$
$m_3 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t=3) = 40{,}0$
$m_4 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t=4) = 45{,}1$
$m_5 = 24{,}7 + 5{,}1 \cdot (t=5) = 50{,}2$

Arbeitstabelle:

t	y_t	m_t	y_t^2	m_t^2
1	30	29,8	900	888,04
2	35	34,9	1225	1218,01
3	39	40,0	1521	1600,00
4	46	45,1	2116	2034,01
5	50	50,2	2500	2520,04
Σ	200	200	8262	8260,10

Bestimmtheitsmaß: $R^2 = \frac{n\sum m_t^2 - (\sum y_t)^2}{n\sum y_t^2 - (\sum y_t)^2} = \frac{5 \cdot 8260{,}10 - 200^2}{5 \cdot 8262 - 200^2} = \frac{1300{,}50}{1310} = 0{,}993$

Aufgabe 2.9

Ist ein Exponentialtrend dem in Aufg. 2.6 ermitteltem linearen Trend im Hinblick auf die Güte der Anpassung vorzuziehen?

Lösung

• Schätzung des Exponentialtrends

Arbeitstabelle:

	t	t^2	y_t	$\lg y_t$	$t \cdot \lg y_t$
	1	1	121,9	2,0860	2,0860
	2	4	132	2,1206	4,2411
	3	9	144,7	2,1605	6,4814
	4	16	151,6	2,1807	8,7228
	5	25	160,8	2,2063	11,0314
$\sum$	15	55	711	10,7540	32,5628

Steigungsmaß:

$$\lg \hat{a}_1 = \frac{n \cdot \sum_{t=1}^{n} t \cdot \lg y_t - \sum_{t=1}^{n} \lg y_t \cdot \sum_{t=1}^{n} t}{n \cdot \sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2} = \frac{5 \cdot 32{,}5628 - 10{,}7540 \cdot 15}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{1{,}504}{50} = 0{,}030$$

$$\Rightarrow \hat{a}_1 = 10^{0{,}030} = 1{,}0715$$

Achsenabschnitt (extrapolierter Wert für t = 0)

$$\lg \hat{a}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{5} \lg y_t}{n} - \lg \hat{a}_0 \cdot \frac{\sum_{t=1}^{5} t}{n} = \frac{10{,}7540}{5} - 0{,}030 \cdot \frac{15}{5} = 2{,}0608$$

$$\Rightarrow \hat{a}_0 = 10^{2{,}0608} = 115{,}027$$

$\boxed{\text{Exponentialtrend: } m_t = 115{,}027 \cdot 1{,}0715^t}$

• Berechnung des Bestimmtheitsmaßes

Arbeitstabelle:

	t	y_t	$\hat{y}_t = 115{,}027 \cdot 1{,}0715^t$	y_t^2	$\hat{y}_t^2$
	1	121,9	123,2514305	14859,61	15190,91512
	2	132	132,0639078	17424	17440,87574
	3	144,7	141,5064772	20938,09	20024,08309
	4	151,6	151,6241903	22982,56	22989,89509
	5	160,8	162,4653199	25856,64	26394,98017
$\sum$	15	711	710,9113257	102060,9	102040,7492

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} y_t = \frac{1}{5} \cdot 711 = 142{,}2$$

Determinationskoeffizient (Bestimmtheitsmaß):

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{y}_t^2 - n \cdot \bar{y}^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - n \cdot \bar{y}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{5} \hat{y}_t^2 - 5 \cdot 142{,}2^2}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - 5 \cdot 142{,}2^2} = \frac{102.040{,}7492 - 5 \cdot 142{,}2^2}{102.060{,}9 - 5 \cdot 142{,}2^2} = \frac{936{,}549}{956{,}7} = 0{,}979$$

Da der Determinationskoeffizient um 1.3 Prozentpunkte (0,992-0,979=0,013) gesunken ist, hat sich insgesamt die Güte der Anpassung verschlechtert. Der lineare Trend ist daher hier dem Exponentialtrend vorzuziehen.

Aufgabe 2.10

Die Bestellmenge eines saisonabhängigen Produkts (Daten s. Aufg. 2.5) ist mit einem Regressionsmodell mit absolutem Glied unter Verwendung von EViews ausgewertet worden:

Dependent Variable: BESTELL — Method: Least Squares
Sample: 2001Q1 2003Q4 — Included observations: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.760417	0.438120	15.43053	0.0000
D2	3.885417	0.494874	7.851327	0.0001
D3	5.104167	0.503399	10.13941	0.0000
D4	3.656250	0.517295	7.068024	0.0002
T	0.781250	0.053261	14.66847	0.0000

R-squared	0.984311	Mean dependent var	15.00000
Adjusted R-squared	0.975345	S.D. dependent var	3.837613
S.E. of regression	0.602574	F-statistic	109.7910
Sum squared resid	2.541667	Prob(F-statistic)	0.000002

Hinweis: Verwenden Sie stets vier Dezimalstellen!

a) Warum dürfen bei der Kleinst-Quadrate-Schätzung bei Einbeziehung des absoluten Glieds nur drei Saisondummys berücksichtigt werden?

Lösung

Bei Berücksichtigung aller vier Saisondummys würden sich ihre Spalten in der Designmatrix zu 1 summieren und damit genau der Spalte der Scheinvariablen entsprechen. Dies ist der Fall der exakten Multikollinearität. Die Produktmatrix **X'X** wäre dann singulär. In diesem Fall existiert keine Kleinst-Quadrate-Lösung.

b) Geben Sie die geschätzte Regressionsgleichung an!

Lösung

$$\hat{y}_t = \underset{(15{,}431)}{6{,}7604} + \underset{(7{,}851)}{3{,}8854} \cdot D_2 + \underset{(10{,}139)}{5{,}1042} \cdot D_3 + \underset{(7{,}068)}{3{,}6563} \cdot D_4 + \underset{(14{,}668)}{0{,}7813} \cdot t$$

c) Welche Form hat die Beobachtungsmatrix („Designmatrix“), die der Kleinst-Quadrate-Schätzung zugrunde liegt?

Lösung

$$\underset{12x5}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

d) Interpretieren Sie den Trendkoeffizienten!

Lösung

Der Regressionskoeffizient eines linearen Trends gibt bei Quartalsdaten an, um wie viel Einheiten sich die abhängige Variable trendmäßig ohne Berücksichtigung des Saisoneinflusses von Quartal zu Quartal verändert. Bei einem positiven Trendkoeffizienten steigt die abhängige Variable trendmäßig an. In unserem Beispiel nimmt die Bestellmenge im Trend pro Quartal um 0,7813 Einheiten zu.

e) Bestimmen Sie die normierte Saisonkomponente!

Lösung

Arithm Mittel der Saisonkoeffizienten (einschl. 0 für das erste Quartal):

$\bar{d}$ = (0 + 3,8854 + 5,1042 + 3,6563) / 4 = 12,6459 / 4 = 3,1615

(Normierte) Saisonkomponente):

s_1 = 0 – 3,1615 = -3,1615

s_2 = 3,8854 – 3,1615 = 0,7239

s_3 = 5,1042 – 3,1615 = 1,9427

s_4 = 3,6563 – 3,1615 = 0,4948

f) Welche Prognosewerte für die Bestellmenge ergeben sich aus der Regressionsschätzung für das vierte Quartal des Jahrs 2004 und das erste Quartal des Jahres 2005?

Lösung

Prognosewert für das vierte Quartal des Jahres 2004:

$$\hat{y}_{2004.4} = 6{,}7604 + 3{,}6563 + 0{,}7813 \cdot (t = 16) = 6{,}7604 + 3{,}9065 + 12{,}5008 = 22{,}9175$$

Prognosewert für das erste Quartal des Jahres 2005:

$$\hat{y}_{2005.1} = 6{,}7604 + 0{,}7813 \cdot (t = 17) = 6{,}7604 + 13{,}2821 = 20{,}0425$$

Aufgabe 2.11

Die Bestellmenge eines saisonabhängigen Produkts (Daten s. Aufg. 2.5) ist mit einem Regressionsmodell ohne absolutes Glied unter Verwendung von EViews ausgewertet worden:

Dependent Variable: BESTELL — Method: Least Squares
Sample: 2001Q1 2003Q4 — Included observations: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D1	6.760417	0.438120	15.43053	0.0000
D2	10.64583	0.472390	22.53611	0.0000
D3	11.86458	0.509931	23.26706	0.0000
D4	10.41667	0.550072	18.93691	0.0000
T	0.781250	0.053261	14.66847	0.0000

R-squared	0.984311	Mean dependent var	15.00000
Adjusted R-squared	0.975345	S.D. dependent var	3.837613
S.E. of regression	0.602574	Akaike info criterion	2.119124
Sum squared resid	2.541667	Schwarz criterion	2.321168
Log likelihood	-7.714743	Durbin-Watson stat	2.110656

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie stets vier Dezimalstellen!

a) Wie lautet die geschätzte Regressionsgleichung (einschl. t-Werte)?

Lösung

$$\hat{y}_t = \underset{(15{,}431)}{6{,}7604} \cdot D_1 + \underset{(22{,}536)}{10{,}6458} \cdot D_2 + \underset{(23{,}267)}{11{,}8646} \cdot D_3 + \underset{(18{,}937)}{10{,}4167} \cdot D_4 + \underset{(14{,}668)}{0{,}7813} \cdot t$$

b) Welche Gestalt hat die Beobachtungsmatrix („Designmatrix“)?

Lösung

$$\underset{12x5}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie die normierte Saisonkomponente!

Lösung

Arithm Mittel der Saisonkoeffizienten:

$\bar{d}$ = (6,7604 + 10,6458 + 11,8646 + 10,4167) / 4 = 39,6875 / 4 = 9,9219

(Normierte) Saisonkomponente):

s_1 = 6,7604 – 9,9219 = -3,1615

s_2 = 10,6458 – 9,9219 = 0,7239

s_3 = 11,8646 – 9,9219 = 1,9427

s_4 = 10,4167 – 9,9219 = 0,4948

Aufgabe 2.12

Die Produktion von Türschlössern schwankte in einem Zeitraum von sechs Jahren um einen konstanten Wert 100:

Jahr	1	2	3	4	5	6
Türschl.prod.	108	102	96	100	94	98

a) Erläutern Sie die Anwendbarkeit des Verfahrens der exponentiellen Glättung zur Prognose der Türschlösserproduktion!

Lösung

Das Verfahren der exponentiellen Glättung eignet sich zur kurzfristigen Prognose einer Zeitreihe. Ein Vorteil des Verfahrens ist die eingebaute Fehlerkorrektur. So wird z.B. eine Unterschätzung des tatsächlichen Zeitreihenwertes in einer Periode bei der Prognose eines neuen Wertes dadurch korrigiert, dass die vorherige Prognose um einen Teil des Prognosefehlers erhöht wird. Da die Daten hier einem Trend keinem Trend folgen, ist eine exponentielle Glättung erster Ordnung einsetzbar.

b) Bestimmen Sie die exponentiell geglättete Zeitreihe im Stützbereich unter Verwendung der Rekursionsformel mit dem Glättungsparameter α=0,4 und dem Anfangswert y_0=100! Wie lautet die Prognose für das Jahr 7?

Startwert: 100, $\alpha = 0{,}4$

t	y_t	$\hat{y}_{t-1,1} = (1-0{,}4)\cdot \hat{y}_{t-2,1} + 0{,}4 \cdot y_{t-1}$
1	108	100
2	102	$0{,}6 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 108 = 103{,}2$
3	96	$0{,}6 \cdot 103{,}2 + 0{,}4 \cdot 102 = 102{,}72$
4	100	$0{,}6 \cdot 102{,}72 + 0{,}4 \cdot 96 = 100{,}032$
5	94	$0{,}6 \cdot 100{,}032 + 0{,}4 \cdot 100 = 100{,}019$
6	98	$0{,}6 \cdot 100{,}019 + 0{,}4 \cdot 94 = 97{,}611$
7	-	$0{,}6 \cdot 97{,}611 + 0{,}4 \cdot 98 = 97{,}767$

Aufgabe 2.13

Erläutern Sie die Bedeutung des Parameters α bei der exponentiellen Glättung erster Ordnung in Bezug auf

- den Glättungseffekt,
- der Ausschaltung irregulärer Schwankungen,
- den Einfluss neuer und älterer Zeitreihenwerte,
- den Effekt von Niveauverschiebungen!

Lösung

- Glättungseffekt:

Je kleiner α ist, desto geringer geht der aktuelle Wert in die Schätzung ein:

$$\hat{y}_{t,1} = (1-\alpha)\cdot \hat{y}_{t-1,1} + \alpha \cdot y_t \qquad \text{(Rekursionsformel)}$$

Daher ist die Glättung umso größer, je kleiner α ist.

- Ausschaltung irregulärer Schwankungen:

Mit abnehmenden α steigt der Glättungseffekt. Aus diesem Grund werden irreguläre Schwankungen bei einem kleinen α stärker ausgeschaltet.

- Einfluss neuer und älterer Zeitreihenwerte:

Aus der Gewichtungsformel

$$\hat{y}_{t,1} = \alpha \cdot y_t + (1-\alpha)\cdot \alpha \cdot y_{t-1} + (1-\alpha)^2 \cdot \alpha \cdot y_{t-2} + (1-\alpha)^3 \cdot \alpha \cdot y_{t-3} + \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha \cdot (1-\alpha)^i \cdot y_{t-i}$$

geht hervor, dass der Einfluss weiter zurückliegender Beobachtungswerte auf den aktuellen Prognosewert geometrisch (exponentiell) abnimmt. Mit wachsendem α werden die jüngsten Zeitreihenwerte zunehmend stärker berücksichtigt. Dagegen nimmt bei großem α der Einfluss der älteren Zeitreihenwerte auf den aktuellen Prognosewert ab.

- Effekt von Niveauverschiebungen:

Je größer α ist, desto geringer gehen vergangene Beobachtungswerte in die exponentielle Glättung ein. Auf eine Niveauverschiebung reagiert die exponentielle Glättung bei großem α schneller und stärker. Eine eintretende Niveauveränderung wird daher bei großem α besser erfasst.

Aufgabe 2.14

Die Absatzzahlen (in Tsd.) eines Produkts variieren in der Sättigungsphase bei einem relativ konstanten Niveau:

Periode	1	2	3	4
Absatz (in Tsd.)	30	28	27	29

In der Periode 0 ist ein Absatz von 29 erzielt worden.

Hinweis: Berechnen Sie die geglätteten Werte bzw. Prognosewerte jeweils mit zwei Dezimalstellen!

a) Ermitteln Sie die exponentiell geglättete Absatzreihe mit der Rekursions-formel unter Verwendung eines Glättungsparameters α von 0,4! Welcher Prognosewert ergibt sich für die fünfte Periode?

Lösung

Der Anfangswert y_0 von 29 wird als Prognosewert für die Periode 1 verwendet:

$$\hat{y}_{0,1} = y_0 = 29$$

Prognosewert für die Periode 2:

$$\hat{y}_{1,1} = 0{,}6 \cdot \hat{y}_{0,1} + 0{,}4 \cdot y_1 = 0{,}6 \cdot 29 + 0{,}4 \cdot 30 = 29{,}4$$

Prognosewert für die Periode 3:

$$\hat{y}_{2,1} = 0{,}6 \cdot \hat{y}_{1,1} + 0{,}4 \cdot y_2 = 0{,}6 \cdot 29{,}4 + 0{,}4 \cdot 28 = 28{,}84$$

Prognosewert für die Periode 4:

$$\hat{y}_{3,1} = 0{,}6 \cdot \hat{y}_{2,1} + 0{,}4 \cdot y_3 = 0{,}6 \cdot 28{,}84 + 0{,}4 \cdot 27 = 28{,}10$$

Prognosewert für die Periode 5:

$$\hat{y}_{4,1} = 0{,}6 \cdot \hat{y}_{3,1} + 0{,}4 \cdot y_4 = 0{,}6 \cdot 28{,}10 + 0{,}4 \cdot 29 = 28{,}46$$

Periode	1	2	3	4	5
y_t	30	28	27	29	
$\hat{y}_{t-1,1}$	29	29,4	28,84	28,10	28,46

b) Bestimmen Sie die exponentiell geglättete und prognostizierte Absatzreihe für die Perioden 1 bis 5 mit der Fehlerkorrekturformel bei einem Glättungs-parameter α von 0,5!

Lösung

Der Anfangswert y_0 von 29 wird als Prognosewert für die Periode 1 verwendet:

$$\hat{y}_{0,1} = y_0 = 29$$

Prognosefehler in der Periode 1:

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_{0,1} = 30 - 29 = 1$$

Prognosewert für die Periode 2:

$$\hat{y}_{1,1} = \hat{y}_{0,1} + 0{,}5 \cdot e_1 = 29 + 0{,}5 \cdot 1 = 29{,}5$$

Prognosefehler in der Periode 2:

$$e_2 = y_2 - \hat{y}_{1,1} = 28 - 29{,}5 = -1{,}5$$

Prognosewert für die Periode 3:

$$\hat{y}_{2,1} = \hat{y}_{1,1} + 0{,}5 \cdot e_2 = 29{,}5 + 0{,}5 \cdot (-1{,}5) = 28{,}75$$

Prognosefehler in der Periode 3:

$$e_3 = y_3 - \hat{y}_{2,1} = 27 - 28{,}75 = -1{,}75$$

Prognosewert für die Periode 4:

$$\hat{y}_{3,1} = \hat{y}_{2,1} + 0{,}5 \cdot e_3 = 28{,}75 + 0{,}5 \cdot (-1{,}75) = 27{,}87$$

Prognosefehler in der Periode 4:

$$e_4 = y_4 - \hat{y}_{3,1} = 29 - 27{,}87 = 1{,}13$$

Prognosewert für die Periode 5:

$$\hat{y}_{4,1} = \hat{y}_{3,1} + 0{,}5 \cdot e_4 = 27{,}87 + 0{,}5 \cdot 1{,}13 = 28{,}44$$

Periode	1	2	3	4	5
y_t	30	28	27	29	
$\hat{y}_{t-1,1}$	29	29,5	28,75	27,87	28,44
e_t	1	-1,5	-1,75	1,13	
$0{,}5 \cdot e_t$	0,5	-0,75	-0,88	0,57	

c) Bewerten Sie die exponentielle Glättung für die beiden Glättungsparameter 0,4 und 0,5 auf der Grundlage des MAE, MAPE, MSE und des RMSE!

Lösung

Mean Absolute Error (MAE)	Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\|y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right\|$	$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left\|\frac{y_t - \hat{y}_{t-1,1}}{y_t}\right\| \cdot 100\%$
Mean Square Error (MSE)	Root Mean Square Error (RMSE)
$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right)^2$	$RMSE = \sqrt{MSE}$

● MSE und RMSE mit α = 0,4:

t	y_t	$\hat{y}_{t-1,1}$	$\left\|y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right\|$	$\left\|\frac{y_t - \hat{y}_{t-1,1}}{y_t}\right\|$	$\left(y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right)^2$
1	30	29	1	0,033	1
2	28	29,4	1,4	0,05	1,96
3	27	28,84	1,84	0,068	3,39
4	29	28,10	0,9	0,031	0,81
Σ			5,19	0,182	7,16

MAE = 5,19 / 4 = 1,30, MAPE = 18,2% / 4 = 4,55%

MSE = 7,16 / 4 = 1,79; $RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{1{,}79} = 1{,}34$

● MSE und RMSE mit α = 0,5:

t	y_t	$\hat{y}_{t-1,1}$	$\left\|y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right\|$	$\left\|\frac{y_t - \hat{y}_{t-1,1}}{y_t}\right\|$	$\left(y_t - \hat{y}_{t-1,1}\right)^2$
1	30	29	1	0,033	1
2	28	29,5	1,5	0,054	2,25
3	27	28,75	1,75	0,065	3,06
4	29	27,87	1,13	0,039	1,28
Σ			5,38	0,191	7,59

MAE = 5,38 / 4 = 1,35, MAPE = 19,1% / 4 = 4,78%

MSE = 7,59 / 4 = 1,90; $RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{1{,}90} = 1{,}38$

Aufgabe 2.15

Was versteht man unter einem Filter? Inwiefern lässt sich ein gleitender Durchschnitt als Filter interpretieren?

Lösung

Ein Filter transformiert eine gegebene Zeitreihe y_t (=Inputreihe) in eine neue Zeitreihe z_t (=Outputreihe). Eine einfache Transformation ist die Differenzenbildung,

$$z_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1},$$

durch die ein linearer Trend aus der Zeitreihe eliminiert werden kann. Der Differenzenfilter ist hierbei durch die Transformation selbst, also Δy_t bzw. $y_t - y_{t-1}$, gegeben. Wenn man sich auf die Klasse der linearen Filter beschränkt, reicht die Angabe der Gewichte $a_{-1}=-1$ und $a_0=1$ aus. Die Folge $(a_k) = (a_{-1}=-1), (a_0=1)$ der Gewichte legt in diesem Fall den Filter eindeutig fest.

Durch Vorgabe eines geeigneten Filters kann eine Zeitreihe (y_t) geglättet werden. Hierbei handelt es sich formal um eine Transformation der originären Zeitreihe (y_t), die auf eine Eliminierung der unterjährigen Schwingungen abstellt. Ein gleitender Durchschnitt lässt sich als Glättung unter Verwendung eines linearen Filters auffassen. Bei Quartaldaten z.B. ist der gleitende Durchschnitt durch die Transformation

$$z_t = \bar{y}_t^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2}\cdot y_{t+2}\right)$$

gegeben. Die Transformation gibt einen linearen, symmetrischen Filter wieder, der gleichwertig durch die Gewichtsfolge $(a_k) = (a_{-2}=0{,}125), (a_{-1}=0{,}25), (a_0=0{,}25), (a_1=0{,}25), (a_2=0{,}125)$ definiert werden kann.

Aufgabe 2.16

Bei einem Kostencheck ihres Lkw-Parks ermittelt eine Spedition bei 5 Fahrten eines Lkws den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit:

Fahrt (i)	1	2	3	4	5
Geschwindigkeit (km/h) (X)	90	95	100	110	120
Benzinverbrauch (l/100km) (Y)	20	20	22	23	25

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais und Pearson mit der Summe der Kreuzprodukte und der Summe der Abweichungsquadrate!

Lösung

Korrelationskoeffizient nach Bravais und Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Arbeitstabelle:

i	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(y_i - \overline{y})^2$
1	90	20	-13	-2	26	169	4
2	95	20	-8	-2	16	64	4
3	100	22	-3	0	0	9	0
4	110	23	7	1	7	49	1
5	120	25	17	3	51	289	9
Σ	515	110	0	0	100	580	18

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}\cdot 515 = 103, \qquad \overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{1}{5}\cdot 110 = 22$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{5}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{100}{\sqrt{580 \cdot 18}} = \frac{100}{\sqrt{10440}} = \frac{100}{102{,}1763} = 0{,}979$$

Aufgabe 2.17

Gegeben sind die Umsätze des Unternehmens LINT zusammen mit den linearen Trendwerten für einen 5-Jahres-Zeitraum:

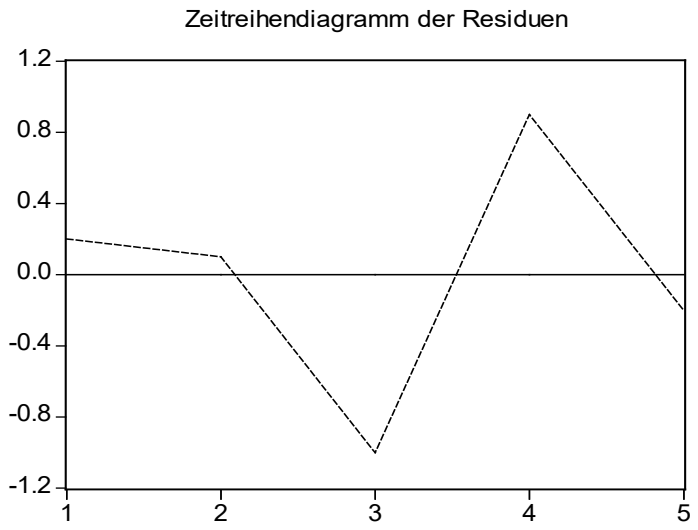
Jahr	1	2	3	4	5
Umsatz	30	35	39	46	50
Trendwerte	29,8	34,9	40,0	45,1	50,2

a) Zeichnen Sie das Zeitreihendiagramm der Residuen und interpretieren Sie es!

Lösung

Arbeitstabelle:

t	y_t	m_t	$u_t = y_t - m_t$
1	30	29,8	0,2
2	35	34,9	0,1
3	39	40,0	-1,0
4	46	45,1	0,9
5	50	50,2	-0,2
Σ	200	200	0



b) Berechnen Sie die Autokorrelationskoeffizienten 1. und 2. Ordnung der Um-satzreihe!

Lösung

● Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung

Arbeitstabelle:

t	x_t	x_{t-1}	$x_t - \overline{x}$	$x_{t-1} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})$
	30	-	-10	-	100	-
	35	30	-5	-10	25	50
	39	35	-1	-5	1	5
	46	39	6	-1	36	-6
	50	46	10	6	100	60
	200		0		262	109

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{5} 200 = 40$$

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2} = \frac{109}{262} = 0{,}416$$

● Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung

Arbeitstabelle:

t	x_t	x_{t-2}	$x_t - \overline{x}$	$x_{t-2} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-2} - \overline{x})$
	30	-	-10	-	100	-
	35	-	-5	-	25	-
	39	30	-1	-10	1	10
	46	35	6	-5	36	-30
	50	39	10	-1	100	-10
	200		0		262	-30

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-2} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2} = \frac{-30}{262} = -0{,}115$$

c) Wie groß sind die Autokorrelationskoeffizienten 1. und 2. Ordnung der Residuen?

Lösung

● Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung

Arbeitstabelle:

t	u_t	u_{t-1}	u_t^2	$u_t \cdot u_{t-1}$
	0,2	-	0,04	-
	0,1	0,2	0,01	0.02
	-1,0	0,1	1,00	-0,10
	0,9	-1,0	0,81	-0,90
	-0,2	0,9	0,04	-0,18
	0		1,90	-1,16

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = \frac{-1{,}16}{1{,}90} = -0{,}611$$

● Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung

Arbeitstabelle:

t	u_t	u_{t-2}	u_t^2	$u_t \cdot u_{t-2}$
	0,2	-	0,04	-
	0,1	-	0,01	-
	-1,0	0,2	1,00	-0,20
	0,9	0,1	0,81	0,09
	-0,2	-1,0	0,04	0,20
	0		1,90	0,09

$$r_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-2}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = \frac{0{,}09}{1{,}90} = 0{,}047$$

Aufgabe 2.18

Gegeben sind die Daten des Umlaufs von Aktien und die hierzu ermittelte Trendgerade (s. Aufg. 2.6).

a) Ermitteln Sie die Residuen und zeichnen Sie sie mit den 2s-Konfidenzbändern in ein Zeitreihendiagramm ein! Welche Informationen vermittelt der Residuenplot?

Lösung

s: Standardfehler der Regression (SE), k: Anzahl der Regressoren (einschl. der Scheinvar.)

Standardfehler der Regression: $s = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$

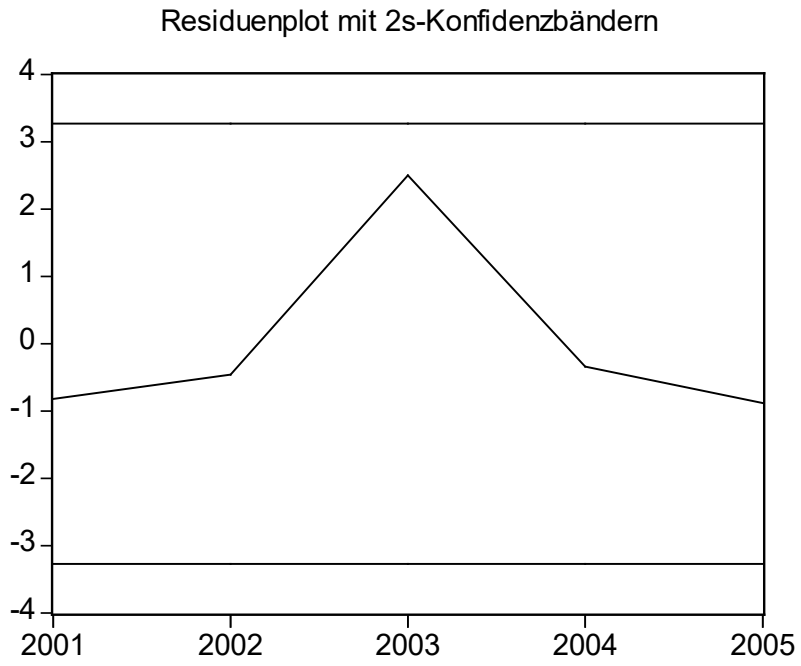
Trendgerade: $m_t = 112{,}98 + 9{,}74 \cdot t$ $(= \hat{y}_t$, s. Aufg. 2.6)

Arbeitstabelle:

	t	y_t	$\hat{y}_t$	$u_t = y_t - \hat{y}_t$	u_t^2
	1	121,9	122,98	-0,82	0,6724
	2	132,0	132,46	-0,46	0,2116
	3	144,7	142,2	2,50	6,25
	4	151,6	151,94	-0,34	0,1156
	5	160,8	161,68	-0,88	0,7744
Σ		711	711	0	8,024

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 8{,}024} = \sqrt{2{,}6747} = 1{,}635$$

2s-Konfidenzbänder: [-2·s; 2·s] = [-2·1,635; 2·1,635] = [-3,27; 3,27]



b) Bestimmen Sie den Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung und geben Sie das zugehörige 95%-Konfidenzintervall an! Welcher Schluss lässt sich hiermit im Hinblick auf die Autokorrelation der Residuen ziehen?

Lösung

Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$$

Arbeitstabelle:

t	u_t	u_{t-1}	$u_t \cdot u_{t-1}$	u_t^2
1	-0,82	-	-	0,6724
2	-0,46	-0,82	0,3772	0,2116
3	2,50	-0,46	-1,15	6,25
4	-0,34	2,50	-0,85	0,1156
5	-0,88	-0,34	0,2992	0,7744
Σ	0		-1,3236	8,024

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{5} u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{5} u_t^2} = \frac{-1{,}3236}{8{,}024} = -0{,}165$$

Standardfehler von r_1: $\sigma(r_1) = \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}447$

(Approx.) 95%-Konfidenzintervall für r_1:

$[-2\cdot\sqrt{1/n}\,;\,2\cdot\sqrt{1/n}\,] = [-2\cdot\sqrt{1/5}\,;\,2\cdot\sqrt{1/5}\,] = [-2\cdot 0{,}447;\,2\cdot 0{,}447] = [-0{,}894;\,0{,}894]$

Da der Korrelationskoeffizient r_1 innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls liegt, kann die Nullhypothese einer fehlenden Autokorrelation 1. Ordnung nicht verworfen werden. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% weicht der empirische Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung nur zufallsbedingt von 0 ab.

c) Testen Sie die Residuen mit dem Ljung-Box-Test auf Autokorrelation für k= 1 (α=0,05)!
Hinweis: Setzen Sie zur Ermittlung des kritischen Wertes m=0!

Lösung

Ljung-Box-Statistik:

$$Q^*(k) = n(n+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{r_j^2}{n-j}$$

r_1 = -0,165 (s. Teil b)), n=5

$$Q^*(1) = n(n+2)\sum_{j=1}^{k=1}\frac{r_1^2}{n-1} = 5\cdot(5+2)\cdot\frac{(-0{,}165)^2}{5-1} = 35\cdot 0{,}0068 = 0{,}238$$

Kritischer Wert (α=0,05): $\chi^2_{1;0,95} = 3{,}84$

Testentscheidung:

$Q^*(1) = 0{,}238 < \chi^2_{1;0,95} = 3{,}84$ => H_0 (fehlende Autokorrelation 1. Ordnung) annehmen

d) Berechnen Sie r_2 und Q*(2) für die Residuen!

Lösung

Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} u_t \cdot u_{t-2}}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$$

Arbeitstabelle:

t	u_t	u_{t-2}	$u_t \cdot u_{t-2}$	u_t^2
1	-0,82	-	-	0,6724
2	-0,46	-	-	0,2116
3	2,50	-0,82	-2,05	6,25
4	-0,34	-0,46	0,1564	0,1156
5	-0,88	2,50	-2,2	0,7744
Σ	0		-4,0936	8,024

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{5} u_t \cdot u_{t-2}}{\sum_{t=1}^{5} u_t^2} = \frac{-4{,}0936}{8{,}024} = -0{,}510$$

Ljung-Box-Statistik:

$$Q^*(k) = n(n+2)\sum_{j=1}^{k}\frac{r_j^2}{n-j}$$

r_1 = -0,165 (s. Teil b)), r_2 = -0,510, n=5

$$Q^*(2) = n(n+2)\sum_{j=1}^{k=2}\frac{r_j^2}{n-j} = 5\cdot(5+2)\cdot[\frac{r_1^2}{5-1}+\frac{r_2^2}{5-2}]$$

$$= 35\cdot[\frac{(-0{,}165)^2}{4}+\frac{(-0{,}510)^2}{3}] = 35\cdot(0{,}0068+0{,}0867) = 3{,}2725$$

Aufgabe 2.19

Die Autokorrelationskoeffizienten 1. und 2. Ordnung der Umsätze des Unter-nehmens LINT nehmen die Werte $r_1 = 0{,}416$ und $r_2 = -0{,}115$ an.

a) Prüfen Sie, ob die beiden angegebenen Autokorrelationskoeffizienten in ein 95%-Konfidenzintervall eines reinen Zufallsprozesses hineinfallen! Welche Aussage ist damit verbunden?

Lösung

Approx. Konfidenzintervall eines reinen Zufallsprozesses:

$[- 2\sqrt{1/n}, 2\sqrt{1/n}] = [- 2\sqrt{1/5}, 2\sqrt{1/5}] = [-2\cdot 0{,}447; 2\cdot 0{,}447] = [-0{,}894; 0{,}894]$

$r_1 = 0{,}416 \in [-0{,}894; 0{,}894]$

$r_2 = -0{,}115 \in [-0{,}894; 0{,}894]$

Da beide Autokorrelationskoeffizienten in das 95%-Konfidenzintervall hinein-fallen, lässt sich die Hypothese eines reinen Zufallsprozesses nicht widerlegen.

b) Berechnen Sie die Box-Pierce-Statistik und prüfen Sie sie auf Signifikanz (α=0,01)!

Lösung

Box-Pierce-Statistik:

$$Q(2) = n \sum_{j=1}^{2} r_j^2 = 5 \cdot [0{,}416^2 + (-0{,}115)^2] = 5 \cdot 0{,}186281 = 0{,}931$$

Kritischer Wert: $\chi^2_{2;0{,}99} = 9{,}21$

Testentscheidung: $Q(2) = 0{,}931 < \chi^2_{2;0{,}99} = 9{,}21 \Rightarrow H_0$ annehmen

c) Ist die Ljung-Box-Statistik der Umsätze auf dem 1%-Niveau signifikant?

Lösung

Ljung-Box-Statistik:

$$Q^*(2) = n(n+2) \sum_{j=1}^{2} \frac{r_j^2}{n-j} = 5 \cdot (5+2) \cdot [\frac{0{,}416^2}{5-1} + \frac{(-0{,}115)^2}{5-2}]$$
$$= 35 \cdot (0{,}043264 + 0{,}004408) = 35 \cdot 0{,}047672 = 1{,}669$$

Kritischer Wert: $\chi^2_{2;0{,}99} = 9{,}21$

Testentscheidung: $Q^*(2) = 1{,}669 < \chi^2_{2;0{,}99} = 9{,}21 \Rightarrow H_0$ annehmen