Exkurs: Signifikanztests über einzelne Regressionskoeffizienten

Wenn das multiple Regressionsmodell mit der ökonomischen Theorie im Einklang steht, ist zu erwarten, dass die exogenen Variablen x_j einen Einfluss in einer bestimmten Richtung auf die endogene Variable y zeigen. In dem ökonometrischen Modell müssen die geschätzten Regressionskoeffizienten daher das theoretisch erwartete Vorzeichen aufweisen.

Zusätzlich ist zu prüfen, ob die Einflussgrößen überhaupt eine Relevanz für die Erklärung der endogenen Variablen besitzen. Denn wenn ein Regressionskoeffizient das erwartete Vorzeichen aufweisen und nur zufallsbedingt von 0 abweicht, weist die erklärende Variable keinen systematischen Einfluss auf die zu erklärende Variable auf. Ob von einer unabhängigen Variablen ein systematischer Einfluss auf die abhängige Variable ausgeht, kann mit einem **Signifikanztest** geprüft werden.

Wird die **Nullhypothese**

$$H_0 : \beta_j = 0$$

der **Alternativhypothese**

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

gegenübergestellt, liegt ein zweiseitiger Signifikanztest vor. Erst wenn die Nullhypothese widerlegt werden kann, ist empirisch die Relevanz der exogenen Variablen zur Erklärung der endogenen Variablen gezeigt.

Unter der Nullhypothese sind die geschätzten Regressionskoeffizienten $\hat{\beta}_j$ aufgrund der Normalverteilung der Störvariablen u ebenfalls normalverteilt. Im Spezialfall des einfachen Regressionsmodells (eine echte“ erklärende Variable) sind die Varianzen der geschätzten Regressionskoeffizienten durch

(E1) $$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

und

(E2) $$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

gegeben.

Die Residualvarianz $\hat{\sigma}^2$ ist darin ein erwartungstreuer Schätzer für die unbekannte Störvarianz σ², die aus den Residuen $\hat{u}_t$ der Kleinst-Quadrate-Schätzung berechnet wird:

(E3) $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$$

Bei dem erwartungstreuen Schätzer $\hat{\sigma}^2$ wird die Summe der Residualquadrate nicht durch die Anzahl n der Beobachtungen, sondern durch die Anzahl n-k der Freiheitsgrade der Schätzung geteilt.

Beispiel:

Die Schätzung der Varianz $\hat{\sigma}^2$ der Störvariablen soll hier für die makroökonomische Konsumfunktion

$$\hat{C}_t = 37{,}317 + 0{,}864 \cdot Y_t$$

erfolgen. Hierzu wird eine Arbeitstabelle angelegt, in der die zur Berechnung des Schätzers

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{n-k} = \frac{\sum (C_t - \hat{C}_t)^2}{n-k}$$

benötigten Größen berechnet werden. $\hat{C}_t$ ist der Regressionswert des privaten Verbrauchs in der Periode t, der z.B. für 1974

$$\hat{C}_1 = 37{,}317 + 0{,}864 \cdot 962{,}72 = 869{,}11$$

lautet. Auf diese Weise lassen sich die weiteren Regressionswerte berechnen, die in die Arbeitstabelle übernommen werden:

t	Y_t^v	C_t	$\hat{C}_t$	$C_t - \hat{C}_t$	$(C_t - \hat{C}_t)^2$
1	962,72	837,60	869,11	-31,51	992,88
2	989,56	863,82	892,30	-28,48	811,11
3	1017,68	897,32	916,59	-19,27	371,33
4	1046,38	937,80	941,39	-3,59	12,89
5	1093,39	971,48	982,01	-10,53	110,88
6	1130,98	1003,06	1014,48	-11,42	130,42
7	1118,86	1015,57	1004,01	11,56	133,63
8	1096,80	1007,92	984,95	22,97	527,62
9	1078,10	992,55	968,80	23,75	564,06
10	1086,06	1005,92	975,67	30,25	915,06
11	1100,16	1021,68	987,86	33,82	1143,79
12	1119,93	1036,53	1004,94	31,59	997,93
13	1205,44	1072,01	1078,82	-6,81	46,38
14	1239,32	1106,88	1108,09	-1,21	1,46
15	1299,72	1137,00	1160,28	-23,28	541,96
16	1323,60	1167,37	1180,91	-13,54	183,33
17	1420,53	1230,68	1264,65	-33,97	1153,96
18	1417,17	1274,63	1261,75	12,88	165,89
19	1421,38	1287,11	1265,39	21,72	471,76
$\sum$					9276,34

Die Summe der Abweichungsquadrate beträgt also 9276,34. Mit n=19 und k=2 erhält man hiermit den erwartungstreuen Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{9276{,}34}{19-2} = 545{,}667$$

für die Störvarianz σ^2. Der Standardfehler der Schätzung lautet demzufolge

$$\hat{\sigma} = \sqrt{545{,}667} = 23{,}360$$

□

Prüfgröße und kritischer Wert

Die Prüfgröße des Signifikanztests

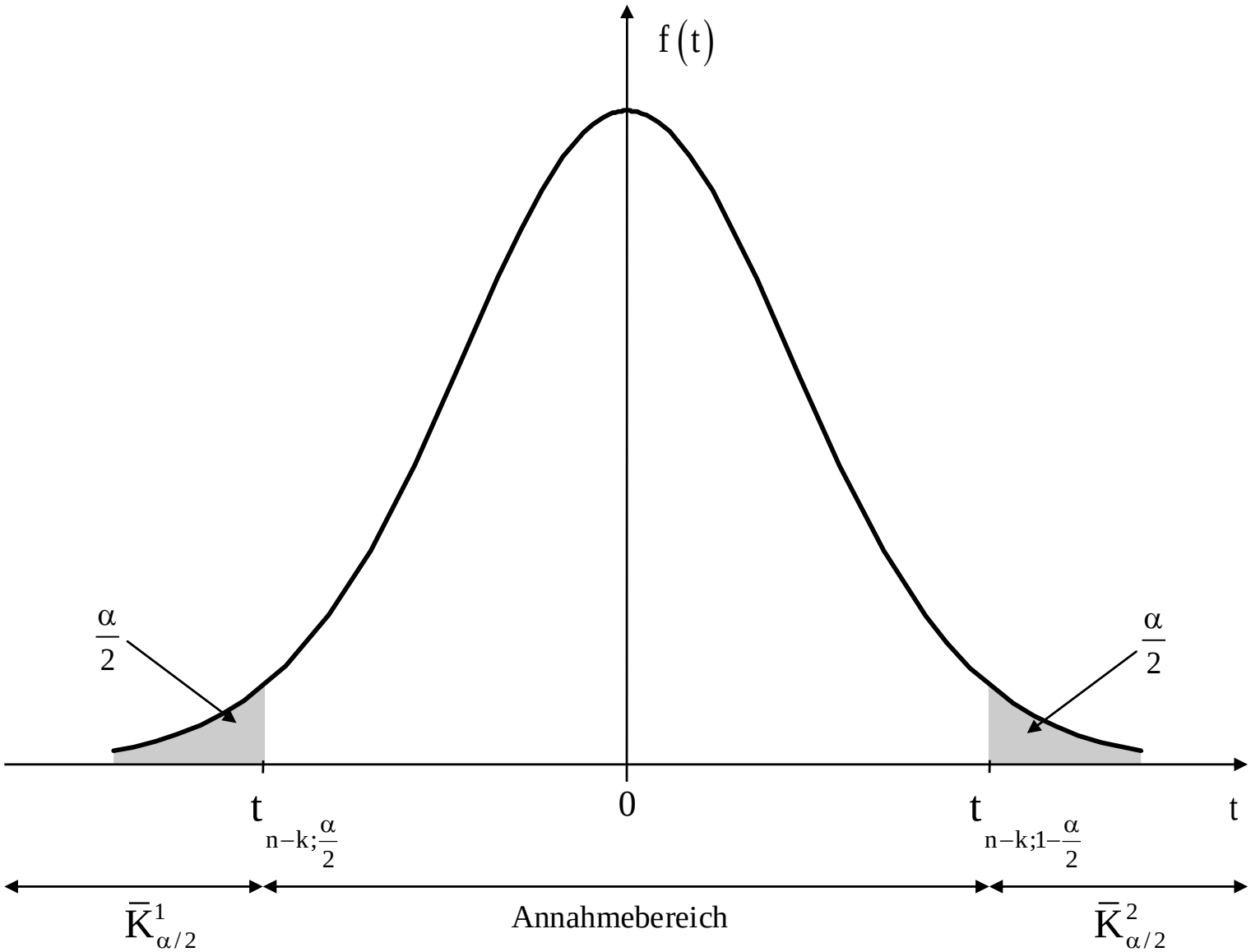
(E4) $$t = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j)}}$$

ist t-verteilt mit n-k Freiheitsgraden. Bei einem zweiseitigen Test wird die Nullhypothese H_0 bei einem Signifikanzniveau von α verworfen, wenn der absolute Wert der Prüfgröße t den **kritischen Wert**, d.h. das (1-α/2)-Quantil $t_{n-k;1-\alpha/2}$ der t-Verteilung mit n-k Freiheitsgraden übersteigt:

$$|t| > t_{n-k;1-\alpha/2} \rightarrow H_0 \text{ verwerfen}$$

In diesem Fall fällt die Prüfgröße in den Ablehnungsbereich $\overline{K}_\alpha = \overline{K}^1_{\alpha/2} \cup \overline{K}^2_{\alpha/2}$ (s. Abbildung). Bei einem Signifikanzniveau von z.B. 5% (α = 0,05) ist die Wahrscheinlichkeit einer so großen Abweichung von dem unter der Nullhypothese behaupteten Wert $\beta_j = 0$ kleiner als 5%. Während kleine Abweichungen (Prüfgröße t liegt im Annahmebereich $K_{1-\alpha}$) als zufallsbedingt hingenommen werden, interpretiert man derart große Abweichungen als substanziell oder **signifikant**.

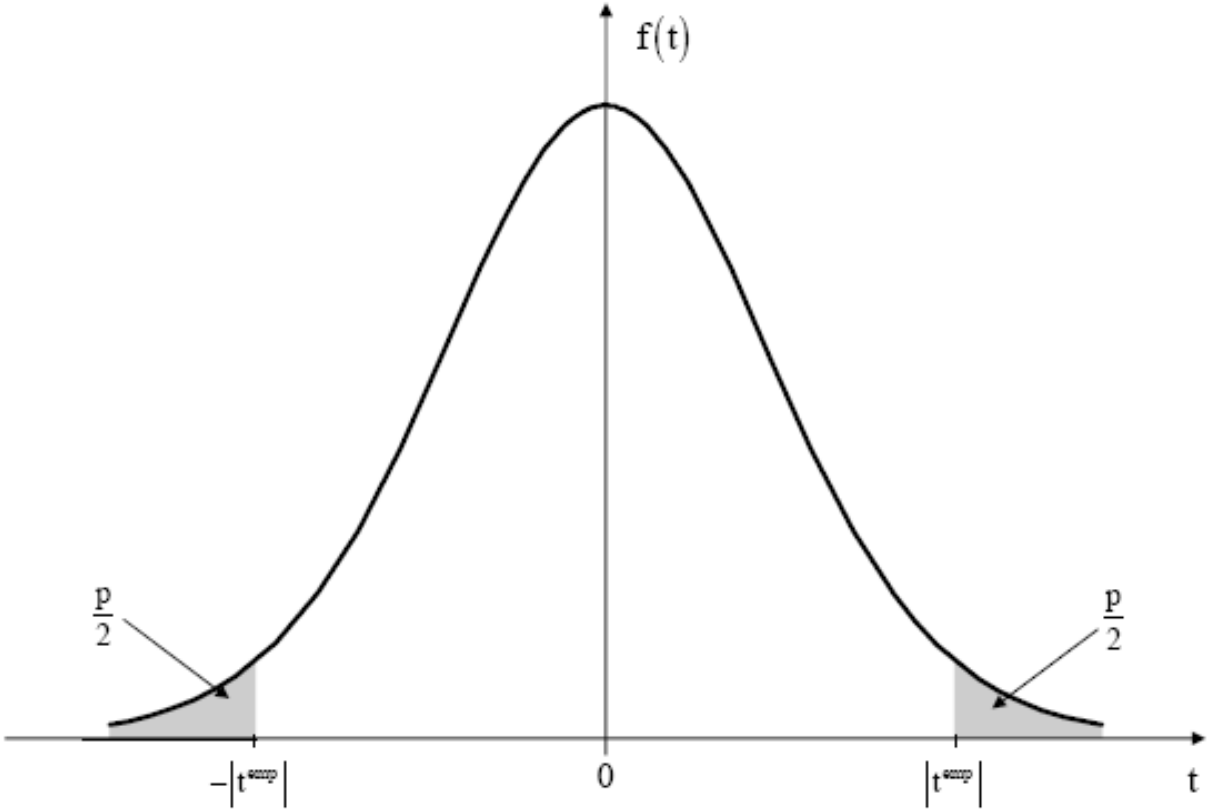
Abbildung: Annahme- und Ablehnungsbereiche bei dem zweiseitigen Signifikanztest



Signifikanztest und p-Wert

EViews weist in der Tabelle „Estimation Output“ unter „Prob.“ für den Regressionskoeffizienten des autonomen Konsums (=absolutes Glied C) den Wert 0.4104 aus. Dieser Wert wird auch als **p-Wert** bezeichnet. Aus der Gafik geht hervor, dass der **p-Wert** die **zweifache Überschreitungswahrscheinlichkeit** des absoluten empirischen t-Wertes $|t_{emp}|$bei der t-Verteilung mit n-k Freiheitsgraden angibt.

Abb.: p-Wert beim zweiseitigen Signifikanztest



In Statistik- und Ökonometrie-Programmen wie z.B. Stata, EViews oder R warden im Allgemeinen die Ergebnisse eines zweiseitigen Signifikanztestes ausgewiesen. Der p-Wert gibt dann die Wahrscheinlichkeit für $P(T>|t_{emp}|)$ und $P(T<-|t_{emp}|)$ an. Aufgrund der Symmetrie der t-Verteilung gilt

$$p = P(T<-|t_{emp}|) + P(T>|t_{emp}|) = 2\cdot P(T>|t_{emp}|) = 2\cdot P(T<-|t_{emp}|),$$

d.h. der p-Wert entspricht der zweifachen schattierten rechten (=linken) Fläche in der vorstehenden Abbildung.

Während α das **vorgegebene Signifikanzniveau** (**nominales Signifikanzniveau**) ist, gibt der p-Wert dem **tatsächlichen Signifikanzniveau**, d.h. der tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeit, des Tests an. Insofern vermittelt der p-Wert mehr Informationen als der Vergleich des empirischen t-Wert mit dem kritischen Wert $t_{n-1;1-\alpha/2}$. Bei einem zweiseitigen Signifikanztest lautet die Test-Entscheidung unter Verwendung des p-Wertes :

$$p < \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Nullhypothese ablehnen}$$

$$p \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Nullhypothese beibehalten}$$

Testentscheidungen bei einseitigen Signifikanztests:

- Rechtsseitiger Signifikanztest

$t > t_{n-k;1-\alpha} \rightarrow H_0$ verwerfen

oder

$p/2 < \alpha$ und $t > 0$ → H_0 verwerfen

- Linksseitiger Signifikanztest

$t < t_{n-k;\alpha} = -t_{n-k;1-\alpha} \rightarrow H_0$ verwerfen

oder

$p/2 < \alpha$ und $t < 0$ → H_0 verwerfen

Beispiel:

Für die makroökonomische Konsumfunktion haben wir für den Zeitraum von 1974 bis 1992 die OLS-Schätzer $\hat{\beta}_1$ = 37,317 und $\hat{\beta}_2$ = 0,864 ermittelt. Unter der Voraussetzung einer normalverteilten Störvariablen u sind dies zugleich die ML-Schätzer. Für einen Signifikanztest der Regressionskoeffizienten benötigen wir zusätzlich ihre Varianzen. Mit dem Schätzer $\hat{\sigma}^2$ = 545,667 für die Störvarianz sowie den Größen n=19, $\sum x_t = 22167{,}78$ und $\sum x_t^2 = 26249285{,}11$, erhält man

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{\sum x_t^2}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$= 545{,}667 \cdot \frac{26249285{,}11}{19 \cdot 26249285{,}11 - 22167{,}78^2}$$

$$= 545{,}667 \cdot 3{,}5583 = 1955{,}125$$

und

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{n}{n\sum x_t^2 - (\sum x_t)^2}$$

$$= 545{,}667 \cdot \frac{19}{19 \cdot 26249285{,}11 - 22167{,}78^2}$$

$$= 545{,}667 \cdot 2{,}5935 \cdot 10^{-6}$$

$$= 0{,}001415$$

Damit ergeben sich für die geschätzten Regressionskoeffizienten die t-Werte

$$t(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1)}} = \frac{37{,}317}{\sqrt{1955{,}125}} = 0{,}844$$

und

$$t(\hat{\beta}_2) = \frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2)}} = \frac{0{,}864}{\sqrt{0{,}001415}} = 22{,}969$$

Bei einem zweiseitigen Test auf dem 5 %-Signifikanzniveau beträgt der kritische Wert $t_{17;0,975}$ der t-Verteilung mit 17 Freiheitsgraden 2,110. Wegen

$$\left|t\left(\hat{\beta}_1\right)\right| = 0{,}844 < t_{17;0,975} = 2{,}110$$

ist das absolute Glied $\hat{\beta}_1$ nicht signifikant von Null verschieden, wohingegen das Steigungsmaß $\hat{\beta}_2$ wegen

$$\left|t\left(\hat{\beta}_2\right)\right| = 22{,}969 > t_{17;0,975} = 2{,}110$$

signifikant ist. Der Regressionskoeffizient $\hat{\beta}_2$ ist sogar als hochsignifikant zu bezeichnen, da sein t-Wert auch bereits die kritische Grenze eines Signifikanztests auf dem 1 %-Niveau ($t_{17;0,995}$=2,898) übersteigt.

Abb. Signifikanztest für den autonomen Konsum mit t-Wert

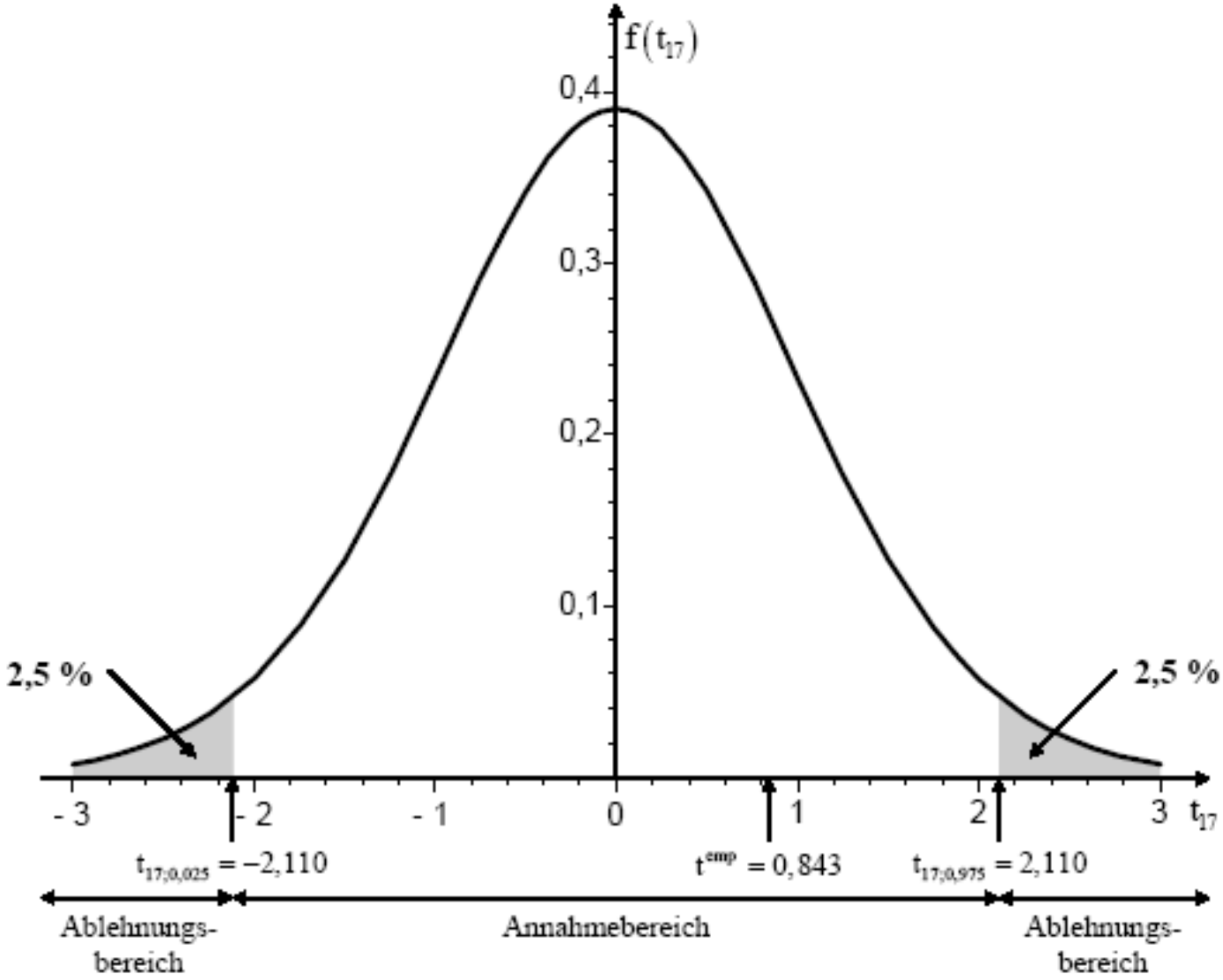
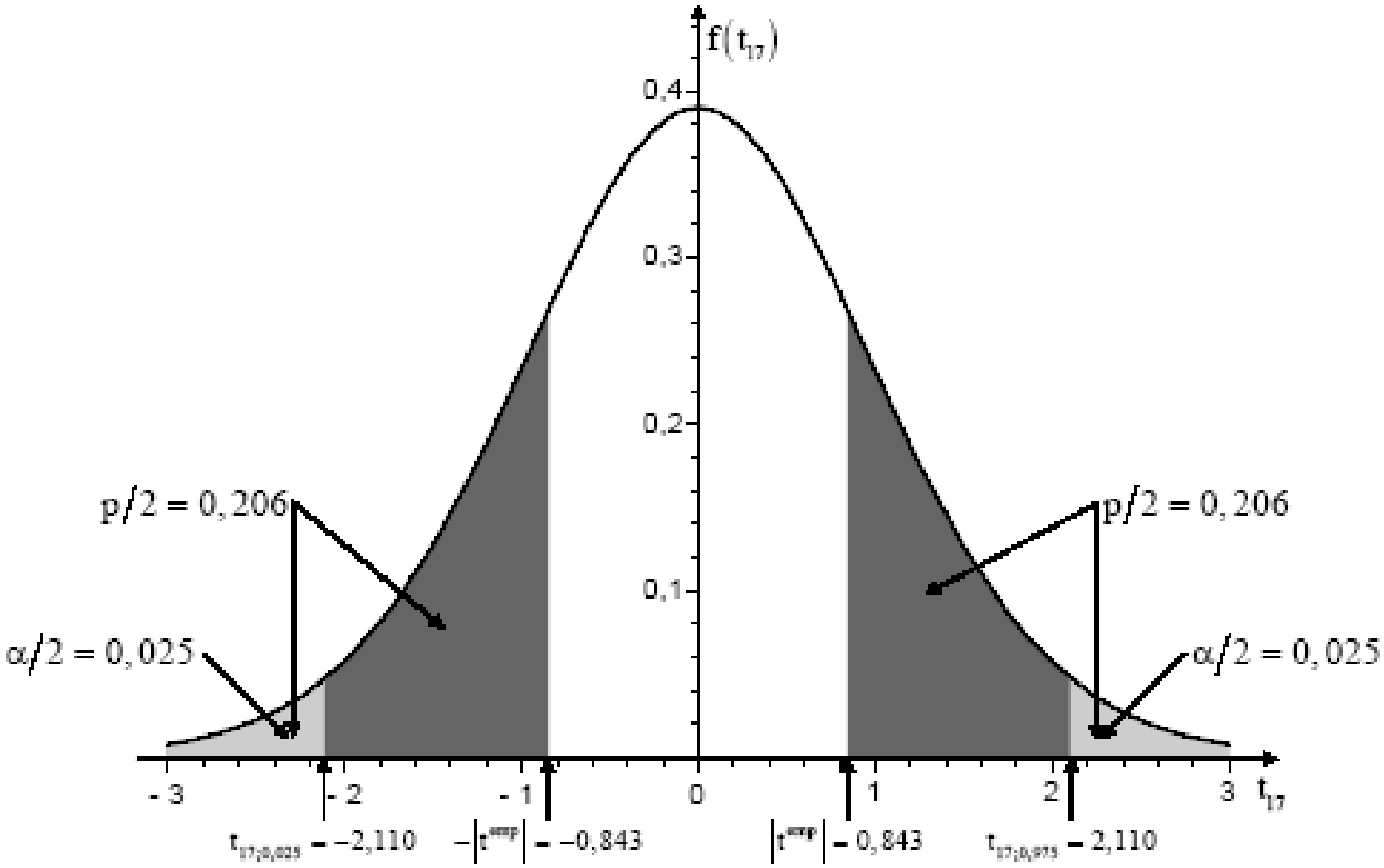


Abb. Signifikanztest für den autonomen Konsum mit p-Wert



Signifikanztests der Regressionskoeffizienten mit EViews

Dependent Variable: KONSUMR
Method: Least Squares
Sample: 1974 1992
Included observations: 19

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	37.31676	44.21441	0.843995	0.4104
VEINKR	0.864223	0.037617	22.97439	0.0000

□