4.2 Kointegration

Konzept der Kointegration:
Untersuchung **langfristiger (Gleichgewichts-) Beziehungen** zwischen mehreren nicht-stationären ökonomischen Variablen

Grundidee:
Es kann eine stabile **langfristige Relation (Gleichgewichtsbeziehung)** zwischen den ökonomischen Variablenbestehen, die durch die ökonomische Theorie begründbar ist. Sie muss jedoch in den Beobachtungsperioden nicht notwendig erfüllt sein. Wenn die beobachteten **Abweichungen** von einer vermuteten Gleichgewichtsbeziehung **stationär** sind, besteht eine Tendenz zu ihrer Rückbildung, die den langfristigen Steady State wieder etabliert. Man bezeichnet die untersuchten **Variablen** dann als **kointegriert**.

Während gewöhnlich eine Regression nicht-stationärer Variablen das Problem einer “spurious regression” nach sich zieht, die einen strengen Zusammenhang zwischen den Variablen nur vortäuscht, lässt sich im Falle **kointegrierter Variablen** die zwischen ihnen vorhandene **Langristbeziehung** ökonometrisch fundiert schätzen und ökonomisch interpretieren. **Kointegrierte Variablen** enthalten nämlich keine unabhängigen Trends, sondern werden durch gemeinsame **stochastiSche Trends** getrieben. Eine Regression von **Differenzen** der involvierten Variablen, die das Problem einer “spurious regresson” vermeiden kann,gibt dagegen nur Auskunft über **kurzfristige Anpassungsprozesse**, nicht jedoch über die Gleichgewichtsbeziehung selbst.

Beispiel:

Bei Gültigkeit der absoluten Kaufkraftparitätenhypothese [purchasing power parity (PPP)] („law of one price“)

$$S_t = P_t/P^*_t$$

P_t: inländisches Preisniveau
P^*_t ausländisches Preisniveau
S_t: Wechselkurs

könnte der Wechselkurs S_t kurzfristig durchaus beträchtlich von der Parität P_t/ P^*_t abweichen. Im Falle einer Kointegration zwischen den Variablen S_t, P_t und P^*_t würde es aber langfristig wirksame Mechanismen geben, die auf eine Herstellung der Kaufkraftparität hinwirken. □

● **Kointegration bei zwei I(1)-Variablen**

Die Variablen X_t und Y_t seien integriert von der Ordnung 1:

$$X_t \sim I(1) \text{ und } Y_t \sim I(1).$$

Die Beziehung

(4.15a) $Y_t = ß \cdot X_t + U_t$ (allgemeiner: (4.15b) $Y_t = ß_1 + ß_2 \cdot X_t + U_t$)

ist eine **Kointegrationsbeziehung**, wenn es eine **Linearkombination der Variablen** X_t und Y_t gibt,

(4.16) $U_t = Y_t - ß \cdot X_t$,

die **integriert von der Ordnung 0** (=stationär) ist. In diesem Fall ist die Störgröße U_t eine I(0)-Variable, d.h. stationär:

$$U_t \sim I(0).$$

Der Vektor (1 -ß) heißt **Kointegrationsvektor** oder **kointegrierender Vektor**.

Beispiel:

Logarithmiert man die Kauftkraftparitätenbeziehung $S_t = P_t/P^*_t$ und berücksichtigt temporäre Abweichungen durch Einführung einer Störvariablen U_t, dann erhält die lineare stochastische Beziehung

$$\log S_t = \log P_t - \log P^*_t + U_t.$$

In einer Währungsunion wie z.B. der Europäischen Währungsunion ist der Wechselkurs S_t gleich 1 und damit $\log S_t$ gleich 0. Man hat dann die Linearkombination

$$U_t = \log P^*_t - \log P_t.$$

Bei Gültigkeit der absoluten Kaufkraftparitätentheorie müsste bei Abweichungen zwischen P_t und P^*_t und damit zwischen $\log P_t$ und $\log P^*_t$ eine Tendenz zu einer Rückbildung bestehen. Eine solche Tendenz ist aber bei einem nicht-stationären Prozess (U_t) nicht gegeben, da er beliebig abdriften kann. Die **Linearkombination von $\log P_t$ und $\log P^*_t$**, d.h. die **Störvariable U_t** müsste bei Gültigkeit der PPP **stationär** sein. In diesem Fall bezeichnet man die **Variablen $\log P_t$ und $\log P^*_t$** als **kointegriert**.

Bei strenger Gültigkeit der PPP ist der **kointegrierende Vektor** (1 -1) bereits durch Die ökonomische Theorie vorgegeben. Allgemein muss er ökonometrisch geschätzt werden. □

● **Kointegration bei zwei nicht-stationären Variablen**

Allgemein können zwei nicht-stationäre Variablen X_t und Y_t kointegriert sein, wenn sie denselben Integrationsgrad d>0 besitzen:

$$X_t \sim I(d) \text{ und } Y_t \sim I(d).$$

Die Beziehung

(4.15) $$Y_t = ß \cdot X_t + U_t$$

ist eine **Kointegrationsbeziehung**, wenn es eine **Linearkombination der Variablen** X_t und Y_t gibt,

(4.16) $$U_t = Y_t - ß \cdot X_t,$$

die **integriert von der Ordnung d-b, d≥b>0,** ist. Die beiden Variablen X_t und Y_t heißen dann kointegriert von der Ordnung d und b:

$$X_t, Y_t \sim CI(d,b).$$

Für d=1 muss die Linearkombination (4.16) im Falle einer Kointegration stationär, d.h. U_t eine I(0)-Variable sein (d=b=1). Für d=2 sind die Variablen X_t und Y_t kointegriert, wenn U_t eine I(0)- (b=2) oder eine I(1)-Variable (b=1) ist. Damit (4.15) ökonomisch als Gleichgewichtsbeziehung interpretierbar ist, muss U_t jedoch in beiden Fällen stationär sein.

● **Beziehungen zwischen Integration und Kointegration bei zwei Variablen**

1. X_t (Y_t) nicht-stationär und Y_t (X_t) stationär

   Die Linearkombination $U_t = Y_t - ß \cdot X_t$ zwischen beiden Größen ist stets nicht-stationär. X_t und Y_t können nicht kointegriert sein.

2. X_t und Y_t sind stationär

   Dann ist auch die Linearkombination $U_t = Y_t - ß \cdot X_t$ stationär. Die beiden Variablen X_t und Y_t können dann ebenfalls nicht kointegriert sein.

3. X_t und Y_t sind beide I(d)-Variablen

   Ist in diesem Fall die Linearkombination

$$U_t = Y_t - ß \cdot X_t$$

   integriert von der Ordnung 0, d.h. stationär, lässt sie sich als ökonomische Langfristbeziehung interpretieren, da X_t und Y_t kointegriert sind.

- **Test auf Kointegration bei bekanntem Kointegrationsvektor**

Bei bekanntem Kointegrationsvektor ist keine ökonometrische Schätzung der Linearkombination der zu untersuchenden Variablen erforderlich, da sie bereits vorgegeben ist. So impliziert die bei der absoluten Kaufkraftparitätentheorie vorgegebene Linearkombination der Logarithmen des ausländischen und inländische Preisniveaus, $\log P^*_t$ und $\log P_t$,

$$U_t = \log P^*_t - \log P_t.$$

den Kointegrationsvektor (1 -1), wenn die beiden Länder derselben Währungsunion angehören. Sofern $\log P^*_t$ und $\log P_t$ I(1)-Variablen sind, muss die Störgröße U_t, die die Linearkombination zwischen den Logarithmen der beiden Preisniveaus repräsentiert, eine I(0)-Variable sein.

Der Kointegrationstest läuft bei bekanntem Kointegrationsvektor daher darauf hinaus zu prüfen, ob die Störvariable U_t stationär ist. Hierzu kann einfach ein Einheitswurzeltest wie z.B. der Dickey-Fuller-Test (DF-Test) oder der erweiterte Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) eingesetzt werden.

Wir beschränken uns zunächst hier bei der Darstellung der Testprozedur auf zwei Untersuchungsvariablen.

Der **Test auf Kointegration** besteht **bei bekanntem Kointegrationsvektor** aus den folgenden beiden Schritten:

1. **Bestimmung der Integrationsordnung der zu untersuchenden Variablen**
   Die Integrationsordnung der zu untersuchenden Variablen wird mit einem Einheitswurzeltest wie z.B. dem DF- oder ADF-Test ermittelt.

2. **Bestimmung der Integrationsordnung der Störgöße (=Linearkombination)**
   Da die Variablen nur dann kointegriert sein können, wenn sie nicht-stationär sind. Im Falle von zwei Variablen X_t und Y_t müssen außerdem beide Variblen dieselbe Integrationsordnung haben. Die Integrationsordnung der Störgröße ist damit nur dann zu bestimmen, falls

   $$X_t \sim I(d) \text{ und } Y_t \sim I(d) \quad \text{mit } d \geq 1$$

   sind (bei ökonomischen Variablen typischerweise d=1 oder d=2).

   Ist diese Voraussetzung erfüllt, lässt sich aus der Integrationsordnung der Störgröße (=Linearkombination) Ut auf bestehende oder nicht bestehende Kointegration schließen. Die Integrationsordnung der Störgöße U_t kann mit einem Einheitswurzeltest wie z.B. dem DF- oder ADF-Test bestimmt werden.

   Kointegration liegt bei d≤2 unter folgenden **Bedingungen** vor:
   a) $U_t \sim I(0)$ bei $X_t \sim I(1)$ und $Y_t \sim I(1)$
   b) $U_t \sim I(0)$ oder $U_t \sim I(1)$ bei $X_t \sim I(2)$ und $Y_t \sim I(2)$

Beispiel:

Bei Geltung der **relativen Kaufkraftparitätentheorie** ist die relative Veränderung des Kaufkraftverhältnisses zwischen In- und Ausland konstant. Die beobachtete Veränderung des Wechselkurses $\Delta\log S_t$ muss dann bis auf zufällige Abweichungen U_t gleich der Inflationsdifferenz sein:

$$\Delta\log S_t = \Delta\log P^*_t - \Delta\log P_t + U_t.$$

Gehören zwei Länder einer Währungsunion an, ist $\Delta\log S_t = 0$, so dass die relative PPP durch

$$U_t = \Delta\log P^*_t - \Delta\log P_t$$

wiedergegeben werden kann. Die relative PPP, die den Kointegrationsvektor (1 -1) impliziert, soll nun beispielhaft für die beiden Länder Deutschland (=Inland) und Frankreich (=Ausland) mit Quartalsdaten im Zeitraum 2000/I und 2004/IV überprüft werden.

Inflationsraten in Deutschland und Frankreich 2000/I – 2004/IV

Abbildung: Inflationsraten in Deutschland und Frankreich

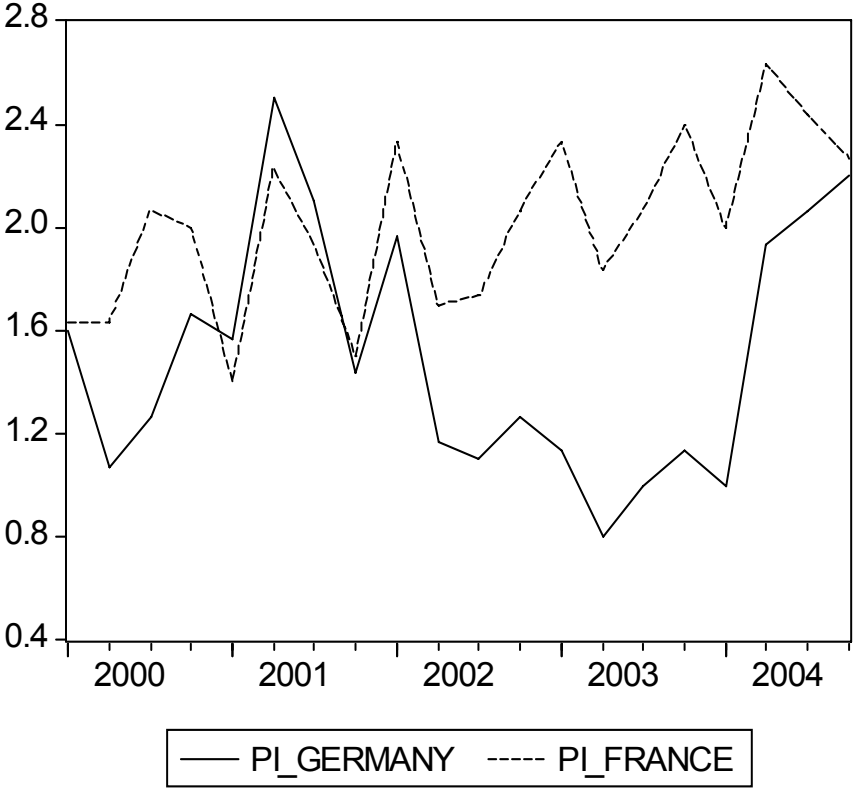
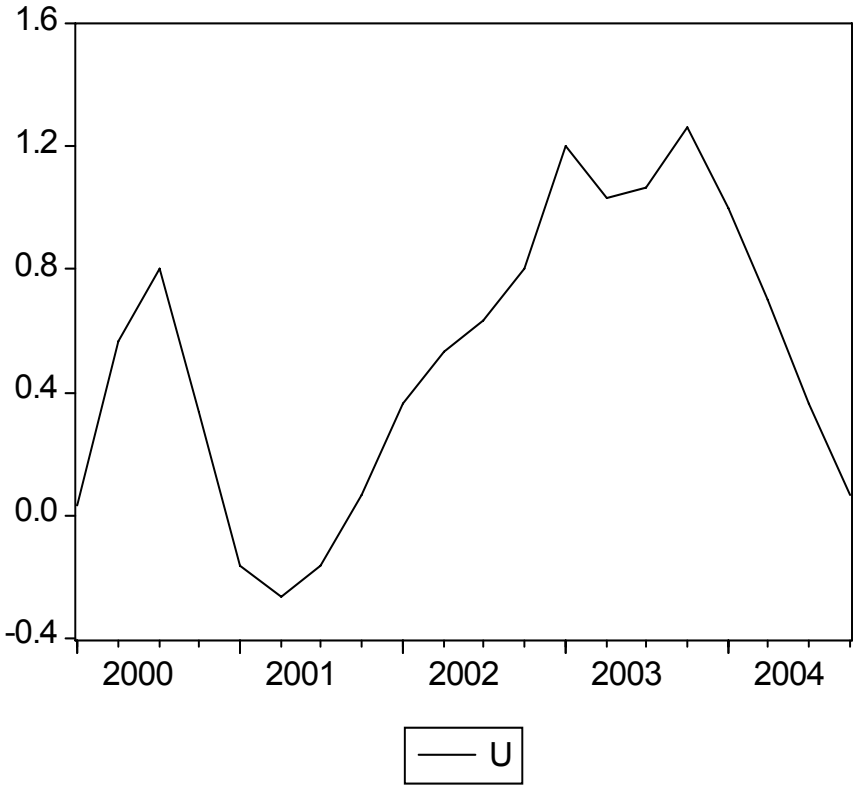


Abbildung: Linearkombination der deutschen und französichen Inflationsrate



1. Bestimmung der Integrationsordnung der deutschen und französichen Inflationsrate

a) Einheitswurzeltests der deutschen Inflationsrate → $\Delta \log P_t \sim I(1)$

Null Hypothesis: PI_GERMANY has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.559336	0.1212
Test critical values:	1% level	-3.920350	
	5% level	-3.065585	
	10% level	-2.673459	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PI_GERMANY)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2001Q1 2004Q4
Included observations: 16 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PI_GERMANY(-1)	-0.750718	0.293325	-2.559336	0.0265
D(PI_GERMANY(-1))	0.322310	0.298895	1.078340	0.3040
D(PI_GERMANY(-2))	0.499153	0.275453	1.812120	0.0973
D(PI_GERMANY(-3))	0.737865	0.254338	2.901119	0.0144
C	1.136107	0.432451	2.627132	0.0235

R-squared	0.542436	Mean dependent var	0.033333
Adjusted R-squared	0.376049	S.D. dependent var	0.485493
S.E. of regression	0.383494	Akaike info criterion	1.171321
Sum squared resid	1.617744	Schwarz criterion	1.412755
Log likelihood	-4.370565	F-statistic	3.260086
Durbin-Watson stat	2.055178	Prob(F-statistic)	0.054043

Null Hypothesis: D(PI_GERMANY) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.480865	0.0004
Test critical values:	1% level	-3.857386	
	5% level	-3.040391	
	10% level	-2.660551	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PI_GERMANY,2)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2000Q3 2004Q4
Included observations: 18 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(PI_GERMANY(-1))	-1.262937	0.230427	-5.480865	0.0001
C	0.069780	0.108895	0.640797	0.5307

R-squared	0.652475	Mean dependent var	0.037037
Adjusted R-squared	0.630755	S.D. dependent var	0.759161
S.E. of regression	0.461308	Akaike info criterion	1.394939
Sum squared resid	3.404885	Schwarz criterion	1.493869
Log likelihood	-10.55445	F-statistic	30.03988
Durbin-Watson stat	2.078155	Prob(F-statistic)	0.000050

a) Einheitswurzeltests der französischen Inflationsrate → $\Delta \log P^*_t \sim I(1)$

Null Hypothesis: PI_FRANCE has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		0.127851	0.9582
Test critical values:	1% level	-3.886751	
	5% level	-3.052169	
	10% level	-2.666593	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PI_FRANCE)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2000Q4 2004Q4
Included observations: 17 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PI_FRANCE(-1)	0.047700	0.373095	0.127851	0.9002
D(PI_FRANCE(-1))	-1.044834	0.315239	-3.314415	0.0056
D(PI_FRANCE(-2))	-0.827573	0.218473	-3.787987	0.0023
C	0.012343	0.742494	0.016623	0.9870

R-squared	0.760234	Mean dependent var	0.011765
Adjusted R-squared	0.704904	S.D. dependent var	0.478124
S.E. of regression	0.259730	Akaike info criterion	0.343978
Sum squared resid	0.876978	Schwarz criterion	0.540028
Log likelihood	1.076186	F-statistic	13.73988
Durbin-Watson stat	2.618183	Prob(F-statistic)	0.000252

Null Hypothesis: D(PI_FRANCE) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-10.07000	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.886751	
	5% level	-3.052169	
	10% level	-2.666593	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PI_FRANCE,2)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2000Q4 2004Q4
Included observations: 17 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(PI_FRANCE(-1))	-2.819509	0.279991	-10.07000	0.0000
D(PI_FRANCE(-1),2)	0.809171	0.158476	5.105945	0.0002
C	0.106908	0.062531	1.709685	0.1094

R-squared	0.924310	Mean dependent var	-0.035294
Adjusted R-squared	0.913497	S.D. dependent var	0.851508
S.E. of regression	0.250440	Akaike info criterion	0.227588
Sum squared resid	0.878080	Schwarz criterion	0.374625
Log likelihood	1.065505	F-statistic	85.48280
Durbin-Watson stat	2.574732	Prob(F-statistic)	0.000000

2. Bestimmung der Integrationsordnung der Störgöße U_t (=Linearkombination aus $\Delta\log P_t$ und $\Delta\log P^*_t$)

Null Hypothesis: U has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.933742	0.3107
Test critical values:	1% level	-3.857386	
	5% level	-3.040391	
	10% level	-2.660551	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(U)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 2000Q3 2004Q4
Included observations: 18 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
U(-1)	-0.237631	0.122886	-1.933742	0.0722
D(U(-1))	0.559252	0.194404	2.876756	0.0115
C	0.095643	0.087473	1.093399	0.2915

R-squared	0.393602	Mean dependent var	-0.027778
Adjusted R-squared	0.312748	S.D. dependent var	0.279647
S.E. of regression	0.231829	Akaike info criterion	0.065382
Sum squared resid	0.806173	Schwarz criterion	0.213777
Log likelihood	2.411564	F-statistic	4.868106
Durbin-Watson stat	1.687956	Prob(F-statistic)	0.023479

<u>Testergebnis:</u>
Die Nullhypothese einer Einheitswurzel der Linearkombination der deutschen und französischen Inflationsrate kann auf keinem der üblichen Signifikanzniveaus (1%, 5%, 10%) abgelehnt werden

$\Rightarrow$ U_t ist nicht-stationär (U_t besitzt wie $\Delta\log P_t$ und $\Delta\log P^*_t$ eine Einheitswurzel), d.h.
die deutsche und französische Inflationsrate sind nicht kointegriert

● Test auf Kointegration: Engle-Granger-Methode

Die **Engle-Granger-Methode** gibt einen **Test auf Kointegration** für den Fall eines a priori unbekannten Kointegrationsvektors wieder.
Das **Verfahren,** das hier für zwei Variablen X_t und Y_t **vorgestellt wird,** besteht aus drei Schritten:

1. Schritt:
Bestimmung der **Integrationsordnung** der **Variablen X_t und Y_t** mit einem Einheitswurzeltest wie z.B. dem DF- oder ADF-Test. Nur wenn beide Variablen dieselbe Integrationsordnung I(d), d>0, besitzen, lässt sich das Verfahren mit dem Schritt 2 fortsetzen, da nur X_t und Y_t nur dann kointegriert sein können.

(4.15b) $$Y_t = ß_1 + ß_2 \cdot X_t + U_t$$

2. Schritt:
OLS-Schätzung der potentiellen Langfristbeziehung

$$u_t = y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot x_t$$

Im Falle einer Kointegration ist die Parameterschätzung superkonsistent (Konvergenz mit Rate n^{-1} anstelle von $n^{-1/2}$).

3. Schritt:

Anwendung eines Einzelwurzeltests (DF- oder ADF-Test) zur Überprüfung der Residuen auf Stationarität. Falls die Residuen I(0) sind, besteht zwischen X_t und Y_t eine Kointegrationsbeziehung in Form eines ökonomischen Gleichgewichts.

Da die Residuen jedoch nicht beobachtbar, sondern geschätzt sind, gelten nicht mehr die üblichen kritischen Werte des DF- bzw. ADF-Tests. Die kritischen Werte (CV) sind von MacKinnon (1991) durch eine Response-Surface-Simulation ermittelt worden:

(4.17) $CV(\alpha) = c_\infty + c_1 \cdot n^{-1} + c_2 \cdot n^{-2}$

	α	c_∞	c_1	c_2
	1%	-3,90	-10,53	-30,03
ohne Trend	5%	-3,34	-5,97	-8,98
	10%	-3,05	-4,07	-5,73
	1%	-4,33	-15,53	-34,03
mit Trend	5%	-3,78	-9,42	-15,06
	10%	-3,50	-7,20	-4,01

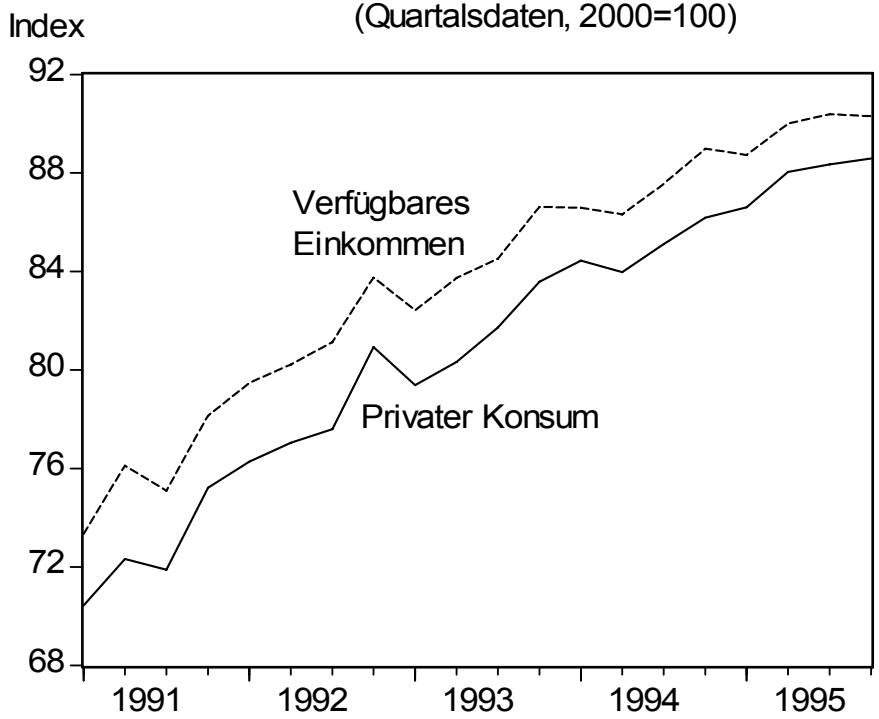
Der normierte Kointegrationsvektor ist durch $(1 \quad -\hat{\beta}_1 \quad -\hat{\beta}_2)$ gegeben

Beispiel:

Mit dem **Engle-Granger-Verfahren** soll geprüft werden, ob der Privater Konsum und das verfügbare Einkommen im ersten Fünf-Jahres-Zeitraum nach der deutschen Vereinigung kointegriert sind, d.h. ob ihre Entwicklung in Einklang mit einer langfristigen Gleichgewichtsbeziehung zwischen ihnen steht.

Wir führen den **Kointegrationstest** mit saisonbereinigten Quartalsdaten des Privaten Konsums und verfügbaren Einkommens in Form von Indizes (2000=100) durch.

Abbildung: Privater Konsum und verfügbares Einkommen
(Quartalsdaten, 2000=100)



1. Bestimmung der Integrationsordnung des Privaten Konsums und verfügbaren Einkommens

a) Einheitswurzeltests des Privaten Konsums

Null Hypothesis: PKONSUM has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.165222	0.1206
Test critical values:	1% level	-4.532598	
	5% level	-3.673616	
	10% level	-3.277364	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PKONSUM)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q2 1995Q4
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PKONSUM(-1)	-0.761856	0.240696	-3.165222	0.0060
C	55.34006	17.03451	3.248704	0.0050
@TREND(1991Q1)	0.694142	0.238047	2.915990	0.0101

R-squared	0.418087	Mean dependent var	0.955263
Adjusted R-squared	0.345348	S.D. dependent var	1.180378
S.E. of regression	0.955051	Akaike info criterion	2.889835
Sum squared resid	14.59396	Schwarz criterion	3.038957
Log likelihood	-24.45344	F-statistic	5.747754
Durbin-Watson stat	2.114395	Prob(F-statistic)	0.013148

Null Hypothesis: D(PKONSUM) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.218200	0.0052
Test critical values:	1% level	-3.886751	
	5% level	-3.052169	
	10% level	-2.666593	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(PKONSUM,2)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q4 1995Q4
Included observations: 17 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(PKONSUM(-1))	-1.852281	0.439117	-4.218200	0.0009
D(PKONSUM(-1),2)	0.294333	0.253990	1.158837	0.2659
C	1.813187	0.508491	3.565819	0.0031

R-squared	0.746787	Mean dependent var	0.039412
Adjusted R-squared	0.710613	S.D. dependent var	2.025717
S.E. of regression	1.089728	Akaike info criterion	3.168518
Sum squared resid	16.62510	Schwarz criterion	3.315556
Log likelihood	-23.93241	F-statistic	20.64468
Durbin-Watson stat	1.676680	Prob(F-statistic)	0.000067

a) Einheitswurzeltests des verfügbaren Einkommens

Null Hypothesis: VEINK has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.106278	0.1328
Test critical values:	1% level	-4.532598	
	5% level	-3.673616	
	10% level	-3.277364	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(VEINK)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q2 1995Q4
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VEINK(-1)	-0.703611	0.226513	-3.106278	0.0068
C	53.82230	16.83691	3.196685	0.0056
@TREND(1991Q1)	0.569430	0.208308	2.733588	0.0147

R-squared	0.432054	Mean dependent var	0.892105
Adjusted R-squared	0.361060	S.D. dependent var	1.222655
S.E. of regression	0.977313	Akaike info criterion	2.935920
Sum squared resid	15.28225	Schwarz criterion	3.085042
Log likelihood	-24.89124	F-statistic	6.085840
Durbin-Watson stat	2.161404	Prob(F-statistic)	0.010826

Null Hypothesis: D(VEINK) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-7.349183	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.857386	
	5% level	-3.040391	
	10% level	-2.660551	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(VEINK,2)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q3 1995Q4
Included observations: 18 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(VEINK(-1))	-1.488800	0.202580	-7.349183	0.0000
C	1.250508	0.309524	4.040102	0.0009

R-squared	0.771463	Mean dependent var	-0.158889
Adjusted R-squared	0.757179	S.D. dependent var	2.091793
S.E. of regression	1.030770	Akaike info criterion	3.002928
Sum squared resid	16.99978	Schwarz criterion	3.101858
Log likelihood	-25.02635	F-statistic	54.01048
Durbin-Watson stat	1.922690	Prob(F-statistic)	0.000002

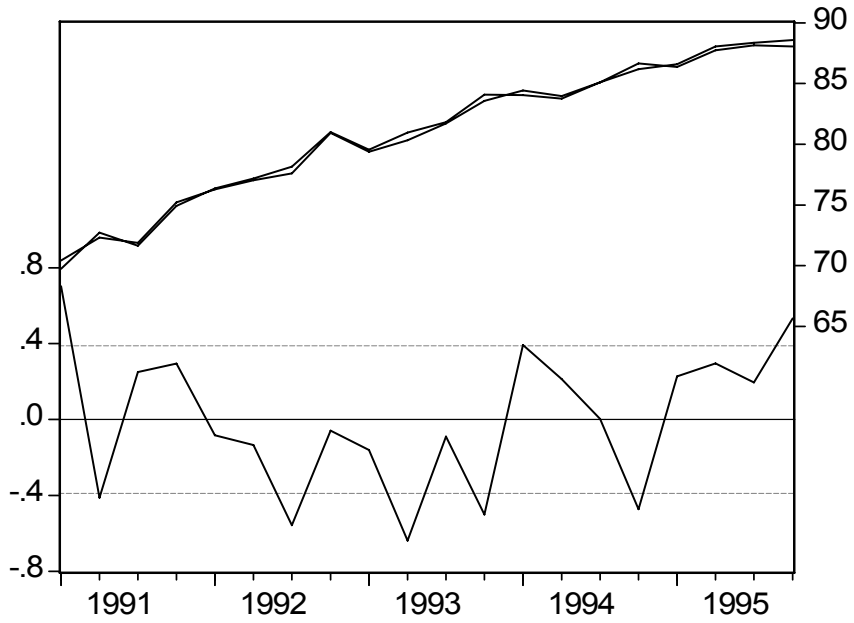
2. OLS-Schätzung der Steady-State-Relation zwischen Konsum und Einkommen

Dependent Variable: PKONSUM
Method: Least Squares
Sample: 1991Q1 1995Q4
Included observations: 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-9.528292	1.419207	-6.713815	0.0000
VEINK	1.080805	0.016930	63.83793	0.0000

R-squared	0.995603	Mean dependent var	80.90050
Adjusted R-squared	0.995358	S.D. dependent var	5.711312
S.E. of regression	0.389114	Akaike info criterion	1.044751
Sum squared resid	2.725376	Schwarz criterion	1.144324
Log likelihood	-8.447510	F-statistic	4075.281
Durbin-Watson stat	1.715838	Prob(F-statistic)	0.000000

Abbildung: Privater Konsum, Regressionswerte und Residuen



3. Einheitswurzeltest der Residuen der langfristigen Konsumfunktion

Null Hypothesis: U has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=4)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.438892	0.0002
Test critical values:	1% level	-2.692358	
	5% level	-1.960171	
	10% level	-1.607051	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(U)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q2 1995Q4
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
U(-1)	-1.000388	0.225369	-4.438892	0.0003

R-squared	0.522439	Mean dependent var	-0.008929
Adjusted R-squared	0.522439	S.D. dependent var	0.509618
S.E. of regression	0.352175	Akaike info criterion	0.801821
Sum squared resid	2.232495	Schwarz criterion	0.851529
Log likelihood	-6.617302	Durbin-Watson stat	1.538218

<u>Kritischer Wert</u> (α=0,05):
CV(0,05) = -3,34 + (-5,97)/19 + (-8,98)/19² = -3,34–0,31–0,02 = -3,67

<u>Testergebnis:</u>
DF = -4,4389 < CV(0,05) = -3,67
=> Nullhypothese einer Einheitswurzel der Residuen wird verworfen

$\Rightarrow$ U_t ist stationär, d.h. Konsum und Einkommen sind im Zeitraum 1991/I – 1995/IV kointegriert. Beide Variablen stehen in einer stabilen Langfristbeziehung (Steady-State-Beziehung) zueinander.

Linearkombination:
$U_t = C_t + 9{,}528 - 1{,}081 \cdot Y^v_t$
(Normierter) Kointegrationsvektor:
(1 9,528 -1,081)

● **Fehlerkorrekturmodell (Error-Correction-Modell)**

Im Falle einer Kointegration der beiden Variablen X_t und Y_t lässt sich der **dynamische Anpassungsprozess** an das Gleichgewicht

$$Y_t = ß_1 + ß_2 \cdot X_t + U_t$$

durch ein **Fehlerkorrekturmodell** abbilden (**Granger-Repräsentationstheorem**). Die hierin enthaltene **Short-run-Dynamik** enthält auch die Abweichungen vom Steady State in der Vorperiode,

$$u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot x_{t-1}$$

für die eine Rückbildung zu erwarten ist. Unterstellt man, dass X_t und Y_t I(1)-Variablen sind, ist das **Fehlerkorrekturmodell** von der Form

(4.18)
$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \mu + \gamma u_{t-1} + \alpha_1 \Delta Y_{t-1} + \ldots + \alpha_p \Delta Y_{t-p} \\ &\quad + \beta_0 \Delta X_t + \beta_1 \Delta X_{t-1} + \ldots + \beta_q \Delta X_{t-q} + V_t,\end{aligned}$$

V_t ist hierin eine White-Noise-Störvariable.

ΔY_{t-i}, ΔX_{t-i}: kurzfristige, transitorische Dynamik des Modells
$u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot x_{t-1}$: Abweichungen vom Gleichgewicht

γ: Anpassungsparameter (bei Rückbildung negativ)

Sind X_t und Y_t I(1)-Variablen und kointegriert, dann sind alle Variablen in (4.18) stationär, so dass bei OLS-Schätzung des Fehlerkorrekturmodells die standardmäßigen Signifikanztests der Regressionskoeffizienten Gültigkeit besitzen.

Wahl der Lagordnungen p und q der **kurzfistigen Dynamik**:

- Signifikante Regressionskoeffizienten der Differenzen Δy_{t-i}, Δx_{t-i};

- Informationskriterien AIC oder BIC

Beispiel:

Für den Zeitraum 1991/I – 1995/IV schätzen wir das Fehlerkorrekturmodell für den Konsum unter Verwendung des nach dem Engle-Granger-Verfahren bestimmten Zeitreihe der Residuen u_t. Zur Bestimmung der Lagordnung der kurzfristigen Dynamik gehen wir von Lagordnungen p und q von 4 aus und eliminieren sukzessive nicht-signifikante Differenzenterme Δy_{t-i} und Δx_{t-i}. Wie sich zeigt, ist allein die erste Differenz des Einkommens in der aktuellen Periode, Δx_t, bei der Modellierung der kurzfristigen Dynamik signifikant:

Dependent Variable: D(PKONSUM)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1991Q2 1995Q4
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.068704	0.100838	0.681326	0.5054
U(-1)	-0.903418	0.228437	-3.954779	0.0011
D(VEINK)	0.965406	0.068606	14.07177	0.0000

R-squared	0.925243	Mean dependent var	0.955263
Adjusted R-squared	0.915899	S.D. dependent var	1.180378
S.E. of regression	0.342313	Akaike info criterion	0.837755
Sum squared resid	1.874848	Schwarz criterion	0.986877
Log likelihood	-4.958675	F-statistic	99.01356
Durbin-Watson stat	1.780546	Prob(F-statistic)	0.000000

Interpretation:

Die **Durbin-Watson-Statistik** von 1,781 liegt im Annahmebereich (n=19, k=3, d_L=1,08, d_U=1,53) des Tests, so dass die Nullhypothese einer fehlenden Autokorrelation 1. Ordnung nicht abgelehnt werden kann.

Auch keinerlei Anzeichen für eine Autokorrelation höherer Ordnung ergeben sich aus dem **Breusch-Godfrey-Tests**:
BG(1) = 0,174 (p=0,677), BG(2) = 0,238 (p=0,888), BG(3) = 0,379 (p=0,945), BG(4) = 0,407 (p=0,982)

Die Schätzung des **Fehlerkorrekturmodells** zeigt, dass die Veränderung des Konsums Δy_t durch die
- zeitgleiche Veränderung des Einkommens Δx_t und
- den Fehlerkorrekturterm u_{t-1}

beeinflusst wird. Hierbei weist der Regressionskoeffizient des **Fehlerkorrekturterms** u_{t-1} das erforderliche negative Vorzeichen auf. Das bedeutet, dass sich Abweichungen von der Gleichgewichtsbeziehung zwischen Konsum und Einkommen im Zeitablauf zurückbilden. Genauer gibt der **Anpassungskoeffizient** γ von -0,903 an, dass pro Quartal ca. 90% der verbleibenden Störung abgebaut wird.

Der Regressionskoeffizient der ersten **Differenz des Einkommens**, Δx_t, von 0,965 gibt an, dass sich kontemporäre Veränderungen des Einkommens zu 96,5% in eine gleichgerichtete Veränderung des Konsums niederschlagen.

● Dynamische OLS-Schätzung (DOLS) des Kointegrationsvektors

Die Schätzung der statischen Gleichgewichtsbeziehung (4.15b) kann eine Inkonsistenz zur Folge haben, wenn die erklärende Größe nicht exogen ist. Stock und Watson (1993) schlagen daher zur Schätzung des Kointegrationsvektors eine **dynamische OLS-Prozedur (DOLS-Verfahren)** vor, die auch bei Endogenität von Einflussgrößen zu asymptotisch effizienten Parameterschätzern führt.

Die DOLS-Schätzung ergibt sich durch Erweiterung der statischen Regressionsbeziehung um verzögerte und vorlaufende Differenzen der erklärenden Variablen X:

(4.19) $$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_t + \sum_{j=-q}^{q} \Delta X_{t-j} + U_t$$

Die Differenzen ΔX_{t-j} fangen endogene Feedback-Effekte von der abhängigen Variablen Y_t auf die unabhängige Variable X_t auf. Der DOLS-Schätzer ist aus diesem Grund selbst dann konsistent, wenn X_t endogen ist.

Die Wahl der Leads und Lags kann anhand der signifikanten Regressionskoeffizienten vorgenommen werden. alternativ lassen sich hierzu die Informationskriterien AIC und BIC heranziehen.

Beispiel:

Für den Zeitraum 1991/I – 1995/IV degeneriert die Anwendung **DOLS-Prozedur** zur Schätzung der Konsumfunktion zum **Engle-Granger-Verfahren**, da sich bei Vorgabe einers maximalen Wertes von p=4 kein Lead oder Lag der Einkommens-diffenzen als signifikant erweist. Damit ist gleichzeitig das statische Regressions-Modell (4.15b) nach den Informationskriterien AIC und BIC einem Lead-Lag-Modell in den Differenzen vorzuziehen.

Zur Illustration des **DOLS-Verfahrens** verkürzen wir den Stützbereich auf den Zeitraum 1993/I – 1995/IV:

Dependent Variable: PKONSUM
Method: Least Squares
Sample: 1993Q1 1995Q4
Included observations: 12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-17.01418	1.985513	-8.569161	0.0000
VEINK	1.169351	0.022786	51.31845	0.0000
D(VEINK)	-0.216430	0.064115	-3.375654	0.0097
D(VEINK(-4))	-0.127395	0.057618	-2.211024	0.0580

R-squared	0.997094	Mean dependent var	84.69083
Adjusted R-squared	0.996005	S.D. dependent var	3.070568
S.E. of regression	0.194089	Akaike info criterion	-0.179796
Sum squared resid	0.301365	Schwarz criterion	-0.018160
Log likelihood	5.078774	F-statistic	915.0445
Durbin-Watson stat	1.680291	Prob(F-statistic)	0.000000

In diesem Fall erweist sich die **aktuelle Einkommensdifferenz** ΔX_t auf dem 1%-Niveau und die **um vier Perioden verzögerte Einkommensdifferenz** ΔX_{t-4} auf dem 10%-Niveau als signifikant.

Angesichts des **geringen Stichprobenumfangs** ist die **DOLS-Schätzung** nur **illustrativ** zu verstehen, so dass wir auf einen ADF-Test der Residuen zur Überprüfung ihrer Stationarität verzichten. Bei stationären Residuen könnte eine Kointegrationsbeziehung aus der DOLS-Schätzung analog zum Engle-Granger-Verfahren auf eine Kointegrations-Beziehung zwischen dem Konsum und dem Einkommen geschlossen werden. Der **Kointegrationsvektor** wäre in diesem Fall durch (1 17,014 -1,169) gegeben.