3.2 Autoregressive Prozesse (AR-Modelle)

3.2.1 AR(p)-Prozesse

Definition:

Ein stochastischer Prozess (X_t) heißt **autoregressiver Prozess der Ordnung p** [AR(p)-Prozess], wenn er der Beziehung

(3.2.1)
$$\boxed{\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + U_t \\ &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + U_t \qquad \text{mit} \quad \phi_0 = 1 \end{aligned}}$$

oder

(3.2.1') $\phi(B) X_t = U_t$

mit $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$

B (backshift/lag operator)

$B \cdot X_t = X_{t-1}$

$B^2 \cdot X_t = X_{t-2}$

...

$B^i X_t = X_{t-i}$

$B^0 X_t = X_t$

genügt. (U_t) ist darin ein reiner Zufallsprozess (White-Noise-Prozess).

Anm.: X_t wird hierbei als Abweichung vom Mittelwert μ vorausgesetzt.

Anmerkungen:

- Gl. (3.2.1) entspricht formal einem multiplen Regressionsmodell. Die unabhängigen Variablen (erklärenden Variablen) sind hier jedoch ausschließlich zeitlich verzögerte Variablen der abhängigen Variablen.

- Prozesse dieses Typs werden erstmals von G.U. Yule (1920) eingeführt.

Allgemein ist ein AR(p)-Prozess durch

(3.2.2) $$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + U_t$$

gegeben, wobei δ ein konstantes Glied ist, das mit dem Mittelwert μ des Prozesses in Beziehung steht. Für einen mittelwertstationären Prozess muss

$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = \ldots = E(X_{t-p}) = \mu$$

gelten, so dass μ aus

$$\mu = \delta + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + \ldots + \phi_p \mu$$

bestimmt werden kann:

(3.2.3) $$\boxed{\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p}}$$

Da μ endlich sein muss, ist zu fordern, dass die Ungleichung

(3.2.4) $\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_p < 1$

erfüllt ist. (3.2.4) ist zugleich eine notwendige Bedingung für die Stationarität eines AR(p)-Prozesses. Notwendige und hinreichende Stationaritätsbedingungen werden später aufgezeigt.

Spezielle AR(p)-Prozesse

· AR(1)-Prozess

(3.2.5) $X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\phi_1 B)}_{=\phi(B)} X_t = U_t$$

$$\text{Allg. } X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + U_t$$

$$\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$$

Anm.: X_t ist im Folgenden als Abweichung vom Mittelwert μ des Prozesses gemessen. Stationarität wird zunächst vorausgesetzt.

- **Varianz von X_t**:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = Var(\phi_1 X_{t-1} + U_t) = \phi_1^2 Var(X_{t-1}) + Var(U_t)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma^2 \Rightarrow \gamma_0(1-\phi_1^2) = \sigma^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}}$$

$$\left[\text{Restriktion}: \phi_1^2 < 1 \text{ oder } |\phi_1| < 1\right]$$

- Autokovarianzfunktion (ACVF):

$\tau=1$:

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + U_t \qquad \Big| \cdot X_{t-1}$$

$$X_{t-1}X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1}^2 + \cdot X_{t-1} \cdot U_t$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ = \gamma_1, \\ \text{wegen} \\ \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) \\ = E(X_t X_{t-1})}}{E(X_{t-1}X_t)} = \underset{\substack{\uparrow \\ = \gamma_0, \\ \text{wegen} \\ \mathrm{Var}(X_{t-1}) \\ = E(X_{t-1}^2)}}{\phi_1 E(X_{t-1}^2)} + \underset{\substack{\uparrow \\ = 0, \\ \text{da } X_{t-1} \text{ und } U_t \\ \text{unkorreliert sind} \\ \left(\begin{array}{l} U_t \text{ beeinflusst } X_t, \\ \text{aber nicht } X_{t-1} \end{array}\right)}}{E(X_{t-1} \cdot U_t)}$$

$$\boxed{\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 = \frac{\phi_1 \sigma^2}{1 - \phi_1^2}}$$

$\tau=2$: $X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + U_t \quad \Big| \cdot X_{t-2}$

$$X_{t-2}X_t = \phi_1 \cdot X_{t-2} \cdot X_{t-1} + X_{t-2} \cdot U_t$$

$$E(X_{t-2}X_t) = \phi_1 E(X_{t-2} \cdot X_{t-1}) \quad + E(X_{t-2} \cdot U_t)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$= \gamma_2 \qquad\qquad = \gamma_1, \qquad\qquad = 0,$$

da die Auto-kovarianz nur vom Lag abhängt

da X_{t-2} und U_t unkorreliert sind.

$$\boxed{\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 = \frac{\phi_1^2 \sigma^2}{1-\phi_1^2}}$$

allg. $$\boxed{\gamma_\tau = \frac{\phi_1^\tau \sigma^2}{1-\phi_1^2}, \quad \tau = 0,1,2,\ldots}$$

- **Autokorrelationsfunktion (ACF)**

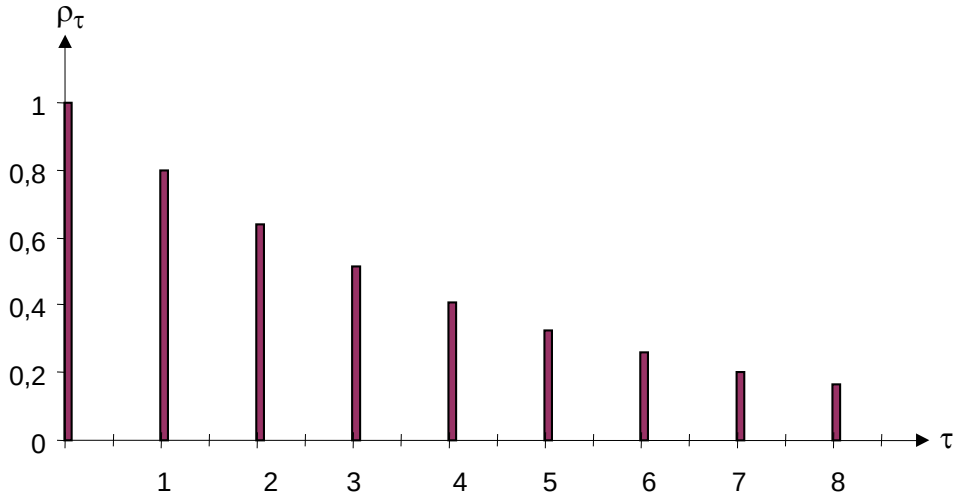
$$\tau = 1: \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \sigma^2}{1-\phi_1^2} \Bigg/ \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} = \phi_1$$

$$\tau = 2: \quad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1^2 \sigma^2}{1-\phi_1^2} \Bigg/ \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} = \phi_1^2$$

allg. $\boxed{\rho_\tau = \phi_1^\tau, \quad \tau = 0,1,2,\ldots}$

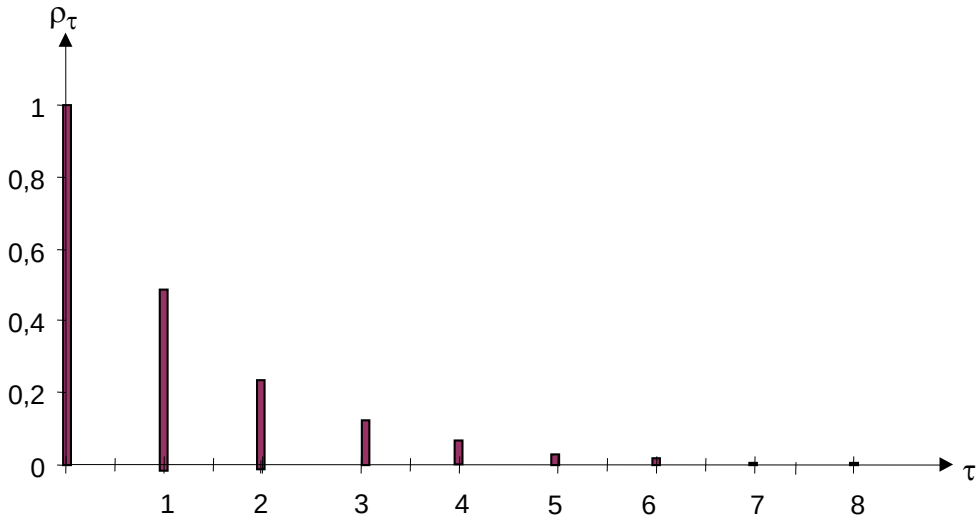
Da $|\phi_1| < 1$ ist, ist die Autokorrelationsfunktion eines AR(1)-Prozesses eine exponentiell abnehmende Funktion des Lags τ. Für $\phi_1 > 0$ verläuft sie dabei im positiven Bereich, während es sich für $\phi_1 < 0$ um eine alternierende Folge handelt.

Abbildung 3.4: Autokorrelationsfunktionen versch. AR(1)-Prozesse



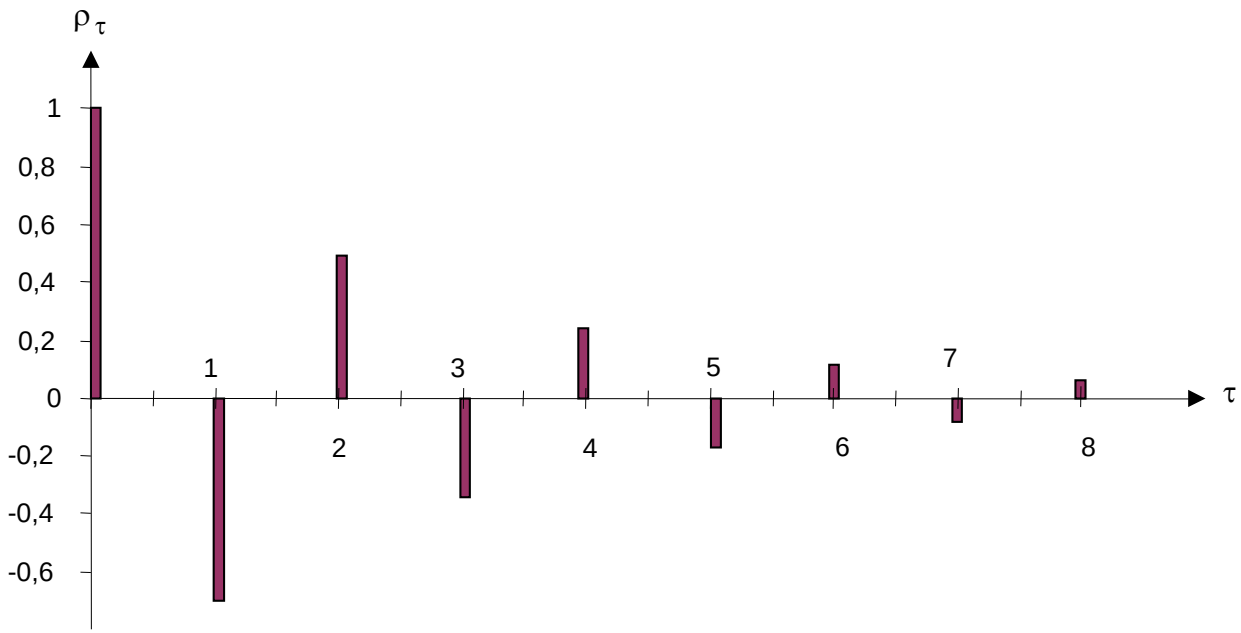
(a) $\phi_1 = 0{,}8 \quad \Big| \; X_t = 0{,}8 \cdot X_{t-1} + U_t$

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_τ	1	0,8	0,64	0,512	0,410	0,328	0,262	0,201	0,168



(b) $\phi_1 = 0{,}5 \quad \Big| \; X_t = 0{,}5 \cdot X_{t-1} + U_t$

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_τ	1	0,5	0,25	0,125	0,063	0,031	0,016	0,008	0,004



(c) $\phi_1 = -0{,}7 \quad \Big| \; X_t = -0{,}7 \cdot X_{t-1} + U_t$

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ρ_τ	1	-0,7	0,49	-0,343	0,240	-0,168	0,118	-0,082	0,058

Invertierbarkeit und Stationarität

-Darstellung des AR(1)-Prozesses in Abhängigkeit von den Zufallsvariablen U_t:

(3.2.6) $X_t = \phi_1 X_{t-1} + U_t$

Ersetzen von X_{t-1} durch

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + U_{t-1}$$

ergibt

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + U_{t-1}) + U_t \\ &= U_t + \phi_1 U_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2} \end{aligned}$$

Entsprechendes Ersetzen von X_{t-2} durch

$$X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + U_{t-2}$$

führt zu

$$\begin{aligned} X_t &= U_t + \phi_1 U_{t-1} + \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + U_{t-2}) \\ &= U_t + \phi_1 U_{t-1} + \phi_1^2 U_{t-2} + \phi_1^3 X_{t-3} \ . \end{aligned}$$

Führt man die Substitution k-mal durch, so ergibt sich

$$X_t = U_t + \phi_1 U_{t-1} + \phi_1^2 U_{t-2} + \ldots + \phi_1^k U_{t-k} + \phi_1^{k+1} X_{t-k-1} \ .$$

Für $k \to \infty$ erhält man die spezielle Form

(3.2.7) $$X_t = U_t + \phi_1 U_{t-1} + \phi_1^2 U_{t-2} + \ldots$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi_1^{\tau} U_{t-\tau}$$

des **allgemeinen linearen Prozesses**

(3.2.8) $$X_t = U_t + \psi_1 \cdot U_{t-1} + \psi_2 \cdot U_{t-2} + \ldots = \sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau \cdot U_{t-\tau},$$

$$\psi_0 = 1, \text{ mit } \psi_\tau = \phi_1^{\tau}.$$

Die Restriktion

(3.2.9) $$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^2 = \sum_{\tau=0}^{\infty} \phi_1^{2\tau} < \infty$$

ist nur dann erfüllt, wenn $|\phi_1| < 1$ ist. Die Bedingung

(3.2.10) $|\phi_1| < 1$

wird daher auch als **Stationaritätsbedingung** bezeichnet. Unter Berücksichtigung dieser Stationaritätsbedingung kann ein AR(1)-Prozess in einen äquivalenten Moving-Average-Prozess unendlicher Ordnung [MA(∞)-Prozess] überführt werden und umgekehrt. Man sagt aus, dass Gl. (3.2.7) die MA-Darstellung des AR(1)-Prozesses (3.2.6) ist.

Da der AR(1)-Prozess bei Gültigkeit der Stationaritätsbedingung (3.2.10) in einen MA(∞)-Prozess invertierbar ist, kennzeichnet (3.2.10) zugleich die **Invertierbarkeitsbedingung**. Analog kann gezeigt werden, dass ein MA(1)-Prozess in einen AR(∞)-Prozess invertiert werden kann, wenn $|\phi_1| < 1$ ist.

Die allgemeine Bedingung für die Stationarität eines AR-Prozesses, dass die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des charakteristischen Polynoms

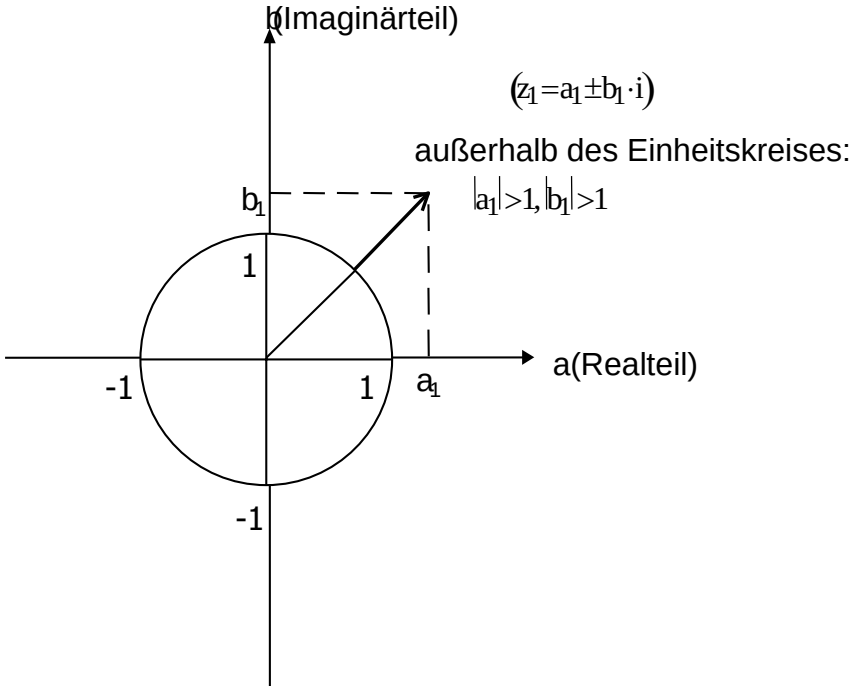
$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \ldots - \phi_p z^p = 0$$

außerhalb des Einheitskreises liegen müssen, führt im Falle des AR(1)-Prozesses unmittelbar zur oben begründeten Stationaritätsbedingung $|\phi_1| < 1$:

$$1 - \phi_1 z = 0 \quad \Rightarrow \phi_1 z = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_1 = \frac{1}{\phi_1}}$$

Die Wurzel $1/\phi_1$ liegt nämlich genau dann außerhalb des Einheitskreises, wenn der absolute Wert von ϕ_1 kleiner als eins ist ($|\phi_1| < 1$).

bei komplexen Zahlen $(z = a \pm b \cdot i)$:



• AR(2)-Prozess

(3.2.11) $$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)}_{= \phi(B)} X_t = U_t$$

Anm.: X_t als Abweichung vom Mittelwert μ vorausgesetzt

Allg. (3.3.12) $$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t$$

$$\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

- **Autokovarianzen und Autokorrelationen**

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t \,\Big|\cdot X_{t-1}$$

$$X_{t-1} X_t = \phi_1 X_{t-1}^2 + \phi_2 X_{t-1} X_{t-2} + X_{t-1} U_t$$

$$\underset{=\gamma_1}{\underset{\uparrow}{E(X_{t-1} X_t)}} = \phi_1 \underset{=\gamma_0}{\underset{\uparrow}{E(X_{t-1}^2)}} + \phi_2 \underset{=\gamma_1}{\underset{\uparrow}{E(X_{t-1} X_{t-2})}} + \underset{=0}{\underset{\uparrow}{E(X_{t-1} U_t)}}$$

(3.2.12) $\boxed{\gamma_1 = \phi_1 \cdot \gamma_0 + \phi_2 \cdot \gamma_1}$

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t \,\Big|\cdot X_{t-2}$$

$$X_{t-2}X_t = \phi_1 X_{t-2}X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}^2 + X_{t-2} \cdot U_t$$

$$E(\underbrace{X_{t-2}X_t}_{=\gamma_2}) = \phi_1 E(\underbrace{X_{t-2}X_{t-1}}_{=\gamma_1}) + \phi_2 E(\underbrace{X_{t-2}^2}_{=\gamma_0}) + E(\underbrace{X_{t-2} \cdot U_t}_{=0})$$

(3.2.13) $\boxed{\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0}$

Allg. (3.2.14) $\boxed{\gamma_\tau = \phi_1 \cdot \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \cdot \gamma_{\tau-2}}$

Bezieht man die Autokovarianzen γ_τ auf die Varianz γ_0 des AR(2)-Prozesses, so erhält man

(3.2.15) $\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2 \cdot \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \cdot \rho_1 \Rightarrow \rho_1(1-\phi_2) = \phi_1 \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}}$

und

(3.2.16) $\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_0 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$ $\rightarrow$ Einsetzen von $\rho_1 = \dfrac{\phi_1}{1-\phi_2}$ aus (3.2.15):

$$\rho_2 = \phi_1 \frac{\phi_1}{1-\phi_2} + \phi_2 \qquad \boxed{\Rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)}{1-\phi_2}}$$

Allg. (3.2.17) $\rho_\tau = \phi_1 \cdot \rho_{\tau-1} + \phi_2\rho_{\tau-2}, \qquad \tau = 1,2,\ldots$

Die Gleichungen (3.2.14) und (3.2.17) heißen **Yule-Walker-Gleichungen**. Aus (3.2.17) lassen sich Autokorrelationskoeffizienten ρ_τ des AR(2)-Prozesses für $\tau > 2$ rekursiv bestimmen.

- **Varianz von X_t:**

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t \\ \mathrm{Var}(X_t) &= \mathrm{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + U_t) \\ &= \mathrm{Var}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2}) + \mathrm{Var}(U_t) \end{aligned}$$

$\uparrow$ unabh. zw. X_{t-1} und U_t und zw. X_{t-2} und U_t

$$= \phi_1^2 \mathrm{Var}(X_{t-1}) + \phi_2^2 \mathrm{Var}(X_{t-2}) + 2\phi_1\phi_2$$
$$\mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) + \mathrm{Var}(U_t)$$

Stationarität → $= \phi_1^2\gamma_0 + \phi_2^2\gamma_0 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \sigma_u^2$

(3.2.18) $\gamma_0 = \phi_1^2\gamma_0 + \phi_2^2\gamma_0 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \sigma^2$

Yule-Walker-Gleichung für $\tau = 1$:

(3.2.19) $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1$

2 Gleichungen in den beiden Unbekannten γ_0 und γ_1 (können simultan gelöst werden).

Lösung nach γ_0 ergibt:

(3.2.20) $$\boxed{\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\cdot\sigma^2}{(1+\phi_2)\left[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\right]}}$$

Herleitung:

Aus (3.2.18) folgt: $\gamma_0 - \phi_1^2\gamma_0 - \phi_2^2\gamma_0 = 2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \sigma^2$

Aus (3.2.19) folgt: $\gamma_1 - \phi_2\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1(1-\phi_2) = \phi_1\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0$

Wird $\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0$ für γ_1 in die erste Gleichung eingesetzt, ergibt sich

$$\gamma_0 - \phi_1^2\gamma_0 - \phi_2^2\gamma_0 = 2\phi_1\phi_2\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 \cdot (1-\phi_1^2-\phi_2^2-\frac{2\phi_1^2\phi_2}{1-\phi_2}) = \sigma^2 \Big| \cdot (1-\phi_2)$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1-\phi_2)(1-\phi_1^2-\phi_2^2)-2\phi_1^2\phi_2},$$

woraus man nach weiterer Umformung (3.2.20) erhält.

Invertierbarkeit (und damit auch Stationarität) Stationaritätsbedingungen:

Charakteristische Gleichung: $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0$

$$\Rightarrow z^2 + \underbrace{\frac{\phi_1}{\phi_2}}_{=a} z - \underbrace{\frac{1}{\phi_2}}_{=b} = 0 \qquad \text{[Normalform]}$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = -\frac{\phi_1}{2\phi_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\phi_1}{2\phi_2}\right)^2 + \frac{1}{\phi_2}}$$

[z_1 und z_2 müssen außerhalb des Einheitskreises liegen, wenn (X_t) ein stationärer Prozess ist.]

$$\Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{2\phi_2}\left(-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right)$$

Je nachdem, ob die Wurzeln z_1 und z_2 reell oder konjugiert-komplex sind und in Abhängigkeit des Vorzeichens der Parameter ϕ_1 und ϕ_2 ergeben sich unterschiedliche charakteristische Verläufe der Autokorrelationsfunktion.

- Reelle Wurzeln: Diskriminante $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$

ACF **sinkt exponentiell** bei Stationarität.

- Komplexe Wurzeln: $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

ACF verläuft mit **gedämpften Schwingungen** bei Stationarität.

- **Stationarität**

falls $|z_1| > 1, |z_2| > 1$

a) $$z_1 z_2 = \left[-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]\left[-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]$$

$$= \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = +b = -\frac{1}{\phi_2}$$

Aus $|z_1| > 1, |z_2| > 1$ folgt

$$|z_1| \cdot |z_2| > 1 \text{ und damit } \underbrace{\left|\frac{1}{\phi_2}\right|}_{= \frac{1}{|\phi_2|}} > 1 \Rightarrow 1 > |\phi_2|,$$

woraus man die Stationaritätsbedingung (a1) $-1 < \phi_2 < 1$ erhält.

b) Eine weitere Stationaritätsbedingung bezüglich der Koeffizienten des AR(2)-Modells lässt sich aus

$$|\rho_1| < 1$$

herleiten: $|\rho_1| = \left|\frac{\phi_1}{1-\phi_2}\right| < 1$, d.h. $-1 < \frac{\phi_1}{1-\phi_2} < 1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\phi_1}{1-\phi_2}}_{>0 \text{ wegen (a1)}} > -1 \quad \text{und} \quad \underbrace{\frac{\phi_1}{1-\phi_2}}_{>0 \text{ wegen (a1)}} < 1$$

$$\Rightarrow \phi_1 > (-1)(1-\phi_2)$$

$$\Rightarrow \phi_1 > \phi_2 - 1$$

$$\underset{(b1)}{\Rightarrow} \boxed{\phi_1 - \phi_2 > -1 \quad \text{oder} \quad \phi_2 - \phi_1 < 1}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \phi_1 < 1 - \phi_2$$

$$\underset{(b2)}{\Rightarrow} \boxed{\phi_1 + \phi_2 < 1}$$

Anmerkung: (b1) $\phi_1 - \phi_2 > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_1 > \phi_2 - 1$

(b2) $\phi_1 + \phi_2 < 1 \quad => \underbrace{(\phi_2 - 1)}_{<\phi_1} + \phi_2 < 1$

$$\Leftrightarrow 2\phi_2 < 2 \Leftrightarrow \phi_2 < 1,$$

d.h. die rechte Seite von (a1) wird durch (b1) und (b2) impliziert, so dass die **Stationaritätsbedingungen** für die Koeffizienten ϕ_1 und ϕ_2 auch durch

$$\boxed{\phi_2 > -1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1}$$ oder

(S) $$\boxed{\phi_2 > -1, \quad \phi_1 - \phi_2 > -1, \quad \phi_1 + \phi_2 < 1}$$

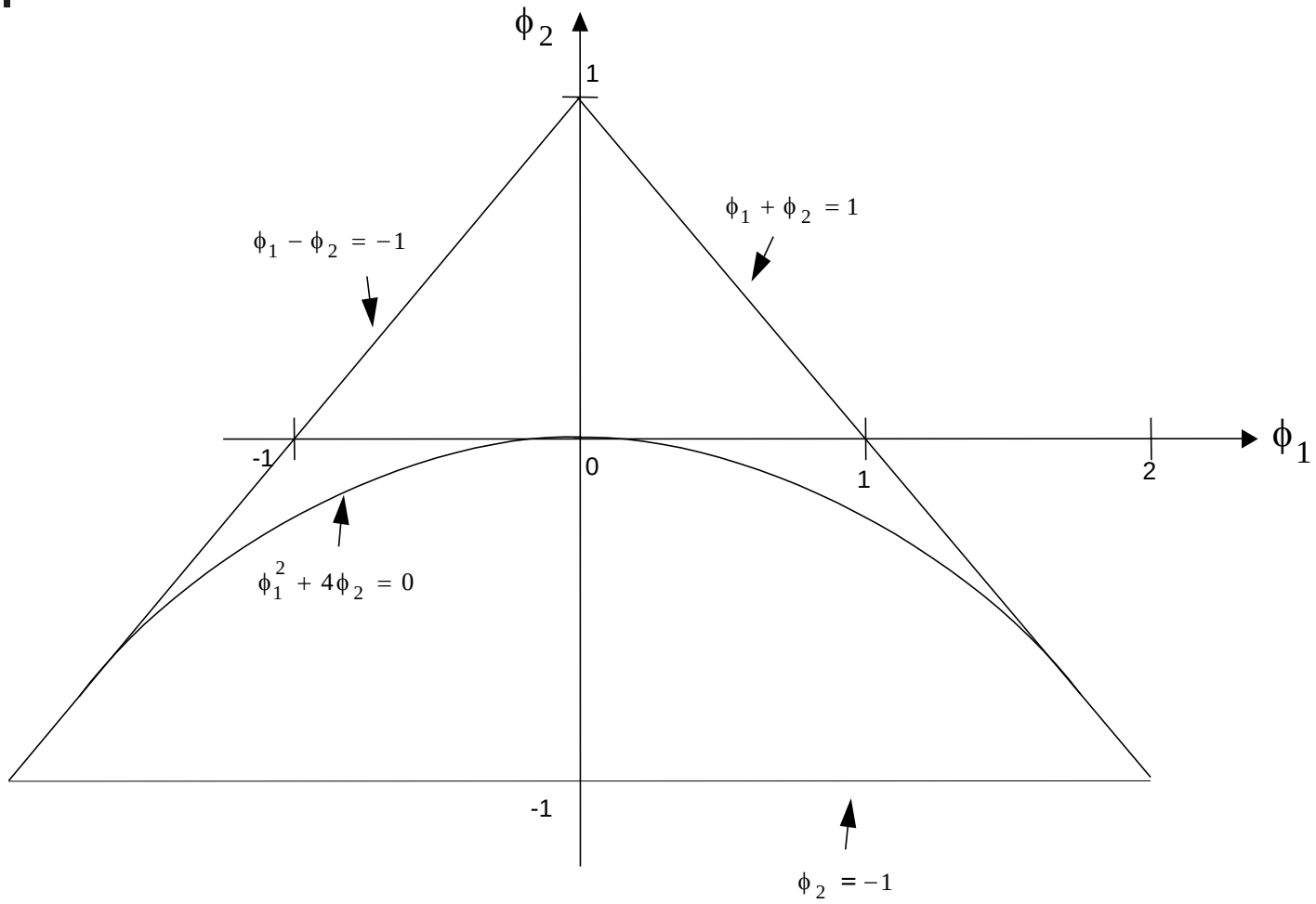
wiedergegeben werden können.

Trägt man die Stationaritätsbedingungen (S) in einem ϕ_1, ϕ_2 -Koordinatensysten ein, so erhält man ein sog. „Stationaritätsdreieck", innerhalb dessen die zulässigen Paare (ϕ_1, ϕ_2) liegen. Die Parabel

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$$

trennt dagegen die zyklischen und nicht zyklischen Verläufe: unterhalb der Parabel liegt der ϕ_1, ϕ_2 -Bereich für einen zyklischen Verlauf, oberhalb der ϕ_1, ϕ_2 -Bereich für einen nicht zyklischen Verlauf.

Abbildung 3.5: Stationaritäts- und Schwingungsbedingungen („Stationaritätsdreieck" und Parabel)



Beispiel eines AR(2)-Prozesses

$$X_t = 0{,}7X_{t-1} - 0{,}1X_{t-2} + U_t$$

$$\Rightarrow (1 - 0{,}7B + 0{,}1B^2)X_t = U_t$$

- Überprüfen der Stationarität (Invertierbarkeit):

Charakter. Gleichung: $1 - 0{,}7z + 0{,}1z^2 = 0$

$$\Rightarrow z^2 \underbrace{-7}_{=a}z \underbrace{+10}_{=b} = 0 \qquad \text{[Normalform]}$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = 3{,}5 \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10}$$

$$= 3{,}5 \pm \sqrt{\frac{49-40}{4}} = 3{,}5 \pm 1{,}5$$

$$\Rightarrow z_1 = 2 \quad \wedge \quad z_2 = 5 \qquad \text{(ACF sinkt exponentiell)}$$

Allg. AR(p)-Prozess

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + U_t$$

Bestimmung der Autokorrelationsfunktion

$$E(X_t X_{t-\tau}) = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-\tau}) + \phi_2 E(X_{t-2} X_{t-\tau}) + \ldots + \phi_p E(X_{t-p} X_{t-\tau}) + E(U_t X_{t-\tau})$$

Es gilt $E(X_{t-i} X_{t-\tau}) = \gamma_{\tau-i}$

und (3.2.21) $E(U_t X_{t-\tau}) = 0$ für $\tau > 0$, da

$X_{t-\tau}$ nur von $U_{t-\tau}, U_{t-\tau-1}, U_{t-\tau-2}, \ldots$ abhängt.

$\Leftrightarrow$ (3.2.22) $\gamma_\tau = \phi_1 \gamma_{\tau-1} + \phi_2 \gamma_{\tau-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{\tau-p} \quad \Big| : \sigma_x^2 = \gamma_0$

[Yule-Walker-Gleichungen]

$\Rightarrow$ (3.2.23) $\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} + \ldots + \phi_p \rho_{\tau-p}, \ \tau > 0$

Die Autokorrelationsfunktion eine AR(p)-Prozesses hat für p>2 einen mit derjenigen eines AR(2)-Prozesses vergleichbaren Verlauf. Insbesondere ist es eine exponentiell abnehmende Funktion, was monoton oder in gedämpften Schwingungen erfolgen kann.

Die Yule-Walker-Gleichungen erlauben eine iterative Berechnung des ACFs.

Ausführliche Schreibweise von (3.2.23):

$$\rho_1 = \phi_1 \underbrace{\rho_0}_{=1} + \phi_2 \rho_{-1} + \ldots + \phi_p \rho_{-p+1}$$

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \underbrace{\rho_0}_{=1} + \ldots + \phi_p \rho_{-p+2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_p \underbrace{\rho_0}_{=1}$$

Matrizenschreibweise (unter Berücksichtigung von $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$):

(3.2.24)
$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \cdots \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \cdots \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} \cdots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

kompakte Schreibweise: $\underset{px1}{\boldsymbol{\rho}} = \underset{pxp}{\mathbf{P}} \cdot \underset{px1}{\phi}$

(3.2.24) ist ein lineares Gleichungssystem (p Gleichungen, p Unbekannte), aus dem bei linearer Unabh. der p Gleichungen die p ACFs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ bestimmt werden können. Daraus lassen sich die ACFs $\rho_\tau, \tau > p$, iterativ bestimmen.

[Anm.: Bei der Schätzung eines AR(p)-Modells wird der umgekehrte Weg beschritten: bei gegebenem Schätzern $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \ldots, \hat{\rho}_p$ der Autokorrelationskoeffizienten $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ werden aus (3.2.24) Schätzer $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p$ für die Koeffizienten $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ ermittelt:

$$\underset{px1}{\hat{\phi}} = \underset{pxp}{\hat{\mathbf{P}}^{-1}} \cdot \underset{px1}{\hat{\boldsymbol{\rho}}} \quad].$$

Varianz von X_t

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + U_t \Big| \cdot \overset{1.}{X_t}, \overset{2.}{E(.)}$$

$$E(X_t^2) = Var(X_t) = \phi_1 E(X_{t-1}X_t) + \phi_2 E(X_{t-2}X_t) + \ldots + \phi_p E(X_{t-p}X_t) + E(U_t X_t)$$

$$\left[\begin{aligned} E(U_t X_t) &= E\left[U_t(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + U_t)\right] \\ &= E(U_t^2) = \sigma_u^2 \end{aligned}\right]$$

Unabhängigkeit zw. U_t und X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-p}

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_u^2 \qquad \left[\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} \Rightarrow \gamma_\tau = \rho_\tau \cdot \gamma_0\right.$$

$$= \phi_1\rho_1\gamma_0 + \phi_2\rho_2\gamma_0 + \ldots + \phi_p\rho_p\gamma_0 + \sigma_u^2$$

$$= \gamma_0(\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \ldots + \phi_p\rho_p) + \sigma_u^2$$

$$\Rightarrow \gamma_0(1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots - \phi_p\rho_p) = \sigma_u^2$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_u^2}{(1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \ldots - \phi_p\rho_p)}$$