3.3 Moving-Average-Prozesse (MA-Modelle)

- Definition:

Ein stochastischer Prozess (X_t) heißt **Moving-Average-Prozess der Ordnung q** [**MA(q)-Prozess**], wenn er die Form

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} X_t &= U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q} \\ &= U_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \cdot U_{t-i} \end{aligned}}$$

oder (1′) $X_t = \theta(B) U_t$

mit

(2) $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$

hat. (U_t) ist dabei ein reiner Zufallsprozess (White-Noise-Prozess).

X_t wird als Abweichung vom Prozessmittelwert μ betrachtet, so dass $E(X_t)=0$ gilt.

Allg. $X_t = \mu + U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q \cdot U_{t-q}$

μ ist der Mittelwert des MA(q)-Prozesses.

- Anmerkungen:

-Interpretation:

Der beobachtete Wert X_t ist ein gewogenes Mittel aus den gegenwärtigen und vergangenen Schocks $u_{t-\tau}$, τ =1,2, ..., q, die nicht miteinander korreliert sind.

- Im Fall q = ∞ heißt (X_t) ein unendlicher Moving-Average-Prozess [MA(∞)].
- MA(q)-Prozesse sind Spezialfälle des allg. linearen Prozesses

$$X_t = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \psi_\tau U_{t-\tau},$$

wobei (ψ_τ) ein absolut summierbarer Filter (endliche Summe der abs. Gewichte ψ_τ) ist. Eigenschaft eines MA(q)-Prozesses: ψ_τ=0 für τ<0 (kausaler Filter).

- MA(q)-Prozess ergibt sich durch Filtern eines reinen Zufallprozesses mit dem Filter

  (1, $-\theta_1$, ..., $-\theta_q$).

- Anwendung in Ökonometrie:

Ökonom. Variable beeinflusst von einer Reihe „ random shocks" wie Streiks, Regierungsmaßnahmen, Knappheit an wichtigen Material etc. Effekte in aufeinanderfolgenden Perioden mit immer geringerem Ausmaß.

- **Spezielle MA(q)-Prozesse**

- **MA (1)- Prozess**

$$X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1}$$
$$= \underbrace{(1-\theta_1 B)}_{=\theta(B)} U_t$$

Varianz von X_t:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = E(X_t^2) = E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1})^2\right]$$
$$= E(U_t^2) - 2\theta_1 E(U_t U_{t-1}) + \theta_1^2 E(U_{t-1}^2)$$
$$= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2)$$

Autokovarianzf. (ACVF):

für $\tau = 1$:

$$\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = E(X_t X_{t-1})$$
$$= E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1})(U_{t-1} - \theta_1 U_{t-2})\right]$$
$$= E(U_t U_{t-1}) - \theta_1 E(U_t U_{t-2}) - \theta_1 E(U_{t-1}^2) + \theta_1^2 E(U_{t-1} U_{t-2})$$
$$= -\theta_1 E(U_{t-1}^2) = -\theta_1 \sigma_u^2$$

für $\tau = 2$: $\gamma_2 = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = E(X_t X_{t-2})$

$$= E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1})(U_{t-2} - \theta_1 U_{t-3})\right]$$

$$= E(U_t U_{t-2}) - \theta_1 E(U_t U_{t-3}) - \theta_1 E(U_{t-1} U_{t-2}) + \theta_1^2 E(U_{t-1} U_{t-3})$$

$= 0$, was generell für $\tau \geq 2$ gilt

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma_u^2(1+\theta_1^2) & \text{für} \quad \tau = 0 \\ -\theta_1 \sigma_u^2 & \text{für} \quad \tau = 1 \\ 0 & \text{für} \quad \tau \geq 2 \end{cases}$$

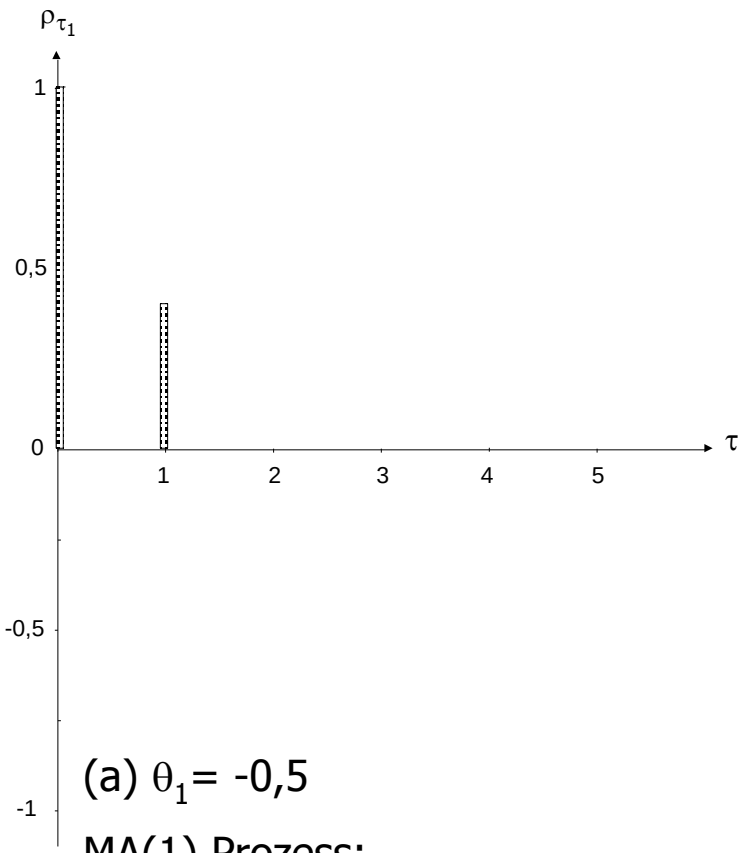
Autokorrelationsf. (ACF): $\rho_\tau = \gamma_\tau / \gamma_0$

$$\rho_\tau = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \tau = 0 \\ -\dfrac{\theta_1 \sigma_u^2}{\sigma_u^2(1+\theta_1^2)} = \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & \text{für} \quad \tau = 1 \\ 0 & \text{für} \quad \tau \geq 2 \end{cases}$$

Abb. 1: ACFs für MA (1)-Modelle mit θ_1=-0,5 u. θ_1= 0,5

(a) $\rho_1 = 0{,}5/(1+0{,}5^2) = 0{,}5/1{,}25 = \dfrac{2/4}{5/4} = 0{,}4$

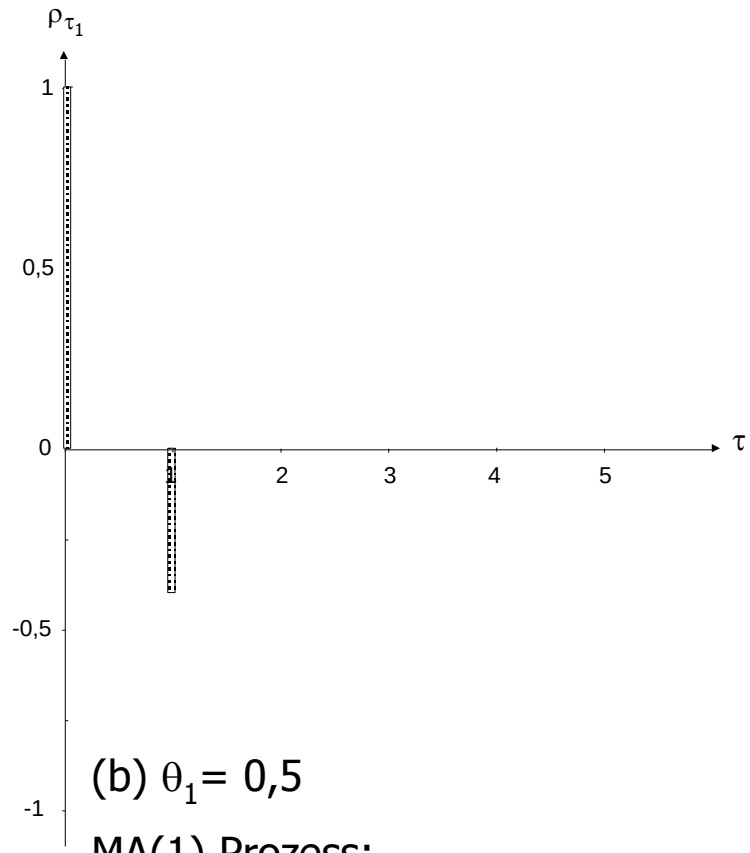
(b) $\rho_1 = -0{,}5/(1+0{,}25) = -0{,}4$



(a) θ_1= -0,5

MA(1) Prozess:

$$X_t = U_t + 0{,}5 \cdot U_{t-1}$$



(b) θ_1= 0,5

MA(1) Prozess:

$$X_t = U_t - 0{,}5 \cdot U_{t-1}$$

Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF) für MA(1):

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \underset{\substack{\text{wegen} \\ \rho_2=0}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{-\left(\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^2}{1-\left(\frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}\right)^2} = \frac{-\frac{\theta_1^2}{(1+\theta_1^2)^2}}{\frac{(1+\theta_1^2)^2-\theta_1^2}{(1+\theta_1^2)^2}} = \frac{-\theta_1^2}{1+2\theta_1^2+\theta_1^4-\theta_1^2}$$

$$= \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4}\left(= \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}\right)$$

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6}\left(= \frac{-\theta_1^3(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^8}\right)$$

$$\text{Allg.} \quad \phi_{\tau\tau} = \frac{-\theta_1^\tau}{\sum_{i=0}^{\tau}\theta_1^{2i}} = \frac{-\theta_1^\tau(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(\tau+1)}} \text{ für } \tau \geq 1$$

(Bem.: Die partielle Autokorrelationsfunktion für MA(q)-Prozesse verhält sich ähnlich wie die Autokorrelationsfunktion eines AR(q)-Prozesses. Für $\theta_1<0$ ist sie alternierend und für $\theta_1>0$ strebt sie mit exponentiell abnehmender Rate im negativen Bereich gegen 0.)

- **MA(2)-Prozess**

$$X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2}$$
$$= \underbrace{(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)}_{=\theta(B)} U_t$$

Varianz von X_t:

$$\gamma_0 = Var(X_t) = E(X_t^2) = E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2})^2\right]$$
$$= E(U_t^2) - 2\theta_1 E(U_t U_{t-1}) - 2\theta_2 E(U_t U_{t-2}) + \theta_1^2 E(U_{t-1}^2) + 2\theta_1\theta_2 E(U_{t-1} U_{t-2}) + \theta_2^2 E(U_{t-2}^2)$$
$$= E(U_t^2) + \theta_1^2 E(U_{t-1}^2) + \theta_2^2 E(U_{t-2}^2)$$
$$= \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

Autokovarianzf. (ACVF):

für $\tau = 1$: $\gamma_1 = Cov(X_t, X_{t-1}) = E(X_t X_{t-1})$

$$= E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2})(U_{t-1} - \theta_1 U_{t-2} - \theta_2 U_{t-3})\right]$$
$$= E(U_t U_{t-1}) - \theta_1 E(U_t U_{t-2}) - \theta_2 E(U_t U_{t-3}) - \theta_1 E(U_{t-1}^2) + \theta_1^2 E(U_{t-1} U_{t-2}) +$$
$$\theta_1\theta_2 E(U_{t-1} U_{t-3}) - \theta_2 E(U_{t-1} U_{t-2}) + \theta_1\theta_2 E(U_{t-2}^2) + \theta_2^2 E(U_{t-2} U_{t-3})$$
$$= -\theta_1 E(U_{t-1}^2) + \theta_1\theta_2 E(U_{t-2}^2)$$
$$= -\theta_1 \sigma_u^2 + \theta_1\theta_2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)$$

für τ = 2: $\gamma_2 = Cov(X_t, X_{t-2}) = E(X_t X_{t-2})$

$$= E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \theta_2 U_{t-2})(U_{t-2} - \theta_1 U_{t-3} - \theta_2 U_{t-4})\right]$$

$$= E(U_t U_{t-2}) - \theta_1 E(U_t U_{t-3}) - \theta_2 E(U_t U_{t-4}) - \theta_1 E(U_{t-1} U_{t-2}) + \theta_1^2 E(U_{t-1} U_{t-3})$$

$$+ \theta_1 \theta_2 E(U_{t-1} U_{t-4}) - \theta_2 E(U_{t-2}^2) + \theta_1 \theta_2 E(U_{t-2} U_{t-3}) + \theta_2^2 E(U_{t-2} U_{t-4})$$

$$= -\theta_2 E(U_{t-2}^2) = -\theta_2 \sigma_u^2$$

$\gamma_\tau = 0$ für $\tau \geq 3$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & \text{für} \quad \tau = 0 \\ \sigma_u^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2) & \text{für} \quad \tau = 1 \\ -\theta_2 \sigma_u^2 & \text{für} \quad \tau = 2 \\ 0 & \text{für} \quad \tau \geq 3 \end{cases}$$

Autokorrelationsf. (ACF): $\rho_\tau = \gamma_\tau / \gamma_0$

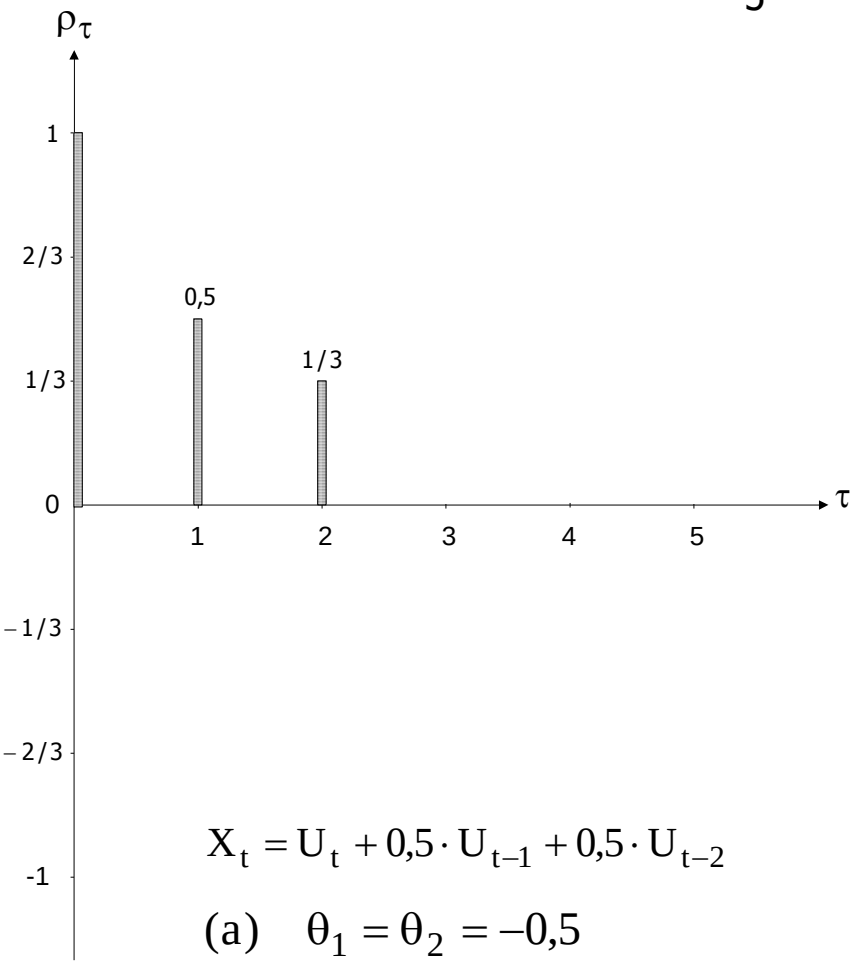
$$\rho_\tau = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \tau = 0 \\ \dfrac{\sigma_u^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)}{\sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & \text{für} \quad \tau = 1 \\ -\theta_2/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & \text{für} \quad \tau = 2 \\ 0 & \text{für} \quad \tau \geq 3 \end{cases}$$

Abb. 2: ACFs für MA(2)-Modelle

(a) $\theta_1 = \theta_2 = -0{,}5$

$$\rho_1 = (0{,}5 + 0{,}25)/(1 + 0{,}25 + 0{,}25) = 0{,}75/1{,}5 = 0{,}5$$

$$\rho_2 = 0{,}5/(1 + 0{,}25 + 0{,}25) = 0{,}5/1{,}5 = \frac{1}{3}$$



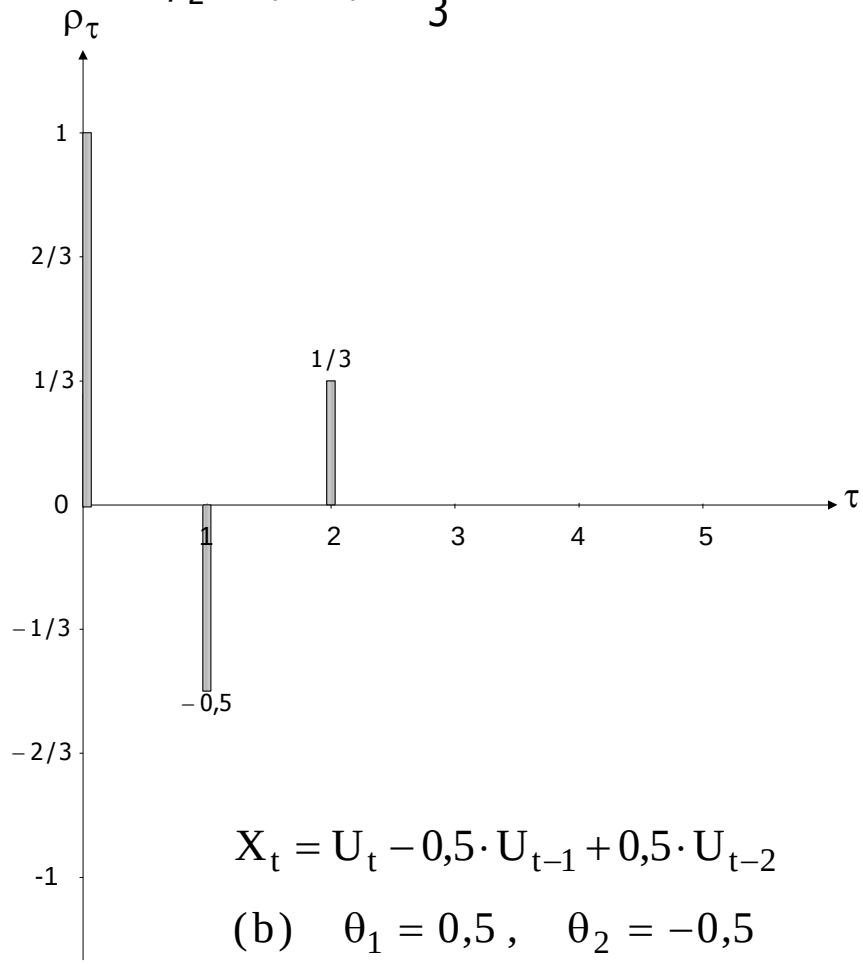
$$X_t = U_t + 0{,}5 \cdot U_{t-1} + 0{,}5 \cdot U_{t-2}$$

(a) $\theta_1 = \theta_2 = -0{,}5$

(b) $\theta_1 = 0{,}5$, $\theta_2 = -0{,}5$

$$\rho_1 = (-0{,}5 - 0{,}25)/1{,}5 = -0{,}75/1{,}5 = -0{,}5$$

$$\rho_2 = 0{,}5/1{,}5 = \frac{1}{3}$$



$$X_t = U_t - 0{,}5 \cdot U_{t-1} + 0{,}5 \cdot U_{t-2}$$

(b) $\theta_1 = 0{,}5$, $\theta_2 = -0{,}5$

(c) $\theta_1 = -0{,}5, \theta_2 = 0{,}5$

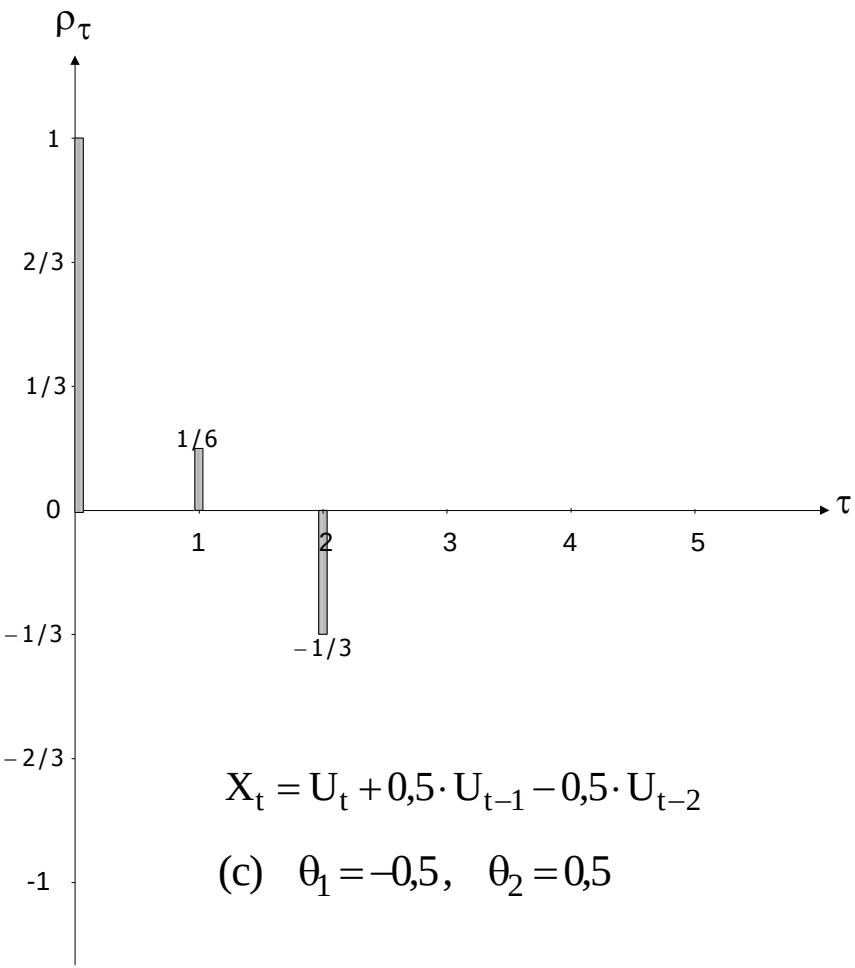
$$\rho_1 = (0{,}5 - 0{,}25)/1{,}5 = 0{,}25/1{,}5 = \frac{1}{6}$$

$$\rho_2 = -0{,}5/1{,}5 = -\frac{1}{3}$$

(d) $\theta_1 = \theta_2 = 0{,}5$

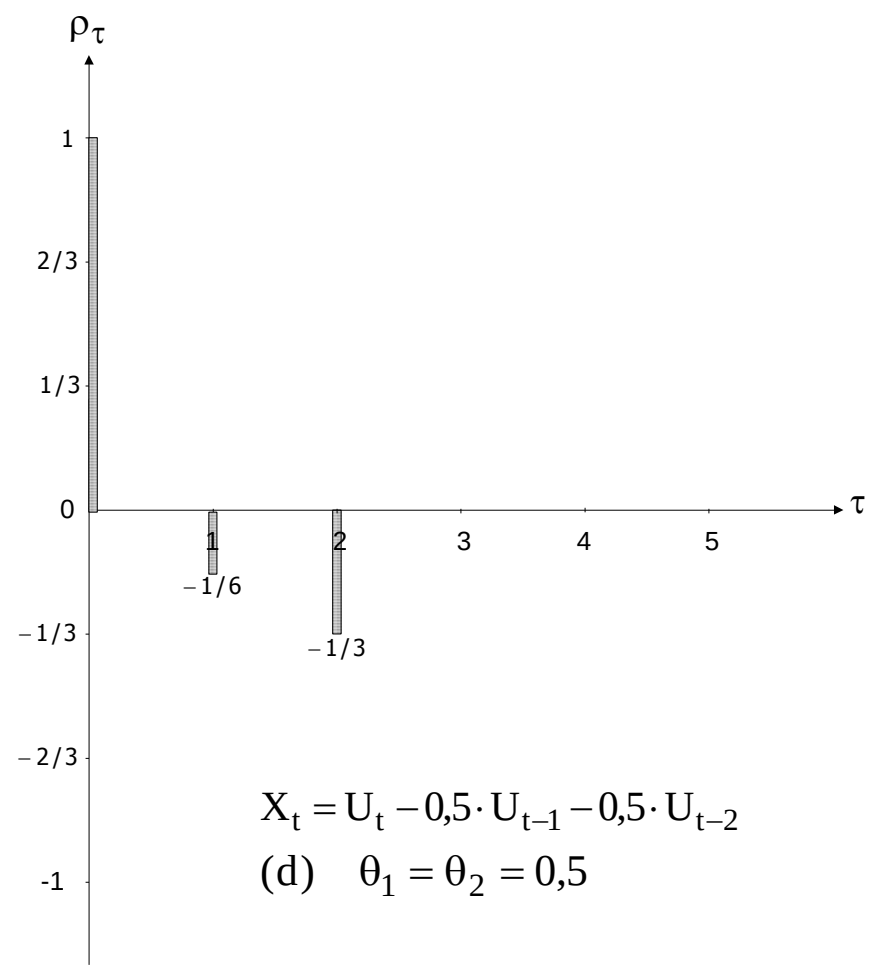
$$\rho_1 = (-0{,}5 + 0{,}25)/1{,}5 = -0{,}25/1{,}5 = -\frac{1}{6}$$

$$\rho_2 = -0{,}5/1{,}5 = -\frac{1}{3}$$



$$X_t = U_t + 0{,}5 \cdot U_{t-1} - 0{,}5 \cdot U_{t-2}$$

(c) $\theta_1 = -0{,}5, \quad \theta_2 = 0{,}5$



$$X_t = U_t - 0{,}5 \cdot U_{t-1} - 0{,}5 \cdot U_{t-2}$$

(d) $\theta_1 = \theta_2 = 0{,}5$

- Partielle Autokorrelationsfunktion (PACF)

Die partielle Autokorrelationsfunktion $\phi_{\tau\tau}$ eines MA(2)-Prozesses lässt sich nicht mehr in einfacher Form als Funktion der MA-Parameter θ_1 und θ_2 darstellen (→ Durbin-Levinson-Algorithmus).

Charakteristisches Polynom:

$$\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \ldots - \theta_q z^q$$

Verlauf der PACF:

- Reelle Wurzeln des charakteristischen Polynoms:

  PACF verläuft monoton oder alternierend exponentiell gegen 0

- Komplexe Wurzeln des charakteristichen Polynoms:

  PACF verläuft in Form einer gedämpften Sinusschwingung

- Stationarität

Wie man aus $E(X_t)$ und den ACFs γ_τ leicht erkennt, sind keine Restriktionen bzgl. der (θ_i) zu setzen, um die Stationarität eines MA(q)-Prozesses zu sichern.

- Invertibilität (Invertierbarkeit)

Es lässt sich zeigen, dass aus den ACFs γ_τ nicht eindeutig auf einen zugrunde liegenden MA(q)-Prozess geschlossen werden kann. So haben z.B. die beiden MA(1)-Prozesse

(a) $$X_t = U_t - \theta_1 U_{t-1} \Big| \rightarrow \rho_1^{(a)} = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2)$$

und

(b) $$X_t = U_t - \frac{1}{\theta_1} U_{t-1} \left[\begin{array}{l} \gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + 1/\theta_1^2)\ ,\ \gamma_1 = -1/\theta_1 \sigma_u^2 \\ \rho_1^{(b)} = \gamma_1 / \gamma_0 = -1/\theta_1\ /\ (1 + 1/\theta_1^2) \quad \Big| \cdot \theta_1^2 \\ \qquad = -\theta_1 / (\theta_1^2 + 1) = \rho_1^{(a)} \end{array} \right.$$

identische ACFs. Box und Jenkins (1970) haben daher das Kriterium der **Invertierbarkeit** eingeführt, das vor allem auch von Bedeutung ist, wenn in der Praxis aus der geschätzten ACF auf die Modellparameter geschlossen werden soll. Die Invertibilitätsbedingung sichert, dass es einen eindeutigen MA(q)-Prozess für eine gegebene ACF gibt.

MA(q)-Prozesse (X_t) erhält man durch Filtration von White-Noise-Prozessen (U_t) mit linearen, endlichen Filtern $[X_t = \theta(B)\, U_t]$. Für die Invertierbarkeit des Prozesses ist nun entscheidend, ob sich der Prozess (U_t) umgekehrt durch Filtration von (X_t), also

$U_t = \theta^{-1}(B)X_t$, erhalten lässt. Wie schon allgemein ausgeführt, sind dabei nur absolut summierbare und kausale Filter von Interesse.

Ein **MA(q)-Prozess** heißt **invertierbar**, wenn alle **Nullstellen** des charakteristischen Polynoms

$$\theta(z) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i\, z^i$$

außerhalb des Einheitskreises liegen. □

Unter dieser Bedingung gilt $U_t = \theta^{-1}(B)X_t$, wobei

$$\theta^{-1}(B) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, B^i$$

ein kausaler Filter mit absolut summierbarer Koeffizientenfolge ist.

- **Momente für MA(q)-Prozess (allgemein):**

- Erwartungswert von X_t

$$
\begin{aligned}
E(X_t) &= E(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q}) \\
&= E(U_t) - \theta_1 E(U_{t-1}) - \ldots - \theta_q E(U_{t-q}) \\
&= 0 \text{ , wegen } E(U_t) = 0 \text{ für alle t}
\end{aligned}
$$

- Varianz von X_t

$$
\begin{aligned}
&Var(X_t) = \gamma_0 = E(X_t^2) = E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q})(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q})\right] \\
&= E\Big[U_t(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q}) - \theta_1 U_{t-1}(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q}) \\
&\qquad - \ldots - \theta_q U_{t-q}(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q})\Big] \\
&= E(U_t^2) - \sum_{i=1}^{q} \theta_i E(U_t U_{t-i}) - \theta_1 E(U_{t-1} U_t) + \sum_{i=1}^{q} \theta_1 \theta_i E(U_{t-1} U_{t-i}) - \ldots - \theta_q E(U_{t-q} U_t) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{q} \theta_q \theta_i E(U_{t-q} U_{t-1}) \\
&= E(U_t^2) + \theta_1^2 E(U_{t-1}^2) + \ldots + \theta_q^2 E(U_{t-q})^2 \\
&= \sigma_u^2 + \theta_1^2 \sigma_u^2 + \ldots + \theta_q^2 \sigma_u^2 = \sigma_u^2 (1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Rightarrow \gamma_0 = \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2}$$ mit $\theta_0 = 1$

- Autokovarianz zw. X_t und $X_{t+\tau}$, $\tau \neq 0$

$$
\begin{aligned}
Cov(X_t\,;X_{t+\tau}) = \gamma_\tau &= E(X_t X_{t+\tau}) \\
&= E\left[(U_t - \theta_1 U_{t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q})(U_{t+\tau} - \theta_1 U_{t-1+\tau} - \ldots - \theta_q U_{t-q+\tau})\right] \\
&= E\left[U_t(U_{t+\tau} - \theta_1 U_{t-1+\tau} - \ldots - \theta_q U_{t-q+\tau}) - \theta_1 U_{t-1}(U_{t+\tau} - \theta_1 U_{t-1+\tau} - \ldots - \right. \\
&\quad \left. \theta_q U_{t-q+\tau}) - \ldots - \theta_q U_{t-q}(U_{t+\tau} - \theta_1 U_{t-1+\tau} - \ldots - \theta_q U_{t-q+\tau})\right]
\end{aligned}
$$

Fall (a): $\tau > q$

für $\tau = q+1$:

$$
\gamma_\tau = E\Big[U_t(U_{t+q+1} - \theta_1 U_{\underbrace{t-1+q+1}_{=t+q}} - \ldots - \theta_q U_{\underbrace{t-q+\overbrace{q+1}^{=\tau}}_{=t+1}}) - \theta_1 U_{t-1}(U_{\overbrace{t+q+1}^{=\tau}} - \theta_1 U_{\underbrace{t-1+q+1}_{=t+q}} - \ldots
$$

$$
- \theta_q U_{\underbrace{t-q+q+1}_{=t+1}}) - \ldots\Big] = 0 \text{ , da in den } E(U_t U_s) \text{ immer } t \neq s \text{ gilt.}
$$

Man kann leicht sehen, dass Entsprechendes für $\tau = q+2, q+3, \ldots$ gilt, so dass allgemein

$$\boxed{\gamma_\tau = 0 \text{ für } \tau > q}$$

gilt.

Fall b): $0 < \tau \leq q$

$\tau = 1$: $$\gamma_1 = E\Big[U_t(U_{t+1} - \theta_1 \underbrace{U_{t-1+1}}_{=t} - \ldots - \theta_q U_{t-q+1}) - \theta_1 U_{t-1}(U_{t+1} - \underbrace{U_{t-1+1}}_{=t} - \theta_2 \underbrace{U_{t-2+1}}_{=t-1} - \ldots$$

$$- \theta_q U_{t-q+1}) - \ldots - \theta_q U_{t-q}(U_{t+1} - \theta_1 \underbrace{U_{t-1+1}}_{=t} - \theta_2 \underbrace{U_{t-2+1}}_{=t-1} - \ldots - \theta_q U_{t-q+1})\Big]$$

$$= -\theta_1 E(U_t^2) + \theta_1\theta_2 E(U_{t-1}^2) + \theta_2\theta_3 E(U_{t-2}^2) + \ldots + \theta_{q-1}\theta_q E(U_{t-q+1}^2)$$

$$= \sigma_u^2(-\theta_1 + \sum_{i=1}^{q-1} \theta_i\theta_{i+1})$$

$\tau = 2$: $$\gamma_2 = E\Big[U_t(U_{t+2} - \theta_1 \underbrace{U_{t-1+2}}_{=t+1} - \theta_2 \underbrace{U_{t-2+2}}_{=t} - \ldots - \theta_q U_{t-q+2}) - \theta_1 U_{t-1}(U_{t+2} - \theta_1 \underbrace{U_{t-1+2}}_{=t+1} - \theta_2 \underbrace{U_{t-2+2}}_{=t} - \ldots$$

$$- \theta_q U_{t-q+2}) - \ldots - \theta_q U_{t-q}(U_{t+2} - \theta_1 \underbrace{U_{t-1+2}}_{=t+1} - \theta_2 \underbrace{U_{t-2+2}}_{=t} - \ldots - \theta_q U_{t-q+2})\Big]$$

$$= -\theta_2 E(U_t^2) + \theta_1\theta_3 E(U_{t-1}^2) + \theta_2\theta_4 E(U_{t-2}^2) + \ldots + \theta_{q-2}\theta_q E(U_{t-q+2}^2)$$

$$= \sigma_u^2(-\theta_2 + \sum_{i=1}^{q-2} \theta_i\theta_{i+2})$$

$$\vdots$$

allgemein: $\gamma_\tau = \sigma_u^2(-\theta_\tau + \sum_{i=1}^{q-\tau}\theta_i\theta_{i+\tau})$

ACVF:

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \sigma_u^2 \sum_{i=0}^{q} \theta_i^2 & \text{für} \quad \tau = 0 \\ \sigma_u^2(-\theta_\tau + \sum_{i=1}^{q-\tau}\theta_i\theta_{i+\tau}) & \text{für} \quad 0 < \tau \le q \\ 0 & \text{für} \quad \tau > q \end{cases}$$

ACF:

$$\rho_\tau = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \tau = 0 \\ (-\theta_\tau + \sum_{i=1}^{q-\tau}\theta_i\theta_{i+\tau}) / \sum_{i=0}^{q}\theta_i^2 & \text{für} \quad 0 < \tau \le q \\ 0 & \text{für} \quad \tau > q \end{cases}$$

Interpretation:

Aus der ACF erkennt man, dass ρ_τ bei einem MA(q)-Prozess für Lags $\tau > q$ verschwindet (von Relevanz bei der Identifizierung von ARMA- bzw. ARIMA-Prozessen).

Invertibilitätsbedingungen:

Bei einer Verletzung der Invertibilitätsbedingungen ist der ARMA-Prozess nicht definiert. Die Invert.bed. garantieren außerdem die Eindeutigkeit bei der Identifikation des stoch. Prozesses aus der Autokorrelationsfunktion.

MA(1)-Prozess:

$$-1 < \theta_1 < 1$$

MA(2)-Prozess:

$$-1 < \theta_1 < 1$$

$$\theta_1 + \theta_2 < 1$$

$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$