5. ARCH- und GARCH-Modelle

● ARCH-Modelle

In dem multiplen Regressionsmodell

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&Y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + U_t \\
&Y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + U_t \\
&\text{mit } \mathbf{x}_t' = (1 \quad x_{2t} \quad x_{3t} \ldots x_{kt}) \\
&\text{und } \boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \; \beta_2 \ldots \beta_k)
\end{aligned}
$$

werden in der Ökonometrie bei der Kleinst-Quadrate-Schätzung (OLS-Schätzung) für die Störvariable U die Standardannahmen

(A1) $E(U_t) = 0$ (Erwartungswert von Null)

(A2) $Var(U_t) = E(U_t^2) = \sigma^2$ [konst. Varianz (=Homoskedastizität)]

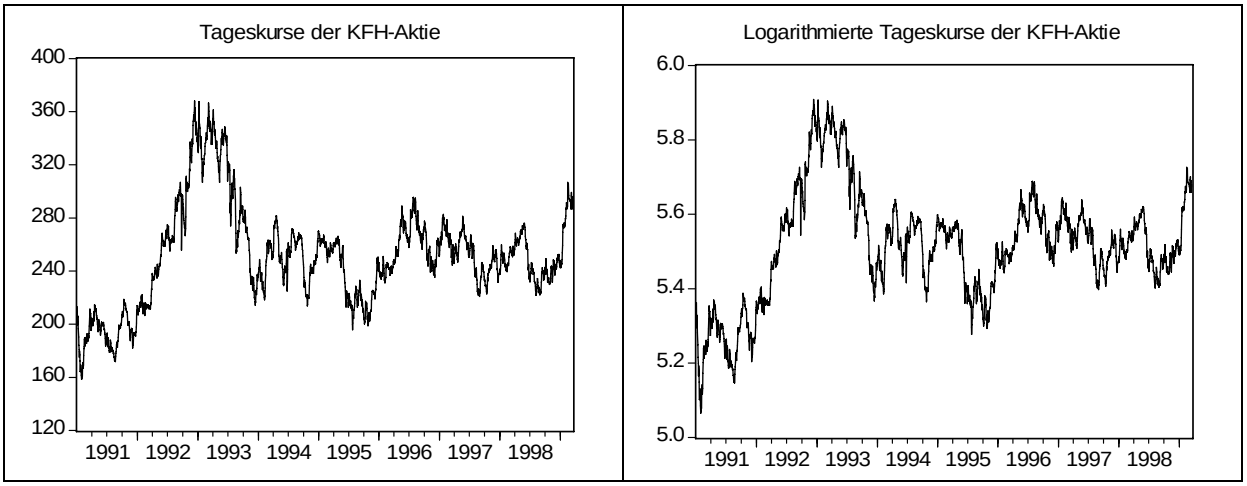
(A3) $Cov(U_t, U_s) = E(U_t U_s) = 0 \quad \text{für } t \neq s$ (fehlende Autokorrelation)

unterstellt. In der Zeitreihenanalyse könnten die x-Variablen aus den Lags der endogenen Variablen Y bestehen (AR-Prozess). Im Falle eines Random Walks der originären Zeitreihe wird als abhängige Variable Y eine differenzierte Zeitreihe verwendet. Allgemein können zur Erklärung der Werte einer Zeitreihe k erklärende x-Variablen herangezogen werden. Im einfachsten Fall (k=1) schwankt die Zeitreihe um eine Konstante, was z.B. gegeben sein kann, wenn ein Random Walk durch Differenzenbildung in eine stationäre Zeitreihe überführt wird.

Bei Preis- und Finanzmarktvariablen zeigt sich jedoch häufig, dass die auch die Annahme einer konstanten Varianz häufig nicht gerechtfertigt ist. Vielmehr sind die quadrierten Residuen als Varianzkomponenten im Zeitablauf korreliert. Es sind Cluster hoher quadrierter Residuen zu beobachten, die aus hohen positiven und negativen Abweichungen mit oder ohne Vorzeichenwechsel auftreten können, die einen hohen Grad an Unsicherheit zu den entsprechenden Zeitpunkten widerspiegeln. Man spricht in diesem Fall von **Volatilitäts-clustern**. Zu anderen Zeitpunkten ist dagegen ein geringerer „noise“ der Zeitreihe zu konstatieren, was durch eine niedrigere Varianz indiziert wird.

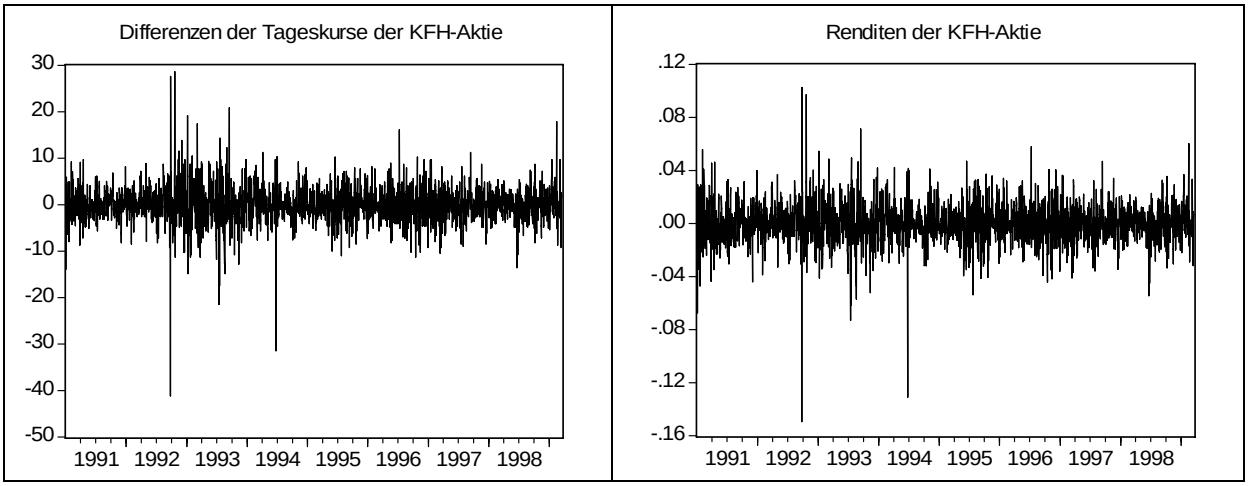
Beispiel 5.1: Volatilitätscluster

Um die das Phänomen der Volatilitätscluster und die Existenz nichtlinearer Abhängigkeiten in Zeitreihen zu illustrieren, betrachten wir die originären und logarithmierten Tageskurse der KFH-Aktie im Zeitraum 2. Januar 1991 – 18. März.1999 (n=2142):



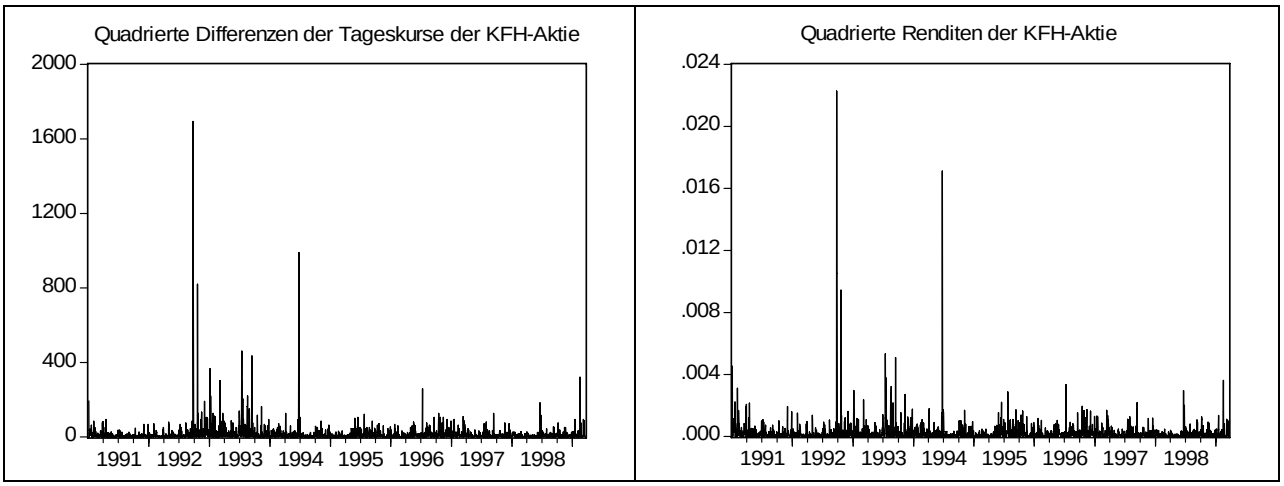
Beide Zeitreihen weisen die gleiche Struktur auf. Die Verwendung der logarithmierten Zeitreihenwerte ist bei Kursdaten vorteilhaft, da die ersten Differenzen dann unmittelbar die Renditen wiedergeben:

$$\Delta(\log Y_t) = \log Y_t - \log Y_{t-1} = \log(Y_t / Y_{t-1}) \qquad \text{(stetige Rendite)}$$



Deutlich zu erkennen sind stärkere Kursveränderungen („Volalitätscluster“) insbesondere im II. Quartal 1992, im II. und III. Quartal 1993 und im II. Quartal 1994, im II. Quartal 1996 und im IV. Quartal 1998.

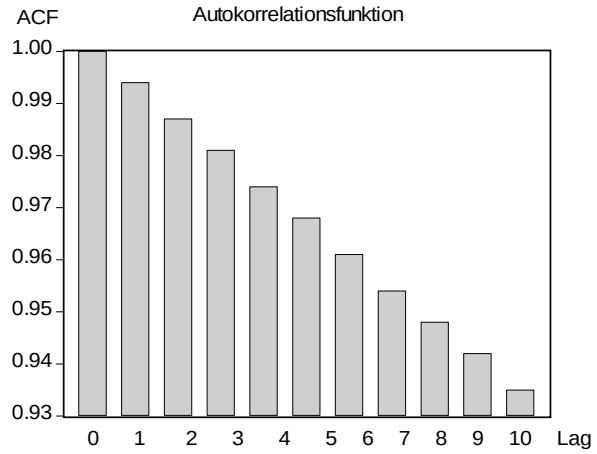
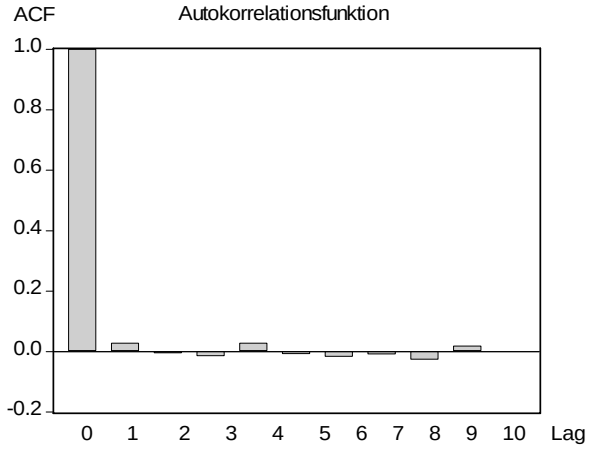
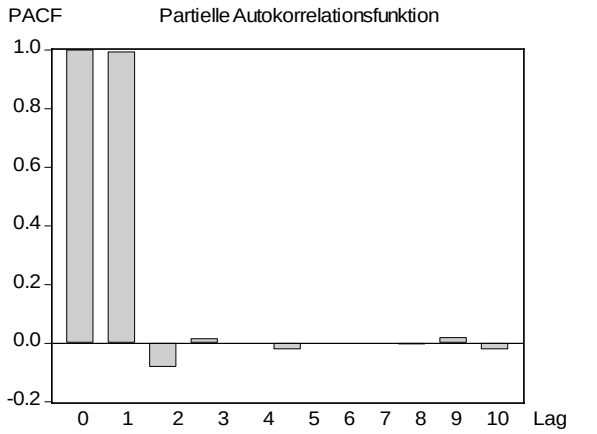
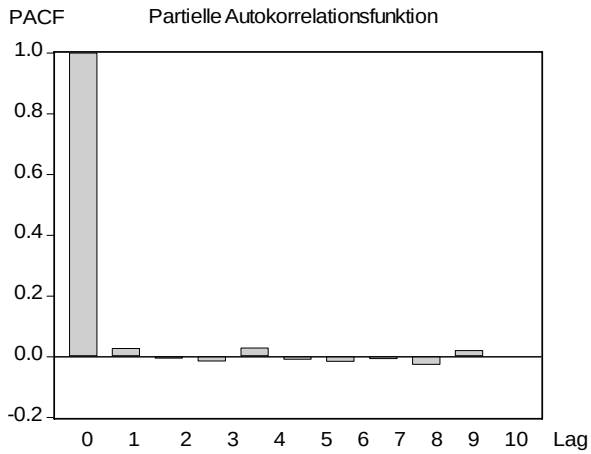
Die Volatilitätscluster gehen besonders deutlich aus den Zeitreihen der quadrierten Kursdifferenzen und quadrierten logarithmierten Kursdifferenzen hervor:



Die Annahme gleicher Varianzen (Homoskedastizität) in allen Perioden ist bei der Existenz von Volatilitätsclustern nicht mehr gegeben. In bestimmten Phasen ist die Varianz, die das Risiko in den Aktienrenditen zum Ausdruck bringt, erheblich höher als in „normalen“ Phasen. Darin spiegelt sich die Zeitabhängigkeit der Varianz wider. □

Beispiel 5.2: Nichtlineare Abhängigkeiten

Die **Korrelogramme der Tageskurse (Y_t) und ihrer Veränderungen (ΔY_t)** der KFH-Aktie weisen für den Zeitraum 2. Januar 1991 – 18. März 1999 (n=2142) Strukturen auf:

Tageskurse (Y_t) der KFH-Aktie	Kursdifferenzen (ΔY_t) der KFH-Aktie
	
	

Die Signifikanz der empirischen Autokorrelationskoeffizienten und partiellen Autokorrelationskoeffizienten, $\hat{\rho}_\tau$ und $\hat{\phi}_{\tau\tau}$, lässt sich für die beiden Zeitreihen (Y_t) und (ΔY_t) auf der Grundlage des approximativen 95%-Konfidenzintervall unter Verwendung des einheitlichen Standardfehlers $\sqrt{1/n}$ bestimmen:

Approximatives 95%-Konfidenzintervall:

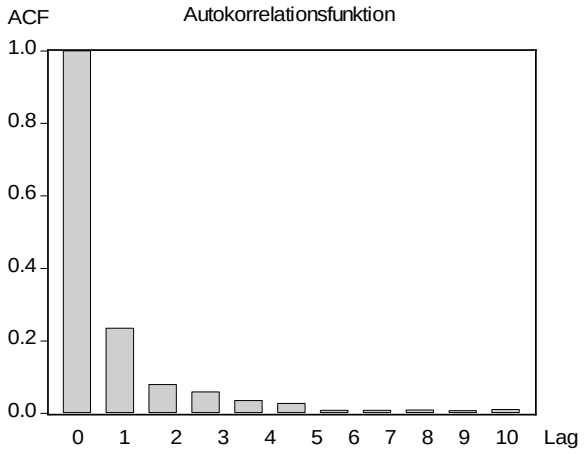
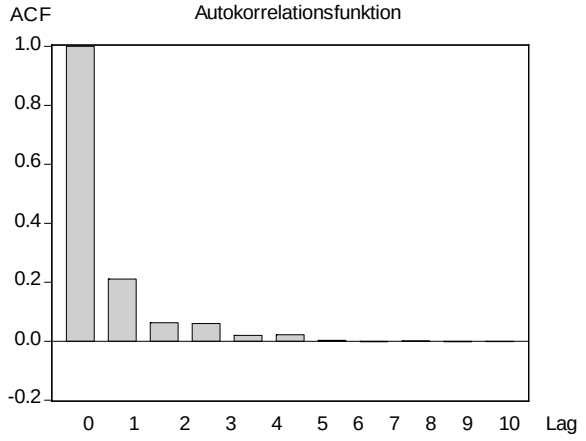
$$\begin{aligned}\left[-2\cdot\sqrt{1/n};\ 2\cdot\sqrt{1/n}\right] &= \left[-2\cdot\sqrt{1/2142};\ 2\cdot\sqrt{1/2142}\right]\\ &= \left[-2\cdot 0{,}0216;\ 2\cdot 0{,}0216\right]\\ &= \left[-0{,}043;\ 0{,}043\right]\end{aligned}$$

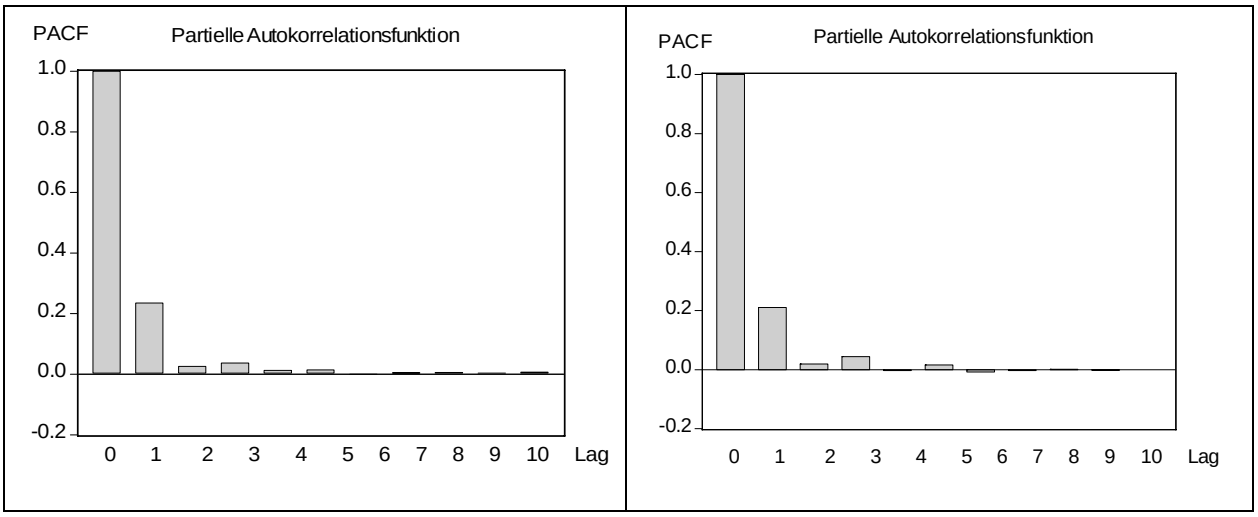
Signifikante Autokorrelationen und partielle Autokorrelationen ($\hat{=}$ $\hat{\rho}_\tau$ und $\hat{\phi}_{\tau\tau}$ außerhalb des Konfidenzintervalls)			
ACF von Y_t	PACF von Y_t	ACF von ΔY_t	PACF von ΔY_t
alle 10 Autokorrelationen	$\hat{\phi}_{11} = 0{,}994$		
	$\hat{\phi}_{22} = 0{,}083$		

Obwohl aus dem Zeitreihendiagramm der Aktienkurse, (Y_t), kein deterministischer Trend erkennbar ist, sind alle Autokorrelationen bis zur hier überprüften Ordnung 10 hochsignifikant. Außerdem nehmen die Autokorrelationen in ihrer Größenordnung nur langsam ab, was für eine trendbehaftete Zeitreihe typisch ist. Es handelt sich hier um einen stochastischen Trend, der durch Differenzenbildung eliminiert werden kann.

Die Veränderungen der Aktienkurse, (ΔY_t), weisen dagegen keine signifikanten Autokorrelationen und partiellen Autokorrelationen mehr auf. Das bedeutet, dass die **differenzierte Zeitreihe** (ΔY_t) **keine linearen Abhängigkeiten** mehr enthält. Dies ist dann der Fall, wenn die Zeitreihe (ΔY_t) die Realisation eines White-Noise-Prozesses ist.

Für die **quadrierten differenzierten Zeitreihen** der KFH-Aktie, $(\Delta Y_t)^2$ und $(\Delta \log Y_t)^2$, ergeben sich im Zeitraum 2. Januar 1991 – 18. März 1999 (n = 2142) folgende Korrelogramme:

Quadrierte Kursdifferenzen $(\Delta Y_t)^2$ der KFH-Aktie	Quadrierte logarithmierte Kursdifferenzen $(\Delta Y_t)^2$ der KFH-Aktie
	



Um die empirischen Autokorrelationen und partiellen Autokorrelationen der beiden Zeitreihen $(\Delta Y_t)^2$ und $(\Delta \log Y_t)^2$ eindeutig auf Signifikanz testen zu können, werden zusätzlich ihre Werte angegeben:

	Zeitreihe $(\Delta Y_t)^2$		Zeitreihe $(\Delta \log(Y_t))^2$	
Lag	ACF von $(\Delta Y_t)^2$	PACF von $(\Delta Y_t)^2$	ACF von $(\Delta(\log Y_t))^2$	PACF von $(\Delta(\log Y_t))^2$
1	0.235	0.235	0.211	0.211
2	0.080	0.026	0.063	0.019
3	0.060	0.037	0.060	0.045
4	0.036	0.013	0.020	-0.003
5	0.029	0.011	0.023	0.016
6	0.009	-0.004	0.003	-0.008
7	0.009	0.005	-0.002	-0.003
8	0.011	0.006	0.001	0.000
9	0.009	0.004	-0.002	-0.002
10	0.011	0.007	-0.001	-0.000

Wir testen die empirischen Autokorrelationen und partiellen Autokorrelationen der beiden Zeitreihen $(\Delta Y_t)^2$ und $(\Delta \log Y_t)^2$ unter Verwendung des bereits ermittelten approximativen 95%-Konfidenzintervalls

$$\left[-2\cdot\sqrt{1/n};\ 2\cdot\sqrt{1/n}\right]=\left[-0{,}043;\ 0{,}043\right]$$

auf Signifikanz:

Signifikante Autokorrelationen und partielle Autokorrelationen ($\hat{=}$ $\hat{\rho}_\tau$ und $\hat{\phi}_{\tau\tau}$ außerhalb des Konfidenzintervalls)			
ACF von $(\Delta Y_t)^2$	PACF von $(\Delta Y_t)^2$	ACF $(\Delta \log Y_t)^2$	PACF von $(\Delta \log Y_t)^2$
$\hat{\rho}_1 = 0{,}235$	$\hat{\phi}_{11} = 0{,}235$	$\hat{\rho}_1 = 0{,}211$	$\hat{\phi}_{11} = 0{,}211$
$\hat{\rho}_2 = 0{,}080$		$\hat{\rho}_2 = 0{,}063$	$\hat{\phi}_{33} = 0{,}045$
$\hat{\rho}_3 = 0{,}060$		$\hat{\rho}_3 = 0{,}060$	

Obwohl die Kursdifferenzen (ΔY_t) und logarithmierten Kursdifferenzen ($\Delta \log(Y_t)$) (hier aus Platzgründen unterdrückt) „white noise“ sind, d.h. keine linearen Abhängigkeiten enthalten, trifft dies für die quadrierten Kursdifferenzen nicht zu. Nach Beseitigung des stochastischen Trends durch Differenzenbildung bleiben somit **nichtlineare Abhängigkeiten** in den Kursdifferenzen und Aktienrenditen bestehen. Das bedeutet, dass die Kursveränderungen und Renditen **unkorreliert, aber nicht unabhängig** sind. □

In diesen Situationen ist es zweckmäßiger, die Varianz der Störgröße zu einem Zeitpunkt t in Abhängigkeit der Intensität der Störung zu modellieren, die prozessual entsteht und aktuell wirksam wird. Es handelt sich dann um eine bedingte Varianz bei dem zum Zeitpunkt t–1 gegebenen Informationsstand I_{t-1}. In einfachster Form ist die bedingte Varianz zum Zeitpunkt allein von der Störung der Vorperiode, u_{t-1}^2, abhängig:

(A4) $$\mathrm{Var}(U_t | I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 \ .$$

Man spricht dann von einem **ARCH(1)-Prozess**, was als Abkürzung für einen Autoregressive Conditional Heteroskedastic-Prozess 1. Ordnung steht.

Formal liegt dann an Stelle von (1) das Modell

(1') $$Y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \sigma_t^{1/2} = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot U_{t-1}^2\right)^{1/2}$$

vor, in der ε_t eine identisch verteilte, standardisierte Zufallsvariable bezeichnet, für die oft die Normalverteilungsannahme eingeführt wird.

Die Störgröße U_t besitzt einen bedingten Erwartungswert von Null und eine bedingte Varianz $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2$. Ihr unbedingter Erwartungswert und ihre unbedingte Varianz lassen sich aus der Regel der iterativen Erwartungswertbildung herleiten.

Mit

$$E_{t-1}(U_t) = E(U_t | I_{t-1})$$

lässt sich der unbedingte Erwartungswert von U_t durch

$$E(U_t) = E_0 ... E_{t-2} E_{t-1}(U_t)$$

bestimmen. Es handelt sich hierbei um eine sukzessive Bildung bedingter Erwartungswerte beginnend vom Zeitpunkt t–1 an. Da $E_{t-1}(U_t)$ gleich Null ist, verschwindet auch der unbedingte Erwartungswert von U_t: [1]

(2) $$E(U_t) = 0.$$

Daher lässt sich die Varianz von U_t in der Form

$$\mathrm{Var}(U_t) = E(U_t^2) = E_0 ... E_{t-3} E_{t-2} E_{t-1}(U_t^2)$$

schreiben. Unter Verwendung von (A2) erhält man

---

[1] Der Erwartungswert einer Konstanten ist stets gleich die Konstante selbst.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(U_t) &= E_0 \ldots E_{t-3}\, E_{t-2}\, E_{t-1}\, (U_t^2) \\
&= E_0 \ldots E_{t-3}\, E_{t-2}\, (\alpha_0 + \alpha_1 U_{t-1}^2) \\
&= E_0 \ldots E_{t-3} \left[\alpha_0 + \alpha_1 E_{t-2}(U_{t-1}^2)\right] \\
&= E_0 \ldots E_{t-3} \left[\alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 U_{t-2}^2)\right] \\
&= E_0 \ldots E_{t-3} \left(\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2 U_{t-2}^2\right) \\
&= E_0 \ldots E_{t-4} \left[\alpha_0 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2 E_{t-3}(U_{t-2}^2)\right]
\end{aligned}
.
$$

Sukzessive Bildung der bedingten Erwartungswerte führt schließlich zu

$$\mathrm{Var}(U_t) = \alpha_0(1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_1^{t-1}) + \alpha_1^t u_0^2.$$

Der Klammerausdruck stellt eine geometrische Reihe dar,

$$1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1^{t-1} = \frac{1-\alpha_1^t}{1-\alpha_1},$$

womit sich die Varianz der Störgröße U_t zu

$$\mathrm{Var}(U_t) = \alpha_0 \frac{1-\alpha_1^t}{1-\alpha_1} + \alpha_1^t u_0^2$$

vereinfacht. Setzt man den Prozess der unbedingten Erwartungswertbildung unbegrenzt in der Vergangenheit fort, d.h. lässt man $t \to \infty$ gehen, dann erhält man, $0<\alpha_1<1$ die unbedingte Varianz

(3) $$\mathrm{Var}(U_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}.$$

Obwohl U_t bedingt heteroskedastisch ist, bleibt die unbedingte Homoskedastizität des klassischen Modells bestehen.

Beispiel: ARCH(1)-Prozess

Das einfachste autoregressive Ansatz zur Modellierung eines bedingt heteroskedastischen Prozesses für die Renditen der KFH-Aktie ist das ARCH(1)-Modell. Der EViews-Output weist folgendes Schätzergebnis aus:

Dependent Variable: D(LOG(KFH))
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Sample (adjusted): 3/01/1991 18/03/1999
Included observations: 2141 after adjustments
Convergence achieved after 14 iterations Variance backcast: ON

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	8.64E-05	0.000332	0.260073	0.7948
Variance Equation				
C	0.000209	3.37E-06	62.06488	0.0000
RESID(-1)^2	0.163121	0.019228	8.483540	0.0000

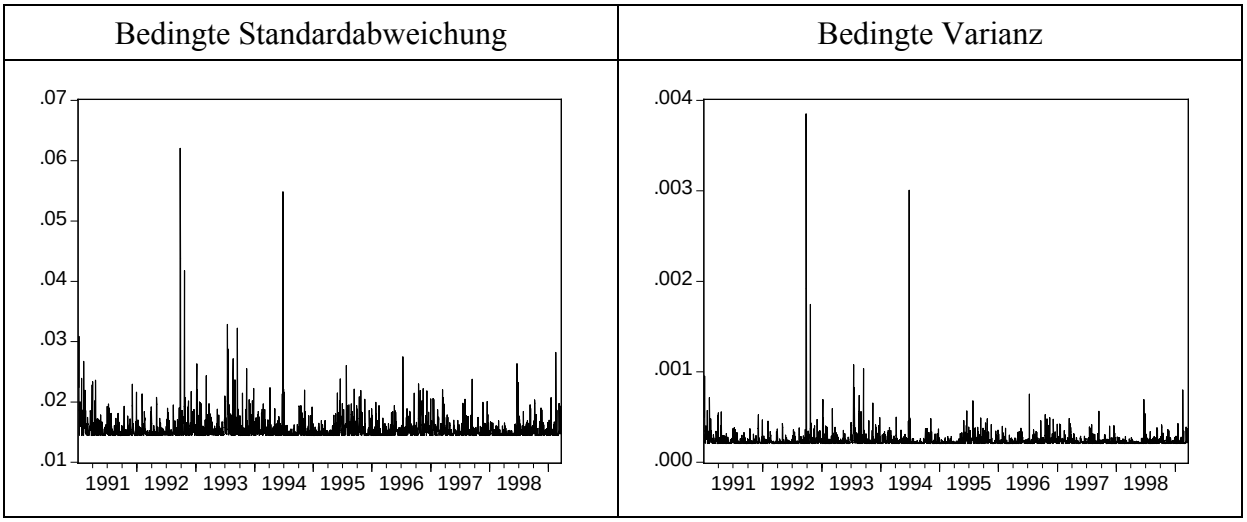
R-squared	-0.000015	Mean dependent var	0.000148
Adjusted R-squared	-0.000951	S.D. dependent var	0.015816
S.E. of regression	0.015824	Akaike info criterion	-5.491959
Sum squared resid	0.535348	Schwarz criterion	-5.484015
Log likelihood	5882.142	Durbin-Watson stat	1.924393

Die beiden geschätzten Regressionsgleichungen für die Renditen unter Einbeziehung des Störterms lauten:

Mean Equation (1. Regressionsgleichung mit der abhängigen Variabler $\Delta\log(Y_t)$)	Variance Equation (2. Regressionsgleichung mit der abhängigen Variablen σ_t^2)
$\Delta\log(Y_t) = 0{,}0009 + \varepsilon_t \cdot \hat{\sigma}_t^{1/2}$ z-Wert: (0,260)	$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}0002 + 0{,}1631 \cdot U_{t-1}^2$ z-Werte: (62,065) (8,484)

Das numerisch spezifizierte Zeitreihenmodell für die logarithmierte Zeitreihe der Tageskurse der KFH-Aktie lautet:

Mean Equation (1. Regressionsgleichung mit der abhängigen Variabler $\log(Y_t)$)	Variance Equation (2. Regressionsgleichung mit der abhängigen Variablen σ_t^2)
$\log(Y_t) = \log(Y_t) + 0{,}0009 + \varepsilon_t \cdot \hat{\sigma}_t^{1/2}$ t-Wert: (0,260) (Random Walk mit ARCH-Effekt))	$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}0002 + 0{,}1631 \cdot U_{t-1}^2$ t-Werte: (62,065) (8,484)



□

Der ARCH(1)-Prozess kann leicht dadurch verallgemeinert werden, dass die bedingte Varianz von U_t von weiter zurückliegenden Fehlerquadraten abhängig gemacht wird. Genauer liegt ein ARCH-Prozess der Ordnung q, **ARCH(q)-Prozess**, vor, wenn die bedingte Varianz der Innovation durch

(4) $$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 + U_{t-1}^2 + \alpha_2 U_{t-2}^2 + ... + \alpha_q U_{t-q}^2$$

gegeben ist.

Da unbedingte Varianz der Störgröße konstant ist (Homoskedastizität), könnte der Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ mit der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate (OLS-Methode) geschätzt werden, ohne dass die BLUE-Eigenschaft verloren ginge. Allerdings existiert ein nichtlinearer Schätzer für $\boldsymbol{\beta}$, der eine größere Effizienz besitzt und mit der Maximum-Likelihood-Methode gewonnen werden kann. Unter der Annahme bedingt normalverteilter Störgrößen U_t

$$U_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

ist die **logarithmierte Likelihood-Funktion** bei gegebenen Startwerten x_0 und y_0 bei einem Stichprobenumfang n durch

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{U_t}{\sigma_t}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{n}\ln(\sigma_t^2)$$

gegeben. Hierin korrespondieren die ersten beiden Terme mit der Stichprobe U_t/σ_t, während der letzte Term die Transformation von U_t nach ε_t erfasst. Für den ML-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$ für den Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ existiert kein geschlossener analytischer Ausdruck; vielmehr muss $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$ iterativ durch nichtlineare numerische Optimierungsverfahren gefunden werden.

Beispiel: ARCH(3)-Prozess

Mit dem ARCH(1)-Modell lassen sich Risiken in der Rendite der KFH-Aktie erfassen, die auf die Volatilität der Vorperiode zurückgehen. Wenn dagegen Risiken vergangener Perioden nachwirken, liegt ein ARCH-Prozess höherer Ordnung vor. Dies ist bei der KFH-Aktie gegeben, da in einem ARCH(3)-Modell die quadrierten Residuen bei einem Lag von 3 noch signifikant sind:

Dependent Variable: D(LOG(KFH))
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Sample (adjusted): 1/03/1991 3/18/1999
Included observations: 2141 after adjustments
Convergence achieved after 33 iterations Variance backcast: ON
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-2)^2 + C(5)*RESID(-3)^2 + C(6)*RESID(-4)^2

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000397	0.000322	1.231608	0.2181
Variance Equation				
C	0.000145	6.78E-06	21.35289	0.0000
RESID(-1)^2	0.126747	0.018994	6.672972	0.0000
RESID(-2)^2	0.040051	0.019295	2.075719	0.0379
RESID(-3)^2	0.151972	0.014397	10.55563	0.0000
RESID(-4)^2	0.129296	0.010025	12.89781	0.0000

R-squared	-0.000247	Mean dependent var	0.000148
Adjusted R-squared	-0.002589	S.D. dependent var	0.015816
S.E. of regression	0.015837	Akaike info criterion	-5.530741
Sum squared resid	0.535472	Schwarz criterion	-5.514854
Log likelihood	5926.658	Durbin-Watson stat	1.923948

Variance Equation:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}0001 + 0{,}1267 \cdot U_{t-1}^2 + 0{,}0401 \cdot U_{t-2}^2 + 0{,}1520 \cdot U_{t-3}^2 + 0{,}1293 \cdot U_{t-4}^2$$

z-Werte: (21,353) (6,673) (2.076) (10.556) (12.898)

□

• Lagrange-Multiplier-Test auf ARCH-Effekte

Die Maximum-Likelihood-Schätzung ist aber nur dann angezeigt, wenn ARCH-Effekte begründet zu vermuten sind. Da die Existenz von ARCH-Effekten nicht ohne weiteres a priori postuliert werden kann, stellt sich die Frage nach einem adäquaten statistischen Test. Der **Lagrange-Multiplier-Test (LM-Test)** erfordert in der 1. Stufe eine Ermittlung von Schätzwerten $\hat{u}_t$ für die unbekannte Störvariable U_t, was nach einer OLS-Schätzung des Modells (1) erfolgen kann:

$$\hat{u}_t = Y_t - \mathbf{x}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

In der 2. Stufe ist dann eine Hilfsregression von $\hat{u}_t^2$ auf die verzögerten Residualquadrate $\hat{u}_{t-1}^2, \hat{u}_{t-2}^2, \ldots, \hat{u}_{t-q}^2$ durchzuführen:

$$\hat{u}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1\hat{u}_{t-1}^2 + \hat{\alpha}_2\hat{u}_{t-2}^2 + \ldots + \hat{\alpha}_q\hat{u}_{t-q}^2 \ .$$

Da die Residualquadrate $\hat{u}_{t-j}^2$ als Proxyvariablen der bedingten Varianzen σ_{t-j}^2 interpretiert werden können, lässt sich hiermit die Nullhypothese

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0$$

überprüfen. Unter der Nullhypothese fallen die bedingten Varianzen σ_t^2 mit der unbedingten Varianz σ^2 zusammen, $\sigma_t^2 = \sigma^2$, so dass die Voraussetzung der Homoskedastizität des klassischen ökonometrischen Modells erfüllt ist. In diesem Fall ist der Erklärungsbeitrag der verzögerten Residualquadrate für das Quadrat der aktuellen Innovation u_t^2 und damit auch das Bestimmtheitsmaß R^2 gering. Je höher der Erklärungsbetrag der Proxyvariablen $\hat{u}_{t-j}^2$ ist, umso größer wird das Produkt aus dem Stichprobenumfang n und dem Bestimmtheitsmaß R^2 der Hilfsregression ausfallen. Dieses Produkt ist als **Prüfgröße des Tests** χ^2-verteilt mit q Freiheitsgraden:

(5) $$\text{LM(ARCH)} = nR^2 \sim \chi_q^2 \ .$$

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn die Prüfgröße LM(ARCH) bei einem Signifikanzniveau α das (1-α)-Quantil $\chi_{q;1-\alpha}$ einer χ^2-Verteilung mit q Freiheitsgraden übersteigt. Die ARCH-Effekte haben sich dann als signifikant erwiesen, so dass eine effizientere Modellschätzung mit der ML-Methoden angezeigt ist.

Beispiel

Um zu prüfen, ob überhaupt eine zeitvariable Modellierung der (bedingten) Varianz einer Variablen in Betracht kommt, testen wir mit dem **LM-Test auf ARCH(1)-Effekte**. Der EViews-Output weist die Testergebnisse für die Renditen der KFH-Aktie:

ARCH Test:

F-statistic	100.6130	Prob. F(1,2138)	0.000000
Obs*R-squared	96.18089	Prob. Chi-Square(1)	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1/04/1991 3/18/1999
Included observations: 2140 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000195	1.75E-05	11.19162	0.0000
RESID^2(-1)	0.210531	0.020989	10.03060	0.0000

R-squared	0.044944	Mean dependent var	0.000248
Adjusted R-squared	0.044498	S.D. dependent var	0.000788
S.E. of regression	0.000770	Akaike info criterion	-11.49910
Sum squared resid	0.001268	Schwarz criterion	-11.49381
Log likelihood	12306.04	F-statistic	100.6130
Durbin-Watson stat	2.006037	Prob(F-statistic)	0.000000

● **Lagrange-Multiplier-Test (LM-Test) auf ARCH(1)-Effekte**

Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

Nullhypothese H_0: $\alpha_1 = 0$ (keine zeitvariablen Varianzen)

- **Test mit kritischem Wert**

- Prüfgrüße: $LM(ARCH(1)) = n \cdot R^2 = 2140 \cdot 0{,}044944 = 96{,}180$

R^2: Determinationskoeffizient der Testgleichung (Hilfsregression)
n: Stichprobenumfang (nach Adjustierung)

Der berechnete Wert der Prüfgröße entspricht – bis auf die Rundung - dem von EViews unter Obs*R-squared ausgewiesenen Wert.

- Kritischer Wert ($\alpha = 0{,}05$): $\chi^2_{1;0,95} = 3{,}841$

- Testentscheidung:
$LM(ARCH(3)) = 96{,}180 > \chi^2_{1;0,95} = 3{,}841$ => H_0 ablehnen

- Test mit p-Wert

- p-Wert: p = 0,000000
Der p-Wert des LM-Tests auf ARCH(1)-Effekte wird von EViews unter Probability ausgewiesen. Er gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Wert der Prüfgröße LM(ARCH) von 96.18089 (=Obs*R-squared) bei Gültigkeit der Nullhypothese überschritten wird (=tatsächliches Signifikanzniveau).

- Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$
α ist das nominale Signifikanzniveau, das vorgegeben werden muss. Es gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit bei dem Test maximal sein kann, die Nullhypothese zu verwerfen, wenn sie tatsächlich richtig ist (= Irrtumswahrscheinlichkeit).

- Testentscheidung:
$p = 0{,}000000 < \alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad H_0$ ablehnen

● Testgleichung

Die Testgleichung (= Hilfsregression) des LM-Tests auf ARCH(1)-Effekte lautet:

$$\hat{u}_t^2 = 0{,}0002 + 0{,}2105 \cdot \hat{u}_{t-1}^2$$

z-Werte: (11,192) (10,031)

Die Testgleichung ist mit der OLS-Methode geschätzt worden. Aufgrund er hohen Zahl der Freiheitsgrade (2142 – 2 = 2140) können die t-Werte als Prüfgrößen der Signifikanztests der geschätzten Koeffizienten bei α=0,05 mit dem 97,5%-Quantil der Standardnormalverteilung verglichen werden. Bei einem Signifikanzniveau von 5% ist der kritische Wert $z_{0,975}$ gleich 1,96. Beide geschätzten Koeffizienten $\hat{\alpha}_0$ und $\hat{\alpha}_1$ der Testgleichung sind signifikant von 0 verschieden. Aufgrund der Signifikanz von $\hat{\alpha}_1$ sind ARCH(1)-Effekte in der Renditen der KFH-Aktie nachgewiesen, d.h. ihre bedingte Varianz ist nicht konstant, sondern zeitabhängig.

● **Test auf ARCH-Effekte höherer Ordnung**

Um zu überprüfen, ob die zeitvariable Varianz der Renditen auch von Risiken weiter zurückliegender Perioden beeinflusst wird, ist auf ARCH-Effekte höherer Ordnung zu testen. Aus dem nachfolgendem EViews-Output des **LM-Tests** geht hervor, dass mindestens **ARCH(3)-Effekte** vorliegen:

ARCH Test:

F-statistic	35.14939	Prob. F(3,2134)	0.000000
Obs*R-squared	100.6713	Prob. Chi-Square(3)	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1/08/1991 3/18/1999
Included observations: 2138 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000183	1.84E-05	9.919531	0.0000
RESID^2(-1)	0.206507	0.021625	9.549612	0.0000
RESID^2(-2)	0.011315	0.022081	0.512462	0.6084
RESID^2(-3)	0.043941	0.021474	2.046256	0.0409

R-squared	0.047087	Mean dependent var	0.000248
Adjusted R-squared	0.045747	S.D. dependent var	0.000788
S.E. of regression	0.000770	Akaike info criterion	-11.49886
Sum squared resid	0.001265	Schwarz criterion	-11.48825
Log likelihood	12296.28	F-statistic	35.14939
Durbin-Watson stat	1.999667	Prob(F-statistic)	0.000000

□

• GARCH-Modelle

Ähnlich wie ein AR-Modell zu einem ARMA-Modell verallgemeinert werden kann, lässt sich ein ARCH-Modell zu einem GARCH-Modell (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model) erweitern. Bei einem GARCH-Modell ist die bedingte Varianz nicht mehr allein von den verzögerten quadrierten Störgröße u_{t-j}^2 abhängig, sondern ebenfalls von den verzögerten bedingten Varianzen σ_{t-j}^2. Genauer ist ein GARCH(p,q)-Prozess durch das Regressionsmodell (1) mit den bedingten Erwartungswert

$$E(U_t \mid I_{t-1})=0$$

und der bedingten Varianz

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Var}(U_t \mid I_{t-1}) = \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q u_{t-q}^2 \\ &\quad + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_2 \sigma_{t-2}^2 + \ldots + \gamma_p \sigma_{t-p}^2 \end{aligned}$$

gegeben. Die Gültigkeit der Annahme (A3) bleibt unverändert bestehen.

Das Prinzip der Sparsamkeit stand wie beim ARMA-Modell auch beim GARCH-Modell Pate. So hat Bollerslev (1986) gezeigt, dass ein GARCH (p,q)-Modell einem ARCH(∞)-Modell entspricht, sofern Stationarität gegeben ist. Für die Anwendung bedeutet dies, dass ein ARCH-Prozess hoher Ordnung oft durch ein GARCH-Modell niedrigerer Prozessordnungen p und q approximiert werden kann. Bei der Modellierung ökonomischer Prozesse hat man sich bisher auf eine Verwendung von GARCH(1,1)-Modellen beschränkt.

Beispiel: GARCH(1,1)-Modell

Dependent Variable: D(LOG(KFH))
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Sample (adjusted): 1/03/1991 3/18/1999
Included observations: 2141 after adjustments
Convergence achieved after 25 iterations Variance backcast: ON
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000232	0.000334	0.695483	0.4868
Variance Equation				
C	1.76E-05	2.25E-06	7.818111	0.0000
RESID(-1)^2	0.077831	0.009587	8.118662	0.0000
GARCH(-1)	0.852687	0.014848	57.42914	0.0000

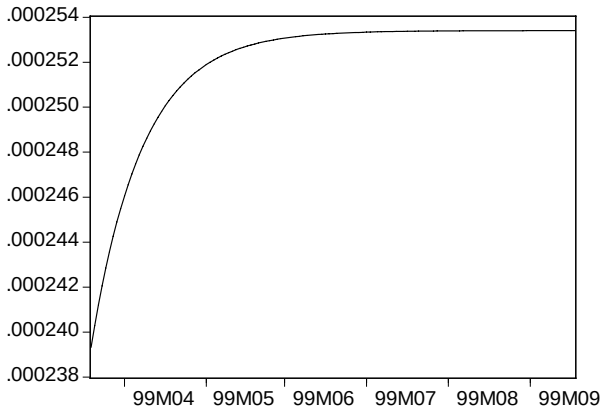
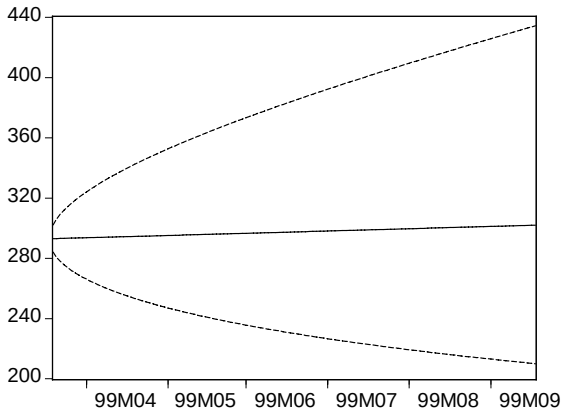
R-squared	-0.000028	Mean dependent var	0.000148
Adjusted R-squared	-0.001432	S.D. dependent var	0.015816
S.E. of regression	0.015828	Akaike info criterion	-5.521647
Sum squared resid	0.535355	Schwarz criterion	-5.511056
Log likelihood	5914.923	Durbin-Watson stat	1.924368

• Variance Equation:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}00002 + 0{,}0778 \cdot U_{t-1}^2 + 0{,}8527 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

z-Werte: (7,818) (8,119) (57,429)

• Aktienkursprognose mit dem GARCH(1,1)-Modell:

Prognose der bedingten Varianz der KFH-Residuen mit dem GARCH(1,1)-Modell	Intervallprognose des Kurses der KFH-Aktie mit dem GARCH(1,1)-Modell
	

□

Beispiel: Inflationsraten

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, S. 307-327.

Stetige Wachstumsrate des GNP-Preisindex: $\dot{p}$ (Inflationsrate)

$$\dot{p} = \ln\left(\frac{p_t^{GNP}}{p_{t-1}^{GNP}}\right)\cdot 100$$ (erst Bildung des Logarithmus, dann Multiplikation mit 100).

Standardmäßige Zeitreihenmethoden (univariate) führen zu einer Identifikation eines **AR(4)-Prozesses**, für den sich folgende Schätzung ergibt (Quartalsdaten; Stützbereich 1948.2–1983.4):

OLS-Schätzung des AR(4)-Modells (n=143)

$$\begin{array}{lllllll} \dot{p}_t = & 0{,}240 + & 0{,}552\cdot\dot{p}_{t-1} + & 0{,}177\cdot\dot{p}_{t-2} + & 0{,}232\cdot\dot{p}_{t-3} - & 0{,}209\cdot\dot{p}_{t-4} + U_t \\ t-\text{Werte} \rightarrow & (0{,}300) & (6{,}651) & (1{,}989) & (2{,}578) & (-2{,}613) \end{array}$$

Schätzung der Residualvarianz:	$\hat{\sigma}^2 = \left\lfloor \hat{\sigma}_t^2 \right\rfloor = 0{,}282$
Stationarität gegeben:	Wurzeln des charakteristischen Polynoms liegen außerhalb des Einheitskreises.
Autokorrelationen der Residuen:	Keine Signifikanz der ersten 10 Autokorrelationskoeffizienten auf dem 5%-Niveau.
Partielle Autokorrelationen der Residuen:	Keine Signifikanz der ersten 10 partiellen Autokorrelationen auf dem 5%-Niveau
Autokorrelation der quadrierten Residuen: ↑ (Ähnliche Ergebnisse bei den partiellen Autokorrelationen der quadrierten Residuen)	Signifikanz bei den Lags 1, 3, 7, 9 und 10 auf dem 5%-Niveau
LM-Test für ARCH(1), ARCH(4) und ARCH(8):	hochsignifikante Ergebnisse

Maximum-Likelihood-Schätzung des **AR(4)-Modells** für die Inflationsrate in Verbindung mit einem **ARCH(8)-Prozess** für die Residuen:

$$\begin{array}{lllllll} \dot{p}_t = & 0{,}138 + & 0{,}423 \cdot \dot{p}_{t-1} + & 0{,}222 \cdot \dot{p}_{t-2} + & 0{,}377 \cdot \dot{p}_{t-3} - & 0{,}175 \cdot \dot{p}_{t-4} + U_t \\ t-\text{Werte} \rightarrow & (2{,}339) & \left(\begin{array}{c} t-\text{Wert nicht} \\ \text{ausgewiesen} \end{array}\right) & (2{,}056) & (4{,}833) & (-1{,}683) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \hat{\sigma}_t^2 = & 0{,}058 + & 0{,}802 & \sum_{i=1}^{8} (9-i)/36 \cdot u_{t-i}^2 \\ t-\text{Werte} \rightarrow & (1{,}758) & (0{,}3026) & \end{array}$$

$\uparrow$

Die t-Werte sind aus den heteroskedatstisch konsistenten Standardfehlern errechnet.

$\uparrow$

Gewichtssumme des Zählers

Gewichte:

$$i = 1: \frac{9-1}{36} = \frac{8}{36}$$
$$i = 2: \frac{9-2}{36} = \frac{7}{36}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$i = 8: \frac{9-8}{36} = \frac{1}{36}$$

Linear abnehmende Lagstruktur (Ordnung 8): ad hoc, aber motiviert durch das "long memory in the conditional variance"

Autokorrelation und partielle Autokorrelation der heteroskedastischen Residuen $U_t = \varepsilon_t \sigma_t^{-1/2}$:

Keine Signifikanz der ersten 10 Koeffizienten auf dem 5%-Niveau.

Autokorrelation und partielle Autokorrelation der quadrierten heteroskedastischen Residuen $U_t^2 = \varepsilon_t^2 \sigma_t^{-1}$:

Keine Signifikanz der ersten 10 Koeffizienten auf dem 5%-Niveau.

LM-Test für die lineare Restriktion:

Teststatistik $\chi^2 = 8{,}87$ mit $p(\chi^2 \leq 8{,}87) = 0{,}74$ (χ^2-Verteilung mit 7 FG)

LM-Test für die Einbeziehung von σ_{t-1}^2 in die bedingte Varianz:

Teststatistik $\chi^2 = 4{,}57$ (signifikant auf dem 5%-Niveau)

$\rightarrow$ Indikation für ein GARCH-Modell

AR(4)-Modell für Inflationsrate in Verbindung mit **GARCH(1,1)-Modell** für Residuen

$$\begin{array}{lllllll} \dot{p}_t = & 0{,}141 + & 0{,}433 \cdot \dot{p}_{t-1} + & 0{,}229 \cdot \dot{p}_{t-2} + & 0{,}349 \cdot \dot{p}_{t-3} - & 0{,}162 \cdot \dot{p}_{t-4} + U_t \\ t-\text{Werte} \rightarrow & (2{,}350) & (5{,}346) & (2{,}082) & (4{,}532) & (-1{,}558) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \hat{\sigma}_t^2 = & 0{,}007 + & 1{,}350 \cdot u_{t-1}^2 + & 0{,}829 \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2 \\ t-\text{Werte} \rightarrow & (1{,}167) & (19{,}286) & (12{,}191) \end{array}$$

Autokorrelation und partielle Autokorrelation der heteroskedastischen Residuen $U_t = \varepsilon_t \sigma_t^{-1/2}$: Keine Signifikanz der ersten 10 Koeffizienten auf dem 5%-Niveau.

Autokorrelation und partielle Autokorrelation der quadrierten heteroskedastischen Residuen $U_t^2 = \varepsilon_t^2 \sigma_t^{-1}$: Keine Signifikanz der ersten 10 Koeffizienten auf dem 5%-Niveau.

LM-Test für die Einbeziehung einer linear abnehmenden Lag-Struktur achter Ordnung:
Teststatistik $\chi^2 = 2{,}33$ mit $p(\chi^2 \leq 2{,}33) = 0{,}87$ (χ^2-Vert. mit 1 FG)

LM-Test für ein GARCH(1,2)-Modell oder GARCH(2,1)-Modell:
↑
(lokal äquivalent)

Teststatistik $\chi^2 = 3{,}80$ (nicht signifikant auf dem 5%-Niveau)

LM-Test für die Einbeziehung von $U_{t-2}^2, \ldots, U_{t-5}^2$:
Teststatistik $\chi^2 = 5{,}58$ mit $p(\chi^2 \leq 5{,}58) = 0{,}77$ (χ^2-Vert. mit 4 FG)

Beispiel: Wechselkurse

Dreger, C. (1995), Monetäre Modelle der Wechselkurserklärung, Wiesbaden.

Kassakurse DM-Mark/US-Dollar, Pfund Sterling/US-Dollar, Yen/US-Dollar
Zeitraum 1974-1992 (Monatsenddaten) n=228

● Ergebnisse einer Zeitreihenanalyse mit linearen Modellen:

Wechselkurse folgen approximativ einem Random Walk.
Kassakursänderungen lassen sich entsprechend approximativ durch einen reinen Zufallsprozess (White-Noise) beschreiben.

Tabelle: LM-Test auf ARCH-Effekte in monatlichen Kassakursänderungen

q	D-Mark	Pfund-Sterling	Yen
1	2.52	3.49(*)	2.20
2	3.67	4.66(*)	2.20
3	3.80	4.82	2.33
4	4.14	9,29	6.33
5	5.20	9.44	12.99*
6	5.47	10.18	13.49*
7	7.14	10.30	15.30*
8	7.18	10.73	15.33(*)
9	8.30	11.60	16.29(*)

(*) Signifikanz auf dem 5%-Niveau , * Signifikanz auf dem 5%-Niveau
** Signifikanz auf dem 1%-Niveau

LM-Teststatistik: $LM(ARCH) = n \cdot R^2 \overset{a}{\sim} \chi^2_q$

Anmerkung

Beim Pfund Sterling ergeben sich bei einem Signifikanzniveau von 10 % Hinweise auf einen ARCH-Prozess eher niedriger Ordnung.

Bei der DM-Mark würde die Testentscheidung zugunsten eines ARCH(1)-Modells eine relativ hohe Irrtumswahrscheinlichkeit von 12% haben. Der kritische Wert für einen ARCH(1)-Prozess beträgt bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}10$: $\chi^2_{1;0,90} = 2{,}706$.

Tabelle: GARCH-Modelle für monatliche Kassakursänderungen

	D-Mark	Pfund-Sterling	Yen
α_0	0,00115** (10,76)	0,00108** (10,04)	0,00004(*) (1,64)
α_1	0,08063 (1,17)	0,10725(*) (1,72)	0,11677* (2,51)
γ_1	-	-	0,85820** (16,04)

(*) Signifikanz auf dem 5%-Niveau , * Signifikanz auf dem 5%-Niveau
** Signifikanz auf dem 1%-Niveau

ARCH(1)-Modell für Pfund-Sterling:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}00004 + 0{,}10725 \cdot u_{t-1}^2$$

GARCH(1,1)-Modell für Yen:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}00004 + 0{,}11677 \cdot u_{t-1}^2 + 0{,}85820 \cdot \hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Anmerkung:

Beim Yen erhält man unter Verwendung eines GARCH(1,1) zwar keine besseren Punktprognosen im Vergleich zu einem Random Walk, jedoch werden die Prognoseintervalle aussagefähiger, so dass sich nicht die Richtung, wohl aber das Ausmaß der Wechselkursinnovationen besser abschätzen lässt.