Apl. Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

Aufgaben zur Zeitreihenanalyse (Kap. 3)

Aufgabe 3.1

Was versteht man unter einem stochastischen Prozess?

Lösung

Ein stochastischer Prozess ist eine zeitliche Folge von Zufallsvariablen. Je nachdem, ob die Zufallsvariablen in diskreter oder stetiger Zeit gemessen werden, heißt der Prozess diskret oder stetig. Der stochastische Prozess läuft also in der Zeit ab. Er wird auch als Menge (Familie, „ensemble“) von Zufallsvariablen angesehen, die zeitlich geordnet sind. Eine Realisation (Trajektorie) dieses „ensembles“ stellt eine Zeitreihe dar.

Aufgabe 3.2

Wodurch ist ein schwach stationärer stochastischer Prozess gekennzeichnet?

Lösung

Ein stochastischer Prozess heißt schwach stationär, wenn er mittelwert- und kovarianzstationär ist. Bei einem mittelwertstationären Prozess ist die Folge der Mittelwerte konstant. Kovarianzstationarität schließt Varianzstationarität ein. Ein kovarianzstationärer Prozess hat über die Zeit eine konstante Varianz; seine Kovarianzen hängen nicht von der konkreten Zeiteinheit, sondern allein von der zeitlichen Differenz der Zufallsvariablen ab.

Aufgabe 3.3

X und Y seien zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen mit identischen Varianzen. Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$!

Lösung

Setze:

(1) $\quad Z = X - Y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathrm{Cov}(X+Y, Z) && \text{(aus 1)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,Z) && \text{(aus C.5)}\\
&= \mathrm{Cov}(X, X-Y) + \mathrm{Cov}(Y, X-Y) && \text{(aus 1)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,-Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,-Y) && \text{(aus 2)}\\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X,-Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,-Y) && \text{(aus C.3)}
\end{aligned}$$

Setze:

(2) $\quad b = -1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X,-Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,-Y)\\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Cov}(X, b\cdot Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y, b\cdot Y) && \text{(aus 2)}\\
&= \mathrm{Var}(X) + b\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) + b\cdot\mathrm{Cov}(Y,Y) && \text{(aus C.4)}\\
&= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y) && \text{(aus 3)}\\
&= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Var}(Y) && \text{(aus C.3)}\\
&= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Var}(X) = 0 && [\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

Gegeben sind zwei Zufallsvariablen X und Y mit $\mu_x = 0$, $\mu_y = 10$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 9$ und $\rho = 0{,}5$. Bestimmen Sie folgende Größen:

a) $E(2X + Y)$

Lösung

$$\begin{aligned} E(2X+Y) &= 2 \cdot E(X) + E(Y) && \text{(aus A.1)} \\ &= 2 \cdot \mu_x + \mu_y \\ &= 2 \cdot 0 + 10 = 10 \end{aligned}$$

b) $Var(X - Y)$

Lösung

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot Cov(X,Y) \qquad \text{(aus B.5b)}$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \Rightarrow Cov(X,Y) = \rho \cdot \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}$$

$$= \rho \cdot \sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} = 0{,}5 \cdot \sqrt{1 \cdot 9} = 1{,}5$$

$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= Var(X) + Var(Y) - 2 \cdot Cov(X,Y) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot Cov(X,Y) = 1 + 9 - 2 \cdot 1{,}5 = 7 \end{aligned}$$

c) $Cov(X - Y, Y)$

Lösung

Setze:

(1) $b = -1$

$$\begin{aligned} Cov(X-Y,Y) &= Cov(X,Y) + Cov(-Y,Y) && \text{(aus C.5)} \\ &= Cov(X,Y) + Cov(b \cdot Y, Y) && \text{(aus 1)} \\ &= Cov(X,Y) + b \cdot Cov(Y,Y) && \text{(aus C.4)} \\ &= Cov(X,Y) - Cov(Y,Y) && \text{(aus 1)} \\ &= Cov(X,Y) - Var(Y) && \text{(aus C.3)} \\ &= 1{,}5 - 9 = -7{,}5 \end{aligned}$$

d) $Corr(X - Y, Y)$

Lösung

$$\begin{aligned} Corr(X-Y,Y) &= \frac{Cov(X-Y,Y)}{\sqrt{Var(X-Y) \cdot Var(Y)}} \\ &= \frac{-7{,}5}{\sqrt{7 \cdot Var(Y)}} && \text{(aus Teil b und c)} \\ &= \frac{-7{,}5}{\sqrt{7 \cdot 9}} = -0{,}945 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

Gegeben seien drei Zufallsvariablen X, Y und Z mit einem Erwartungswert von 10 und einer Varianz von 4. Es gelte: $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,Z)=2$ und $\mathrm{Cov}(X,Z)=1$. Berechnen Sie:

a) $\mathrm{Cov}(X+Y,Y+Z)$

Lösung

Setze:

(1) $W=Y+Z$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y,Y+Z) &= \mathrm{Cov}(X+Y,W) && \text{(aus 1)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,W)+\mathrm{Cov}(Y,W) && \text{(aus C.5)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,Y+Z)+\mathrm{Cov}(Y,Y+Z) && \text{(aus 1)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Y)+\mathrm{Cov}(Y,Z) && \text{(aus C.5)}\\
&= \mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Cov}(Y,Z) && \text{(aus C.3)}\\
&= 2+1+4+2\\
&= 9
\end{aligned}$$

b) $\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right)$

Setze:

(1) $W=Y+Z$ und (2) $b=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X+W}{3}\right) && \text{(aus 1)}\\
&= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{3}\cdot(X+W)\right]\\
&= \mathrm{Var}[b\cdot(X+W)] && \text{(aus 2)}\\
&= \mathrm{Var}(b\cdot X+b\cdot W)\\
&= b^2\cdot\mathrm{Var}(X)+b^2\cdot\mathrm{Var}(W)+2\cdot b^2\cdot\mathrm{Cov}(X,W) && \text{(aus B.6)}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\mathrm{Var}(X)+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\mathrm{Var}(Y+Z)+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y+Z) && \text{(aus 1 und 2)}\\
&= \frac{1}{9}\cdot\mathrm{Var}(X)+\frac{1}{9}\cdot\mathrm{Var}(Y+Z)+\frac{2}{9}\cdot\mathrm{Cov}(X,Y+Z)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\mathrm{Var}(X)+\frac{1}{9}\cdot\mathrm{Var}(Y+Z)+\frac{2}{9}\cdot[\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)] && \text{(aus C.5)}\\
&= \frac{1}{9}\cdot\mathrm{Var}(X)+\frac{1}{9}\cdot[\mathrm{Var}(Y)+\mathrm{Var}(Z)+2\cdot\mathrm{Cov}(Y,Z)]+\frac{2}{9}\cdot[\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)]\\
& && \text{(aus B.5)}\\
&= \frac{1}{9}\cdot 4+\frac{1}{9}\cdot[4+4+2\cdot 2]+\frac{2}{9}\cdot[2+1]\\
&= \frac{4}{9}+\frac{12}{9}+\frac{6}{9} \quad = \frac{22}{9}=2{,}444
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

Es seien $E(X)=2$, $Var(X)=9$, $E(Y)=0$, $Var(Y)=4$ und $\rho=0{,}25$. Bestimmen Sie:

a) $Var(X+Y)$

Lösung

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2\cdot Cov(X,Y) \qquad \text{(aus B.5)}$$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} \Rightarrow Cov(X,Y)=\rho\cdot\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}$$
$$=0{,}25\cdot\sqrt{9\cdot 4}=0{,}25\cdot 6=1{,}5$$

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2\cdot Cov(X,Y)$$
$$=9+4+2\cdot 1{,}5=16$$

b) $Cov(X,X+Y)$

Lösung

$$Cov(X,X+Y)=Cov(X,X)+Cov(X,Y) \qquad \text{(aus C.5)}$$
$$=Var(X)+Cov(X,Y) \qquad \text{(aus C.3)}$$
$$=9+1{,}5=10{,}5 \qquad \text{(Teil a)}$$

c) $Corr(X+Y,X-Y)$

Lösung

Setze:

(1) $W=X+Y$ und (2) $Z=X-Y$

$$Corr(X+Y,X-Y)=Corr(W,Z) \qquad \text{(aus 1 und 2)}$$
$$=\frac{Cov(W,Z)}{\sqrt{Var(W)\cdot Var(Z)}}$$

c1) Berechnung von $Cov(W,Z)$:

$$Cov(W,Z)=Cov(X+Y,Z) \qquad \text{(aus 1)}$$
$$=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z) \qquad \text{(aus C.5)}$$
$$=Cov(X,X-Y)+Cov(Y,X-Y) \qquad \text{(aus 2)}$$

Setze:

(3) $b=-1$

$$Cov(W,Z)=Cov(X,X-Y)+Cov(Y,X-Y)$$
$$=Cov(X,X)+Cov(X,-Y)+Cov(Y,X)+Cov(Y,-Y) \qquad \text{(aus C.5)}$$
$$=Var(X)+Cov(X,b\cdot Y)+Cov(X,Y)+Cov(Y,b\cdot Y) \qquad \text{(aus C.3 und 3)}$$
$$=Var(X)+b\cdot Cov(X,Y)+Cov(X,Y)+b\cdot Cov(Y,Y) \qquad \text{(aus C.4)}$$
$$=Var(X)-Cov(X,Y)+Cov(X,Y)-Cov(Y,Y) \qquad \text{(aus 3)}$$
$$=Var(X)-Cov(X,Y)+Cov(X,Y)-Var(Y) \qquad \text{(aus C.3)}$$
$$=Var(X)-Var(Y)=9-4=5$$

c2) Berechnung von $\mathrm{Var}(W)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W) &= \mathrm{Var}(X+Y) && \text{(aus 1)}\\ &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) && \text{(aus B.5b)}\\ &= 9+4+2\cdot 1{,}5 = 16 && \text{(aus Teil a)}\end{aligned}$$

c3) Berechnung von $\mathrm{Var}(Z)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(X-Y) && \text{(aus 1)}\\ &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) && \text{(aus B.5b)}\\ &= 9+4-2\cdot 1{,}5 = 10\end{aligned}$$

c4) Berechnung von $\mathrm{Corr}(X+Y, X-Y)$

$$\mathrm{Corr}(X+Y,X-Y) = \frac{\mathrm{Cov}(W,Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)\cdot\mathrm{Var}(Z)}} = \frac{5}{\sqrt{16\cdot 10}} = 0{,}395$$

Aufgabe 3.7

Die Zufallsvariable Z_t wird durch die Funktion

$$Z_t = 5+2\cdot t+X_t$$

erzeugt. Die Folge (X_t) ist ein stationärer Prozess mit einem Mittelwert von null und einer Kovarianzfunktion γ_k.

a) Wie lautet die Mittelwertfunktion von Z_t?

Lösung

$$\begin{aligned}E(Z_t) &= E(5+2\cdot t+X_t)\\ &= E(5)+E(2\cdot t)+E(X_t)\\ &= E(5)+E(2\cdot t)+E(X_t)\\ &= 5+2\cdot t+\underbrace{E(X_t)}_{=0}\\ &= 5+2\cdot t\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion von Z_t!

Lösung

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}(Z_t,Z_{t-1}) &= \mathrm{COV}(5+2\cdot t+X_t, 5+2\cdot(t-1)+X_{t-1})\\ &= \mathrm{COV}(X_t,X_{t-1}) && \text{(aus C.4)}\\ &= \gamma_1\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\mathrm{COV}(Z_t,Z_{t-k}) = \gamma_k$$

c) Ist (Z_t) stationär?

Lösung

• Kovarianzstationarität

Kovarianzstationarität ist gegeben, weil gilt:

$$COV(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k$$

Die Kovarianz ist bei gleichen zeitlichen Abstand der Folgen (Z_t) und (Z_{t-k}) gleich.

Die Kovarianzstatitionarität impliziert Varianzstationarität, die man mit k=0 erhält:

$$COV(Z_t, Z_{t-0}) = COV(Z_t, Z_t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus (C.3)}}}{=} Var(Z_t) = \gamma_0$$

• Mittelwertstationarität

Der Erwartungswert der Zahlenfolge (Z_t) hängt von der Zeit t ab; er ist also nicht über alle Perioden konstant:

$$E(Z_t) = 5 + 2 \cdot t.$$

Somit liegt keine Mittelwertstationarität vor.

(Z_t) ist damit kein stationärer Prozess.

Aufgabe 3.8

Für 12 Perioden liegen die Realisationen eines White-Noise-Prozesses (U_t) mit $U_t \sim N(0,1)$ vor:
0,96; 1,41; 0,41; -0,09; 0,58; -0,60; -1,01; -1,36; -0,27; 0,52; -0,96; 1,11.

a) Geben Sie einen Schätzer für den Prozessmittelwert an!

Lösung

$$\hat{\mu} = \bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t = \frac{1}{12}[0{,}96 + 1{,}41 + 0{,}41 + (-0{,}09) + 0{,}58 + (-0{,}60) + (-1{,}01) + (-1{,}36)$$

$$+ (-0{,}27) + 0{,}52 + (-0{,}96) + 1{,}11] = \frac{1}{12} \cdot 0{,}70 = 0{,}0583$$

Mittelwertschätzer $\hat{\mu} = \bar{u} = 0{,}0583 \rightarrow \mu$

b) Wie lautet der Schätzer für die Varianz des Prozesses?

Lösung

$$\hat{\gamma}_0 = s_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2 - \bar{u}^2$$

$$= \frac{1}{12}[0{,}96^2 + 1{,}41^2 + 0{,}41^2 + (-0{,}09)^2 + 0{,}58^2 + (-0{,}60)^2 + (-1{,}01)^2 + (-1{,}36)^2 + (-0{,}27)^2$$

$$+ 0{,}52^2 + (-0{,}96)^2 + 1{,}11^2] - 0{,}0583^2 = \frac{1}{12} \cdot 9{,}149 - 0{,}0034 = 0{,}7624 - 0{,}0034 = 0{,}7590$$

Varianzschätzer $\hat{\gamma}_0 = s_u^2 = 0{,}7590 \rightarrow \gamma_0$

c) Bestimmen Sie den empirischen Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung!

Lösung

Empirischer Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - \bar{u})(u_{t-1} - \bar{u})}{\sum_{t=1}^{n}(u_t - \bar{u})^2}$$

$\bar{u} = 0{,}0583$ (s. Teil a),

$\hat{\gamma}_0 = 0{,}7590 \rightarrow \sum_{t=1}^{12}(u_t - \bar{u})^2 = (n = 12) \cdot (\hat{\gamma}_0 = 0{,}7590) = 9{,}1080$ (s. Teil b)

Arbeitstabelle

t	u_t	u_{t-1}	$u_t - \bar{u}$	$u_{t-1} - \bar{u}$	$(u_t - \bar{u})(u_{t-1} - \bar{u})$
1	0,96	-	0,9017	-	-
2	1,41	0,96	1,3517	0,9017	1,2188
3	0,41	1,41	0,3517	1,3517	0,4754
4	-0,09	0,41	-0,1483	0,3517	-0,0522
5	0,58	-0,09	0,5217	-0,1483	-0,0773
6	-0,60	0,58	-0,6583	0,5217	-0,3434
7	-1,01	-0,60	-1,0683	-0,6583	0,7033
8	-1,36	-1,01	-1,4183	-1,0683	1,5152
9	-0,27	-1,36	-0,3283	-1,4183	0,4656
10	0,52	-0,27	0,4617	-0,3283	-0,1516
11	-0,96	0,52	-1,0183	0,4617	-0,4701
12	1,11	-0,96	1,0517	-1,0183	-1,0709
Σ	0,70				2,2128

$$\hat{\rho}_1 = \frac{2{,}2128}{9{,}1080} = 0{,}243$$

Aufgabe 3.9

Ein Random Walk mit Drift ist durch die Prozessgleichung

$$X_t = 2 + X_{t-1} + U_t$$

definiert, in der U_t eine unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Der Anfangswert X_0 ist gleich 0.

In den Perioden 1 bis 5 haben sich folgende Realisationen der Zufallsvariablen U_t ergeben:

t	1	2	3	4	5
u_t	-1,249	0,532	1,614	-0,260	-1,128

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Random Walks für t=5 und t→∞! Ist der Prozess mittelwertstationär?

Lösung

Da U_t eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist, gilt

$$E(U_t) = 0 \text{ für alle t.}$$

Mit

$$X_{t-1} = 2 + X_{t-2} + U_{t-1}$$

erhält man

$$X_t = 2 \cdot 2 + X_{t-2} + U_{t-1} + U_t$$

und mit

$$X_{t-2} = 2 + X_{t-3} + U_{t-2}$$

$$X_t = 2 \cdot 3 + X_{t-3} + U_{t-2} + U_{t-1} + U_t.$$

Allgemein lässt sich die Prozessgleichung nach fortlaufender Substitution wegen $X_0 = 0$ in der Form

$$X_t = 2 \cdot t + U_1 + U_2 + ... + U_t,$$

darstellen, aus der der Erwartungswert

$$E(X_t) = E(2 \cdot t + U_1 + U_2 + ... + U_t)$$
$$= 2 \cdot t + E(U_1) + E(U_2) + \ldots + E(U_t) = 2 \cdot t$$

folgt. Für t=5 erhält man den Erwartungswert

$$E(X_5) = 2 \cdot (t=5) = 10,$$

während der Erwartungswert für t→∞ gegen unendlich geht. Der angegebene Random Walk mit Drift ist daher nicht mittelwertstationär.

b) Wie groß ist die Varianz des Random Walks mit Drift für t=5 und t→∞ ? Ist der Prozess varianzstationär?

Lösung

Die Varianz des Random Walks mit Drift ist durch

$$\begin{aligned}
Var(X_t) &= E\{[X_t - E(X_t)]^2\} \\
&= E\{[(2t + U_1 + U_2 + ... + U_t) - 2t]^2]\} \\
&= E[(U_1 + U_2 + ... + U_t)^2] \\
&= E(U_1^2) + \underbrace{E(U_1U_2)}_{=0} + ... + \underbrace{E(U_1U_t)}_{=0} + E(U_2^2) + \underbrace{E(U_2U_1)}_{=0} + ... + \underbrace{E(U_2U_t)}_{=0} + ... + E(U_t^2) \\
&= E(U_1^2) + E(U_2^2) + ... + E(U_t^2) = \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2}_{t-mal} = t\cdot\sigma^2.
\end{aligned}$$

gegeben. Da die Varianz der standardnormalverteilten Zufallsvariablen U_t gleich 1 ist, folgt für t=5

$$Var(X_5) = (t=5)\cdot(\sigma^2=1) = 5$$

und für t→∞ wächst sie über alle Grenzen, so dass der Prozess nicht varianzsta-tionär ist.

c) Vergleichen Sie den theoretischen Autokorrelationskoeffizienten $\rho_{1,2}$ mit dem empirischen Autokorrelationskoeffizienten r_1!

Lösung

● Theoretischer Autokorrelationskoeffizient

$\rho_{t,s} = \sqrt{\frac{t}{s}}$ → für t=1 und s=2: $\rho_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5} = 0,707$

● Empirischer Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung

Prozessgleichung: $X_t = 2 + X_{t-1} + U_t$

t=1: $x_1 = 2 + (x_0=0) + u_1 = 2 + (-1,249) = 0,751$
t=2: $x_2 = 2 + x_1 + u_2 = 2 + 0,751 + 0,532 = 3,283$
t=3: $x_3 = 2 + x_2 + u_3 = 2 + 3,283 + 1,614 = 6,897$
t=4: $x_4 = 2 + x_3 + u_4 = 2 + 6,897 + (-0,260) = 8,637$
t=5: $x_5 = 2 + x_4 + u_5 = 2 + 8,637 + (-1,128) = 9,509$

Arbeitstabelle:

t	x_t	x_{t-1}	$x_t - \overline{x}$	$x_{t-1} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})$
1	0,751	-	-5,064	-	25,6441	-
2	3,283	0,751	-2,532	-5,064	6,4110	12,8220
3	6,897	3,283	1,082	-2,532	1,1707	-2,7396
4	8,637	6,897	2,822	1,082	7,9637	3,0534
5	9,509	8,637	3,694	2,822	13,6456	10,4245
Σ	29,077		0,002≈0		54,8351	23,5603

$$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{t=1}^{5} x_t = \frac{1}{5}29{,}077 = 5{,}815$$

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2} = \frac{23{,}5603}{54{,}8351} = 0{,}430$$

Aufgabe 3.10

Es liegen 15 Zeitreihenwerte des Random-Walk-Prozesses

$X_t = X_{t-1} + U_t$

mit (U_t) als White-Noise-Prozess, $U_t \sim N(0,1)$, vor:
0,72; 0,38; 0,57; 0,16; 0,12; -0,22; -0,18; 0,96; 1,92; 2,78; 2,34; 2,37; 3,45; 4,59; 5,95.

a) Geben Sie die theoretischen Autokorrelationskoeffizienten $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$ und $\rho_{1,4}$ des Random Walks an!

Lösung

$t<s$: $\rho_{t,s} = \sqrt{\frac{t}{s}}$

$$\rho_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\,, \quad \rho_{1,3} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577\,, \quad \rho_{1,4} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

b) Schätzen Sie die Autokorrelationskoeffizienten $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$ und $\rho_{1,4}$ aus der vorliegenden Zeitreihe!

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie das arithmetische Mittel mit zwei Dezimalstellen!

Lösung

- $\hat{\rho}_{1,2} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2}$

Arbeitstabelle

t	x_t	x_{t-1}	$x_t - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$x_{t-1} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})$
1	0,72	-	-1,01	1,0201	-	-
2	0,38	0,72	-1,35	1,8225	-1,01	1,3635
3	0,57	0,38	-1,16	1,3456	-1,35	1,5660
4	0,16	0,57	-1,57	2,4649	-1,16	1,8212
5	0,12	0,16	-1,61	2,5921	-1,57	2,5277
6	-0,22	0,12	-1,95	3,8025	-1,61	3,1395
7	-0,18	-0,22	-1,91	3,6481	-1,95	3,7245
8	0,96	-0,18	-0,77	0,5929	-1,91	1,4707
9	1,92	0,96	0,19	0,0361	-0,77	-0,1463
10	2,78	1,92	1,05	1,1025	0,19	0,1995
11	2,34	2,78	0,61	0,3721	1,05	0,6405
12	2,37	2,34	0,64	0,4096	0,61	0,3904
13	3,45	2,37	1,72	2,9584	0,64	1,1008
14	4,59	3,45	2,86	8,1796	1,72	4,9192
15	5,95	4,59	4,22	17,8084	2,86	12,0692
Σ	25,91			48,1554		34,7864

$$\overline{x} = \frac{25{,}91}{15} = 1{,}73\,, \qquad \hat{\rho}_{1,2} = \frac{34{,}7864}{48{,}1554} = 0{,}722$$

- $$\hat{\rho}_{1,3} = \frac{\sum_{t=3}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-2} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2}$$

Arbeitstabelle

t	x_t	x_{t-2}	$x_t - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$x_{t-2} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-2} - \overline{x})$
1	0,72	-	-1,01	1,0201	-	-
2	0,38	-	-1,35	1,8225	-	-
3	0,57	0,72	-1,16	1,3456	-1,01	1,1716
4	0,16	0,38	-1,57	2,4649	-1,35	2,1195
5	0,12	0,57	-1,61	2,5921	-1,16	1,8676
6	-0,22	0,16	-1,95	3,8025	-1,57	3,0615
7	-0,18	0,12	-1,91	3,6481	-1,61	3,0751
8	0,96	-0,22	-0,77	0,5929	-1,95	1,5015
9	1,92	-0,18	0,19	0,0361	-1,91	-0,3629
10	2,78	0,96	1,05	1,1025	-0,77	-0,8085
11	2,34	1,92	0,61	0,3721	0,19	0,1159
12	2,37	2,78	0,64	0,4096	1,05	0,6720
13	3,45	2,34	1,72	2,9584	0,61	1,0492
14	4,59	2,37	2,86	8,1796	0,64	1,8304
15	5,95	3,45	4,22	17,8084	1,72	7,2584
Σ	25,91			48,1554		22,5513

$$\hat{\rho}_{1,3} = \frac{22{,}5513}{48{,}1554} = 0{,}468$$

- $$\hat{\rho}_{1,4} = \frac{\sum_{t=4}^{n}(x_t - \overline{x})(x_{t-3} - \overline{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2}$$

Arbeitstabelle

t	x_t	x_{t-3}	$x_t - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$x_{t-3} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-3} - \overline{x})$
1	0,72	-	-1,01	1,0201	-	-
2	0,38	-	-1,35	1,8225	-	-
3	0,57	-	-1,16	1,3456	-	-
4	0,16	0,72	-1,57	2,4649	-1,01	1,5857
5	0,12	0,38	-1,61	2,5921	-1,35	2,1735
6	-0,22	0,57	-1,95	3,8025	-1,16	2,2620
7	-0,18	0,16	-1,91	3,6481	-1,57	2,9987
8	0,96	0,12	-0,77	0,5929	-1,61	1,2397
9	1,92	-0,22	0,19	0,0361	-1,95	-0,3705
10	2,78	-0,18	1,05	1,1025	-1,91	-2,0055
11	2,34	0,96	0,61	0,3721	-0,77	-0,4697
12	2,37	1,92	0,64	0,4096	0,19	0,1216
13	3,45	2,78	1,72	2,9584	1,05	1,8060
14	4,59	2,34	2,86	8,1796	0,61	1,7446
15	5,95	2,37	4,22	17,8084	0,64	2,7008
Σ	25,91			48,1554		13,7869

$$\hat{\rho}_{1,4} = \frac{13{,}7869}{48{,}1554} = 0{,}286$$

Aufgabe 3.11

Stellen Sie das Korrelogramm des AR(1)-Prozesses

$$X_t = \delta + 0{,}8 \cdot X_{t-1} + U_t,$$

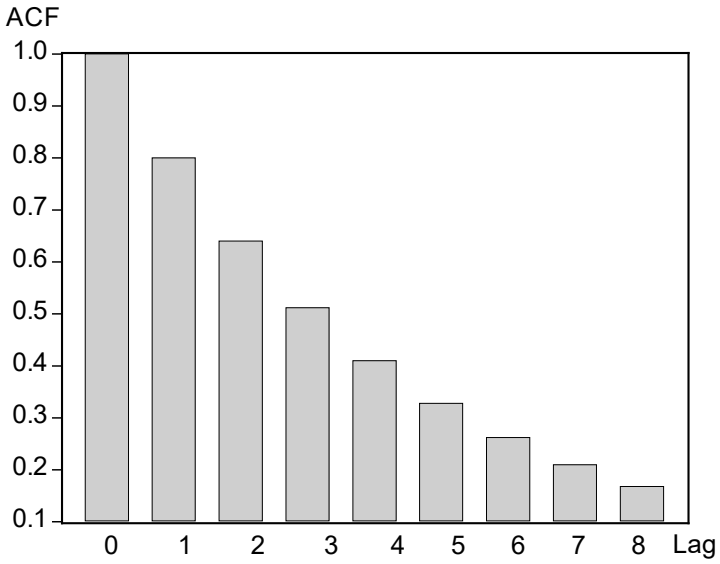
worin U_t white noise mit $E(U_t) = 0$ ist, grafisch dar!

Lösung

ACF des AR(1)-Prozesses: $\rho_\tau = \phi_1^\tau = 0{,}8^\tau$, τ=0,1,2,…

$\rho_0 = 1$; $\rho_1 = 0{,}8$; $\rho_2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$, $\rho_3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$; $\rho_4 = 0{,}8^4 = 0{,}410$;

$\rho_5 = 0{,}8^5 = 0{,}328$; $\rho_6 = 0{,}8^6 = 0{,}262$; $\rho_7 = 0{,}8^7 = 0{,}210$; $\rho_8 = 0{,}8^8 = 0{,}168$



Aufgabe 3.12

Die Prozessgleichung eines AR(1)-Prozesses lautet

$$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} + U_t.$$

U_t ist eine White-Noise-Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 2.

a) Bestimmen Sie die Varianz des AR(1)-Prozesses aus der Prozessgleichung!

Lösung

$$\gamma_0 = \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(0{,}7 \cdot X_{t-1} + U_t) = 0{,}7^2 \cdot \mathrm{Var}(X_{t-1}) + \mathrm{Var}(U_t)$$

$$\gamma_0 = 0{,}49 \cdot \gamma_0 + \sigma^2 = 0{,}49 \cdot \gamma_0 + 2$$

$$(1 - 0{,}49) \cdot \gamma_0 = 2$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{1 - 0{,}49} = \frac{2}{0{,}51} = 3{,}922$$

b) Leiten Sie die Autokovarianzen 2 und 3. Ordnung aus der Prozessgleichungn ab! Welche Werte nehmen sie hier bei $\gamma_1 = 2{,}745$ an!

Lösung

● Autokovarianz 2. Ordnung

$$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} + U_t \qquad \Big| \cdot X_{t-2}$$

$$X_{t-2}X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-2} \cdot X_{t-1} + X_{t-2} \cdot U_t$$

$$E(X_{t-2}X_t) = 0{,}7 \cdot E(X_{t-2} \cdot X_{t-1}) + \underbrace{E(X_{t-2} \cdot U_t)}_{=0}$$

$$\gamma_2 = 0{,}7 \cdot \gamma_1 = 0{,}7 \cdot 2{,}745 = 1{,}922$$

● Autokovarianz 3. Ordnung

$$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} + U_t \qquad \Big| \cdot X_{t-3}$$

$$X_{t-3}X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-3} \cdot X_{t-1} + X_{t-3} \cdot U_t$$

$$E(X_{t-3}X_t) = 0{,}7 \cdot E(X_{t-3} \cdot X_{t-1}) + \underbrace{E(X_{t-3} \cdot U_t)}_{=0}$$

$$\gamma_3 = 0{,}7 \cdot \gamma_2 = 0{,}7 \cdot 1{,}922 = 1{,}345$$

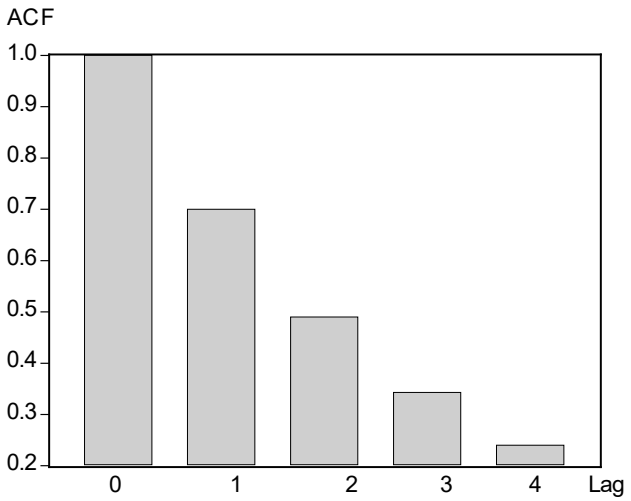
c) Zeichnen Sie das Korrelogramm mit den Autokorrelationskoeffizienten bis zu einem Lag von 4!

Lösung

● Autokorrelationskoeffizienten des AR(1)-Prozesses

$$\rho_\tau = \varphi_1^\tau = 0{,}7^\tau, \ \tau = 1,2,...$$

$\tau = 1$: $\rho^1 = 0{,}7^1 = 0{,}7$
$\tau = 2$: $\rho^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$
$\tau = 3$: $\rho^3 = 0{,}7^3 = 0{,}343$
$\tau = 4$: $\rho^4 = 0{,}7^4 = 0{,}240$



d) Überprüfen Sie anhand des charakteristischen Polynoms die Stationarität des AR(1)-Prozesses!

Lösung

Charakteristisches Polynom des AR(1)-Prozesses:

$$1 - \phi_1 z = 0$$

$$1 - 0{,}7 \cdot z = 0 \quad \Rightarrow 0{,}7 \cdot z = 1 \quad \Rightarrow z_1 = \frac{1}{0{,}7} = 1{,}429$$

Da die Wurzel z_1 des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegt, d.h. bei reellen Zahlen größer als 1 ist, ist der gegebene AR(1)-Prozess stationär.

Aufgabe 3.13

Gegeben ist der AR(2)-Prozess

$$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}1 \cdot X_{t-2} + U_t,$$

worin (U_t) ein White-Noise-Prozess mit dem Erwartungswert 0 ist.

a) Geben Sie den AR(2)-Prozess in der Lag-Polynom-Darstellung wieder!

Lösung

$$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}1 \cdot X_{t-2} + U_t$$

$$X_t = 0{,}7 \cdot B \cdot X_t - 0{,}1 \cdot B^2 \cdot X_t + U_t$$

$$\underbrace{(1 - 0{,}7 \cdot B + 0{,}1 \cdot B^2)}_{=\phi(B)} \cdot X_t = U_t$$

b) Zeigen Sie anhand der Wurzeln der charakteristischen Gleichung, dass der betrachtete autoregressive Prozess stationär ist!

Lösung

Charakteristische Gleichung:

$$1 - \phi_1 \cdot z - \phi_2 \cdot z^2 = 0$$

$$z^2 + \underbrace{\frac{\phi_1}{\phi_2}}_{=a} z - \underbrace{\frac{1}{\phi_2}}_{=b} = 0 \quad [a = \frac{\phi_1}{\phi_2}, b = -\frac{1}{\phi_2}]$$

$$z^2 + \frac{0{,}7}{-0{,}1} z - \frac{1}{-0{,}1} = 0$$

$$z^2 - 7 \cdot z + 10 = 0 \quad [a=-7,\ b=10]$$

Wurzeln: $z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = -\left(\frac{-7}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 10}$

$$= 3{,}5 \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} = 3{,}5 \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = 3{,}5 \pm \frac{3}{2} = 3{,}5 \pm 1{,}5$$

$z_1 = 3{,}5 - 1{,}5 = 2$ ^ $z_2 = 3{,}5 + 1{,}5 = 5$

Da beide Wurzeln absolut größer als 1 sind, d.h. außerhalb des Einheitskreises liegen, ist der betrachtete AR(2)-Prozess stationär.

c) Bestimmen Sie die Autokorrelationskoeffizienten erster und zweiter Ordnung des AR(2)-Prozesses aus der Prozessgleichung!

Lösung

<u>ACF 1. Ordnung</u>

$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}1 \cdot X_{t-2} + U_t \;\Big|\cdot X_{t-1}$, dann E(.)

$$\underbrace{E(X_t \cdot X_{t-1})}_{=\gamma_1} = 0{,}7 \cdot \underbrace{E(X_{t-1}^2)}_{=\gamma_0} - 0{,}1 \cdot \underbrace{E(X_{t-1} \cdot X_{t-2})}_{=\gamma_1} + \underbrace{E(U_t \cdot X_{t-1})}_{=0}$$

$$\gamma_1 = 0{,}7 \cdot \gamma_0 - 0{,}1 \cdot \gamma_1$$

$$1{,}1 \cdot \gamma_1 = 0{,}7 \cdot \gamma_0$$

$$\gamma_1 = \frac{0{,}7}{1{,}1}\gamma_0 = 0{,}636 \cdot \gamma_0$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0{,}636 \cdot \gamma_0}{\gamma_0} = 0{,}636$$

<u>ACF 2. Ordnung</u>

$X_t = 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}1 \cdot X_{t-2} + U_t \;\Big|\cdot X_{t-2}$, dann E(.)

$$\underbrace{E(X_t \cdot X_{t-2})}_{=\gamma_2} = 0{,}7 \cdot \underbrace{E(X_{t-1} \cdot X_{t-2})}_{=\gamma_1} - 0{,}1 \cdot \underbrace{E(X_{t-2}^2)}_{=\gamma_0} + \underbrace{E(U_t \cdot X_{t-2})}_{=0}$$

$$\gamma_2 = 0{,}7 \cdot \gamma_1 - 0{,}1 \cdot \gamma_0$$

$$\rho_2\left(=\frac{\gamma_2}{\gamma_0}\right) = 0{,}7 \cdot \rho_1\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right) - 0{,}1 = 0{,}7 \cdot 0{,}636 - 0{,}1 = 0{,}345$$

d) Erstellen Sie unter Verwendung der Rekursionsformel

$$\rho_\tau = \phi_1 \cdot \rho_{\tau-1} + \phi_2 \cdot \rho_{\tau-2}$$

das Korrelogramm des AR(2)-Prozesses bis zum Lag 6! Interpretieren Sie den Verlauf der ACF-Funktion!

Lösung

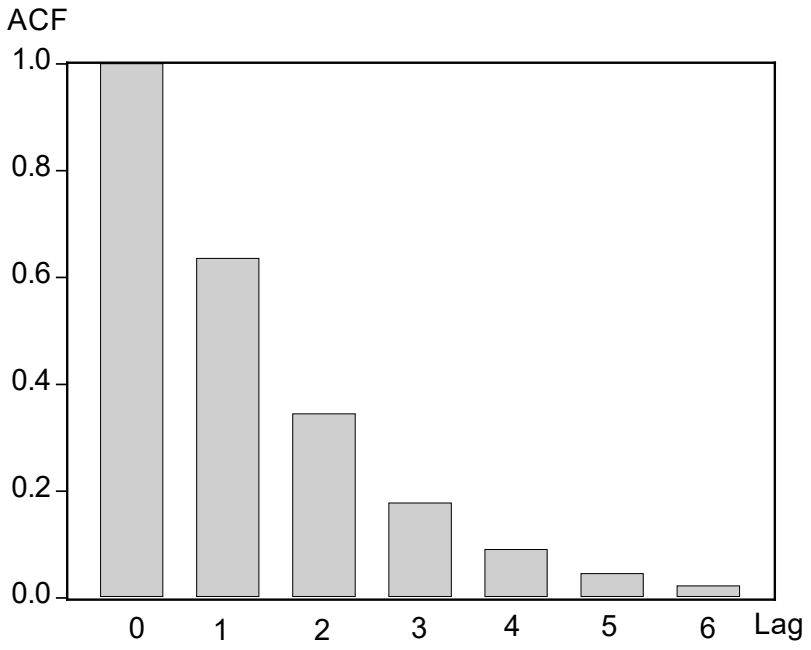
$\rho_1 = 0{,}636$; $\rho_2 = 0{,}345$ (s. Teil c))

$\rho_3 = 0{,}7 \cdot \rho_2 - 0{,}1 \cdot \rho_1 = 0{,}7 \cdot 0{,}345 - 0{,}1 \cdot 0{,}636 = 0{,}178$

$\rho_4 = 0{,}7 \cdot \rho_3 - 0{,}1 \cdot \rho_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}178 - 0{,}1 \cdot 0{,}345 = 0{,}091$

$\rho_5 = 0{,}7 \cdot \rho_4 - 0{,}1 \cdot \rho_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}091 - 0{,}1 \cdot 0{,}178 = 0{,}046$

$\rho_6 = 0{,}7 \cdot \rho_5 - 0{,}1 \cdot \rho_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}046 - 0{,}1 \cdot 0{,}091 = 0{,}023$



Verlauf der ACF: exponentiell abnehmend

Aufgabe 3.14

Was versteht man unter einer partiellen Autokorrelation? Welche Rolle spielt dieses Korrelationskonzept bei der Identifikation der Ordnung eines AR- bzw. MA-Prozesses?

Lösung

Die partiellen Autokorrelationen zum Lag $\tau = 1, 2, 3, \ldots$ geben die Einflüsse der verzögerten Zufallsvariablen $X_{t-\tau}$ auf die aktuelle Zufallsvariable X_t unter Ausschaltung der dazwischen liegenden Einflussgrößen X_{t-1}, X_{t-2}, …, $X_{t-\tau+1}$ an. Eine partiellen Autokorrelation spiegelt somit den direkten Zusammenhang zwischen X_t und $X_{t-\tau}$ wider, der sich nach Bereinigung der zeitlichen Zwischeneffekte ergibt.

Während die (theoretischen) Autokorrelationen eines MA(q)-Prozesses für Lags größer als q, also q+1, q+2, …, gleich 0 sind, verschwinden die partiellen Autokorrelationen eines AR(p)-Prozesses für Lags größer als p, d.h. für p+1, p+2, …Damit eignen sich die geschätzten partiellen Autokorrelationen zur Identifikation der Ordnung eines AR-Prozesses. Um festzustellen, von welchem Lag ab die PACF abbricht, werden die partiellen Autokorrelationen auf Signifikanz geprüft. Bei einem AR(p)-Prozess ist zu erwarten, dass die partiellen Autokorrelationen für die Lags p+1, p+2, … z.B. einem Signifikanzniveau von 5% innerhalb der 2σ-Konfidenzbänder liegen.

Aufgabe 3.15

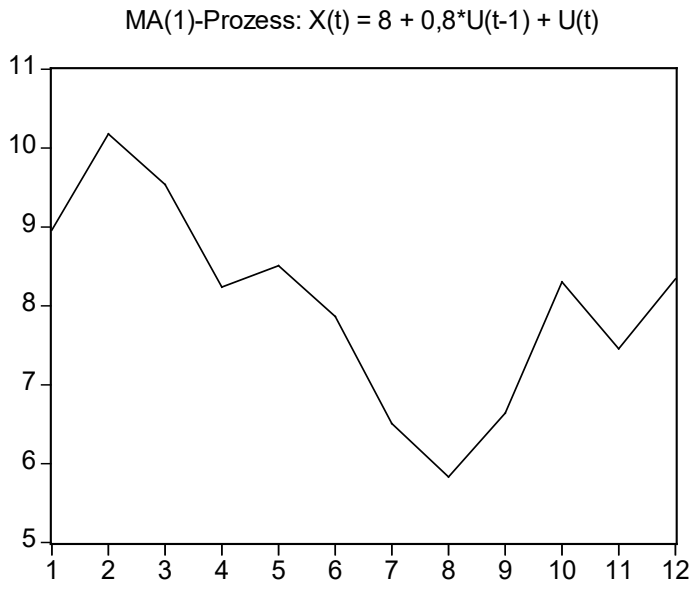
Ein MA(1)-Prozess hat die Prozessgleichung

$$X_t = 8 + 0{,}8 \cdot U_{t-1} + U_t.$$

a) Stellen Sie die Zeitreihe des MA(1)-Prozesses unter Verwendung in Aufg. 3.8 wiedergegebenen Realisationen des White-Noise-Prozesses mit $u_0=0$ für den Zeitraum 1 bis 12 in einem Zeitreihendiagramm dar!

Hinweis: Verwenden Sie die Zeitreihe mit zwei Dezimalstellen!

Lösung



b) Geben Sie die Kenngrößen γ_0 und γ_1 des MA(1)-Prozesses an!

Lösung

$\sigma_u^2 = 1$ (s. Aufg. 3.8) und $\theta_1 = -0{,}8$

Prozessvarianz: $\gamma_0 = \sigma_u^2 \cdot (1+\theta_1^2) = 1 \cdot [1+(-0{,}8)^2] = 1{,}64$

Autokovarianz 1. Ordnung: $\gamma_1 = -\theta_1 \cdot \sigma_u^2 = -(-0{,}8) \cdot 1 = 0{,}8$

c) Schätzen Sie γ_0 und γ_1!

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie das Stichprobenmittel mit zwei Dezimalstellen!

Lösung

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \overline{x})^2 \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n}(x_t - \overline{x}) \cdot (x_{t-1} - \overline{x})$$

Arbeitstabelle:

t	x_t	x_{t-1}	$x_t - \overline{x}$	$x_{t-1} - \overline{x}$	$(x_t - \overline{x})^2$	$(x_t - \overline{x})(x_{t-1} - \overline{x})$
1	8,96	-	0,93	-	0,8649	-
2	10,18	8,96	2,15	0,93	4,6225	1,9995
3	9,54	10,18	1,51	2,15	2,2801	3,2465
4	8,24	9,54	0,21	1,51	0,0441	0,3171
5	8,51	8,24	0,48	0,21	0,2304	0,1008
6	7,86	8,51	-0,17	0,48	0,0289	-0,0816
7	6,51	7,86	-1,52	-0,17	2,3104	0,2584
8	5,83	6,51	-2,20	-1,52	4,8400	3,3440
9	6,64	5,83	-1,39	-2,20	1,9321	3,0580
10	8,30	6,64	0,27	-1,39	0,0729	-0,3753
11	7,46	8,30	-0,57	0,27	0,3249	-0,1539
12	8,34	7,46	0,31	-0,57	0,0961	-0,1767
Σ	96,37				17,6473	11,5368

$$\overline{x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} x_t = \frac{1}{12} \cdot 96{,}37 = 8{,}03$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{12} \cdot 17{,}6473 = 1{,}471 \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{1}{12} \cdot 11{,}5368 = 0{,}961$$

d) Vergleichen Sie den empirischen Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_1$ mit dem theoretischen Autokorrelationskoeffizienten ρ_1!

Lösung

Theoretischer Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0{,}8}{1{,}64} = 0{,}488$$

Empirischer Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0} = \frac{0{,}961}{1{,}471} = 0{,}653$$

Der theoretische Autokorrelationskoeffizient ρ_1 wird hier durch den empirischen Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_1$ etwas überschätzt. Mit zunehmendem Stichprobenumfang ist eine zunehmende Verringerung des „small sample bias“ zu erwarten.

Aufgabe 3.16

Die Prozessgleichung eines MA(1)-Prozesses lautet

$$X_t = 0{,}5 \cdot U_{t-1} + U_t.$$

U_t ist eine White-Noise-Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 2.

a) Bestimmen Sie die Varianz des MA(1)-Prozesses aus der Prozessgleichung!

Lösung

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \mathrm{Var}(X_t) = E(X_t^2) = E([(0{,}5 \cdot U_{t-1} + U_t)^2] \\ &= 0{,}5^2 \cdot E(U_{t-1}^2) + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot \underbrace{E(U_{t-1}U_t)}_{=0} + E(U_t^2) \\ &= 0{,}25 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 = 1{,}25 \cdot \sigma^2\end{aligned}$$

mit $\sigma^2 = 2$: $\gamma_0 = 1{,}25 \cdot (\sigma^2 = 2) = 2{,}5$

b) Leiten Sie die Autokovarianz 1. Ordnung aus der Prozessgleichung ab! Welchen Wert nimmt sie hier an!

Lösung

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = E(X_t X_{t-1}) \\ &= E[(0{,}5 \cdot U_{t-1} + U_t)(0{,}5 \cdot U_{t-2} + U_{t-1})] \\ &= 0{,}5^2 \cdot \underbrace{E(U_{t-1}U_{t-2})}_{=0} + 0{,}5 \cdot E(U_{t-1}^2) + 0{,}5 \cdot \underbrace{E(U_t U_{t-2})}_{=0} + \underbrace{E(U_t U_{t-1})}_{=0} \\ &= 0{,}5 \cdot \sigma^2\end{aligned}$$

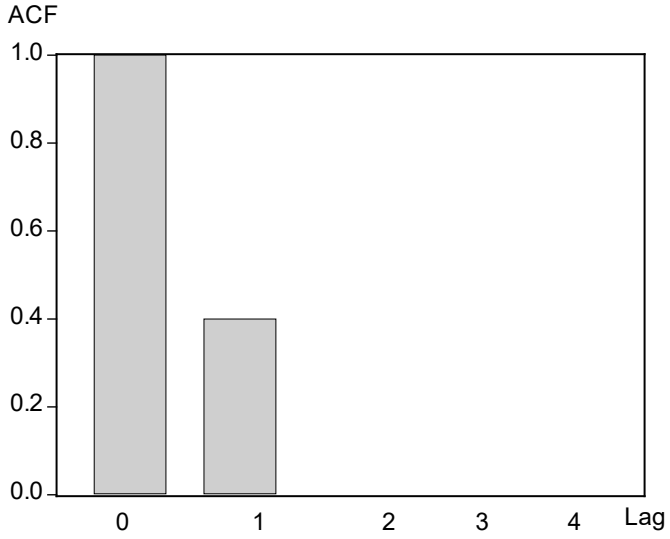
mit $\sigma^2 = 2$: $\gamma_1 = 0{,}5 \cdot (\sigma^2 = 2) = 1$

c) Zeichnen Sie das Korrelogramm mit den Autokorrelationskoeffizienten bis zur 4. Ordnung!

Lösung

$$\tau = 1: \quad \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$$

τ=2 bis 4: $\rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$, da die Autokorrelationsfunktion eines MA(1)-Prozesses nach einem Lag von τ=1 abbricht



d) Berechnen Sie die partiellen Autokorrelationskoeffizienten bis zur 4. Ordnung und stellen Sie sie in Form eines Korrelogramms grafisch dar!

Lösung

Parameter: θ_1 = -0,5

τ=1: $$\phi_{11} = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{-(-0{,}5)}{1+(-0{,}5)^2} = \frac{0{,}5}{1{,}25} = 0{,}4\ (=\rho_1)$$

τ=2: $$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4} = \frac{-0{,}5^2}{1+0{,}5^2+0{,}5^4} = \frac{-0{,}25}{1+0{,}025+0{,}0625} = -\frac{0{,}25}{1{,}3125} = -0{,}190$$

oder

$$\phi_{22} == \frac{-\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6} = \frac{-0{,}5^2(1-0{,}5^2)}{1-0{,}5^6} = \frac{-0{,}25\cdot 0{,}75}{1-0{,}0156} = -\frac{0{,}1875}{0{,}9844} = -0{,}190$$

τ=3:

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6} = \frac{-(-0{,}5)^3}{1+0{,}5^2+0{,}5^4+0{,}5^6} = \frac{0{,}125}{1{,}3281} = 0{,}094$$

oder

$$\phi_{33} = \frac{-\theta_1^3(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^8} = \frac{-(-0{,}5)^3(1-0{,}5^2)}{1-0{,}5^8} = \frac{0{,}125\cdot 0{,}75}{1-0{,}0039} = \frac{0{,}0938}{0{,}9961} = 0{,}094$$

τ=4:

$$\phi_{44} = \frac{-\theta_1^4}{1+\theta_1^2+\theta_1^4+\theta_1^6+\theta_1^8} = \frac{-(-0{,}5)^4}{1+0{,}5^2+0{,}5^4+0{,}5^6+0{,}5^8} = -\frac{0{,}0625}{1{,}3320} = -0{,}047$$

oder

$$\phi_{44} = \frac{-\theta_1^4(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(4+1)}} = \frac{-(-0{,}5)^4(1-0{,}5^2)}{1-0{,}5^{10}} = \frac{-0{,}0625\cdot 0{,}75}{1-0{,}0010} = -\frac{0{,}0469}{0{,}9990} = -0{,}047$$

Aufgabe 3.17

Die Prozessgleichung eines MA(2)-Prozesses lautet

$X_t = U_t + 0{,}8\cdot U_{t-1} - 0{,}2\cdot U_{t-2}$.

a) Geben Sie die Lag-Polynom-Darstellung des MA(2)-Prozesses an!

Lösung

$X_t = U_t + 0{,}8\cdot U_{t-1} - 0{,}2\cdot U_{t-2}$

$X_t = U_t + 0{,}8\cdot B\cdot U_t - 0{,}2\cdot B^2\cdot U_t$

$$X_t = \underbrace{(1+0{,}8\cdot B-0{,}2\cdot B^2)}_{=\theta(B)}\cdot U_t$$

b) Welches Korrelogramm hat der MA(2)-Prozess?

Lösung

Koeffizienten der MA-Terme: $\theta_1 = -0{,}8$ und $\theta_2 = 0{,}2$

Prozessvarianz:

$$\gamma_0 = \sigma_u^2\cdot(1+\theta_1^2+\theta_2^2) = \sigma_u^2\cdot[1+(-0{,}8)^2+0{,}2^2) = \sigma_u^2\cdot(1+0{,}64+0{,}04) = 1{,}68\cdot\sigma_u^2$$

Autokovarianz 1. Ordnung:

$$\gamma_1 = \sigma_u^2\cdot(-\theta_1+\theta_1\cdot\theta_2) = \sigma_u^2\cdot[-(-0{,}8)+(-0{,}8)\cdot 0{,}2] = \sigma_u^2\cdot(0{,}8-0{,}16) = 0{,}64\cdot\sigma_u^2$$

Autokovarianz 2. Ordnung:

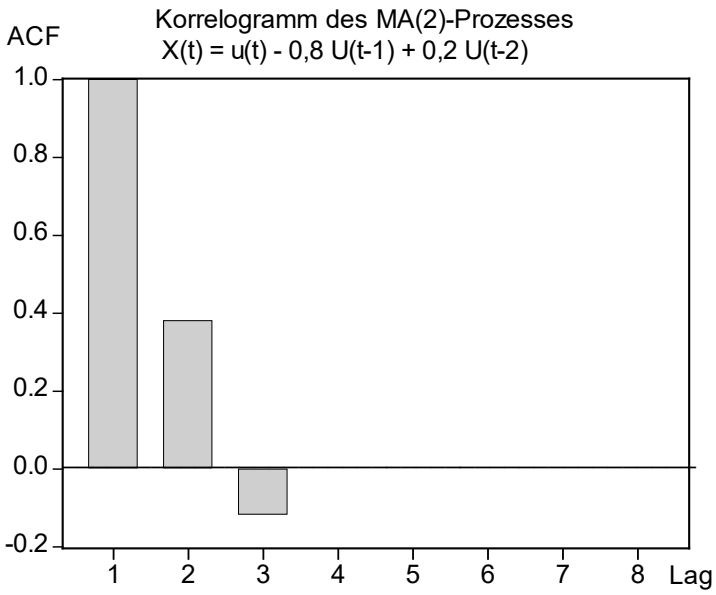
$$\gamma_2 = -\theta_2\cdot\sigma_u^2 = -0{,}2\cdot\sigma_u^2$$

Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{0{,}64\cdot\sigma_u^2}{1{,}68\cdot\sigma_u^2} = 0{,}381$$

Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-0{,}2 \cdot \sigma_u^2}{1{,}68 \cdot \sigma_u^2} = -0{,}119$$



Aufgabe 3.18

Es sei (U_t) ein White-Noise-Prozess mit dem Erwartungswert 0.

a) Leiten Sie die Autokorrelationsfunktion des MA-Prozesses $X_t = U_t + \frac{1}{3} \cdot U_{t-1}$ her!

Lösung

Prozessvarianz:

$$\gamma_0 = \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(U_t + \frac{1}{3} \cdot U_{t-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ U_t \text{ und } U_{t-1} \\ \text{unkorr.}}}{=} \mathrm{Var}(U_t) + \mathrm{Var}(\frac{1}{3} \cdot U_{t-1})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstante} \\ \text{Varianz}}}{=} \sigma_u^2 + \frac{1}{9} \cdot \sigma_u^2 = 1\frac{1}{9} \cdot \sigma_u^2$$

Autokovarianz 1. Ordnung:

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(U_t + \frac{1}{3} \cdot U_{t-1}, U_{t-1} + \frac{1}{3} \cdot U_{t-2})$$

$$= \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-1}) + \mathrm{Cov}(U_t, \frac{1}{3} \cdot U_{t-2}) + \mathrm{Cov}(\frac{1}{3} \cdot U_{t-1}, U_{t-1}) + \mathrm{Cov}(\frac{1}{3} \cdot U_{t-1}, \frac{1}{3} \cdot U_{t-2})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen } \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-\tau})=0 \text{ für } \tau>0}}{=} \mathrm{Cov}(\frac{1}{3} \cdot U_{t-1}, U_{t-1}) = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Var}(U_{t-1}) = \frac{1}{3} \cdot \sigma_u^2$$

Autokovarianz höherer als 1. Ordnung:

$$\gamma_\tau = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-\tau}) = \mathrm{Cov}(U_t + \frac{1}{3}\cdot U_{t-1}, U_{t-\tau} + \frac{1}{3}\cdot U_{t-\tau-1}) = 0 \quad \text{für } \tau > 1$$

$$\text{wegen} \quad \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-\tau}) = 0 \quad \text{für } \tau > 0$$

Autokorrelationsfunktion: $\rho_\tau = \gamma_\tau / \gamma_0$:

$$\rho_\tau = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ \dfrac{\sigma_u^2/3}{10\cdot\sigma_u^2/9} = \dfrac{9}{30} = 0{,}3 & \text{für } \tau = 1 \\ 0 & \text{für } \tau > 1 \end{cases}$$

b) Welche Autokorrelationsfunktion hat der MA-Prozess $X_t = U_t + 3\cdot U_{t-1}$?

Lösung

Prozessvarianz:

$$\gamma_0 = \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(U_t + 3\cdot U_{t-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ U_t \text{ und } U_{t-1} \\ \text{unkorr.}}}{=} \mathrm{Var}(U_t) + \mathrm{Var}(3\cdot U_{t-1})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstante} \\ \text{Varianz}}}{=} \sigma_u^2 + 9\cdot\sigma_u^2 = 10\cdot\sigma_u^2$$

Autokovarianz 1. Ordnung:

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(U_t + 3\cdot U_{t-1}, U_{t-1} + 3\cdot U_{t-2})$$

$$= \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-1}) + \mathrm{Cov}(U_t, 3\cdot U_{t-2}) + \mathrm{Cov}(3\cdot U_{t-1}, U_{t-1}) + \mathrm{Cov}(3\cdot U_{t-1}, 3\cdot U_{t-2})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen } \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-\tau})=0 \text{ für } \tau>0}}{=} \mathrm{Cov}(3\cdot U_{t-1}, U_{t-1}) = 3\cdot\mathrm{Var}(U_{t-1}) = 3\cdot\sigma_u^2$$

Autokovarianz höherer als 1. Ordnung:

$$\gamma_\tau = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-\tau}) = \mathrm{Cov}(U_t + 3\cdot U_{t-1}, U_{t-\tau} + 3\cdot U_{t-\tau-1}) = 0 \quad \text{für } \tau > 1$$

$$\text{wegen} \quad \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-\tau}) = 0 \quad \text{für } \tau > 0$$

Autokorrelationsfunktion: $\rho_\tau = \gamma_\tau / \gamma_0$:

$$\rho_\tau = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau = 0 \\ \dfrac{3\cdot\sigma_u^2}{10\cdot\sigma_u^2} = 0{,}3 & \text{für } \tau = 1 \\ 0 & \text{für } \tau > 1 \end{cases}$$

c) Welche Konsequenzen ergeben sich aus den Ergebnissen der Teile a) und b) im Hinblick auf die Identifizierbarkeit der beiden MA(1)-Modelle?

Lösung

Da beide MA(1)-Modelle dieselbe Autokorrelationsfunktion besitzen, sind sie anhand eines Korrelogramms nicht eindeutig identifizierbar.

Eine eindeutige Identifikation des MA(1)-Prozesses erfolgt hier unter Verwendung des Kriteriums der Invertierbarkeit. Ein MA(1)-Prozess lässt sich in einen stationären AR(∞)-Prozess überführen, wenn die Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$\theta(z) = 1 - \theta_1 \cdot z$$

außerhalb des Einheitskreises liegt.

Für das MA(1)-Modell in Teil a) erhält man mit $\theta_1 = -\frac{1}{3}$

$$1 - (\theta_1 = -\frac{1}{3}) \cdot z = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot z = -1$$

$$z = -3.$$

Mit $\theta_1 = -3$ folgt aus dem MA(1)-Modell aus Teil b)

$$1 - (\theta_1 = -3) \cdot z = 0$$

$$3 \cdot z = -1$$

$$z = -\frac{1}{3}.$$

Während die Wurzel des zum MA(1)-Modells b) gehörenden charakteristischen Polynoms absolut kleiner als 1 ist, erfüllt das Modell a) die Invertierbarkeitsbedingung. Damit das MA(1)-Modell a) eindeutig als in Frage kommender MA-Prozess identifiziert.

Aufgabe 3.19

Gegeben ist der stochastische Prozess

$$X_t = 2 + U_t - 0{,}8 \cdot U_{t-1} + 0{,}6 \cdot U_{t-2}$$

worin die Störvariable einem White-Noise-Prozess mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 4 folgt.

a) Was für ein stochastischer Prozess liegt hier vor? Geben Sie die autoregressiven Koeffizienten des Prozesses an!

Lösung

Der gegebene Prozess ist ein MA(2)-Prozess, der die autoregressiven Koeffizienten

$$\theta_1 = 0{,}8 \quad \text{und} \quad \theta_2 = -0{,}6$$

besitzt.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz aus der Prozessgleichung!

Lösung

- Prozessmittelwert

$$E(X_t) = E(2 + U_t - 0{,}8 \cdot U_{t-1} + 0{,}6 \cdot U_{t-2})$$
$$= 2 + \underbrace{E(U_t)}_{=0} - 0{,}8 \cdot \underbrace{E(U_{t-1})}_{=0} + 0{,}6 \cdot \underbrace{E(U_{t-2})}_{=0} = \underline{2}$$

- Prozessvarianz

$$Var(X_t) = Var(2 + U_t - 0{,}8 \cdot U_{t-1} + 0{,}6 \cdot U_{t-2})$$
$$= Var(U_t - 0{,}8 \cdot U_{t-1} + 0{,}6 \cdot U_{t-2})$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Unkorrel.}}}{=} \underbrace{Var(U_t)}_{=4} - 0{,}8^2 \cdot \underbrace{Var(U_{t-1})}_{=4} + 0{,}6^2 \cdot \underbrace{Var(U_{t-2})}_{=4}$$
$$= 4 + 0{,}64 \cdot 4 + 0{,}36 \cdot 4 = \underline{8}$$

c) Welche Wurzeln hat die charakteristische Gleichung? Welche Aussagen lassen sich über die Stationarität und der Invertierbarkeit des Prozesses treffen?

Lösung

- Charakteristische Gleichung

$$1 - 0{,}8 \cdot z + 0{,}6 \cdot z^2 = 0$$

$$z^2 - \frac{0{,}8}{0{,}6} \cdot z + \frac{1}{0{,}6} = 0 \qquad \text{(Normalform)}$$

$$z^2 \underbrace{- 1\frac{1}{3}}_{=a} \cdot z + \underbrace{1\frac{2}{3}}_{=b} = 0$$

Lösung: $z_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = -\frac{-4/3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4/3}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}}$

$$= \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{15}{9}} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{-\frac{11}{9}}$$

$$= 0{,}667 \pm 1{,}106 \cdot \sqrt{-1} = 0{,}667 \pm 1{,}106 \cdot i$$

$z_1 = 0{,}667 + 1{,}106 \cdot i$ und $z_2 = 0{,}667 - 1{,}106 \cdot i$

(konjugiert-komplexe Wurzeln)

MA-Prozesse sind stets stationär, jedoch müssen sie nicht invertierbar sein. Damit ein MA-Prozess invertierbar ist, d.h. in einen AR-Prozess transformiert werden kann, müssen seine Wurzeln außerhalb des Einheitskreises liegen. Bei konjugiert-komplexen Wurzeln,

$$z_{1/2} = c \pm d \cdot i$$

ist hierzu der Modul (Betrag) r,

$$r = \sqrt{c^2 + d^2}\ ,$$

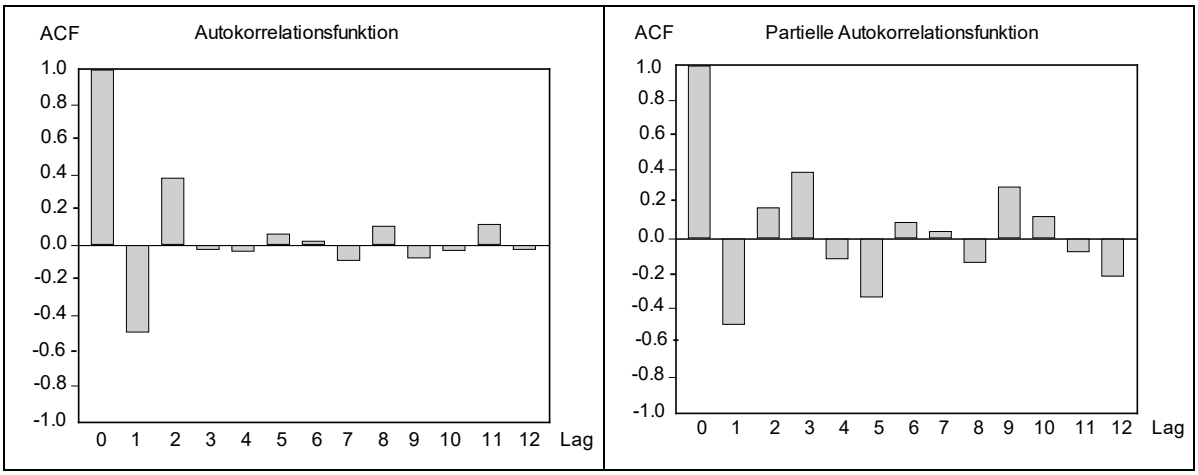
zu bestimmen:

$$r = \sqrt{0{,}667^2 + 1{,}106^2} = \sqrt{1{,}668} = 1{,}292$$

Da der Modul r größer als 1 ist, liegen die Wurzeln außerhalb des Einheitskreises, so dass der hier gegebene MA(2)-Prozess t invertierbar ist.

Aufgabe 3.20

Gegeben sind die empirischen Autokorrelationsfunktion (ACF) und partielle Autokorrelationsfunktion (PACF) eines ARMA-Prozesses (n=100):



Identifizieren Sie den zugrunde liegenden ARMA-Prozess anhand der Verläufe der ACF und PACF!

Hinweis: Es handelt sich hierbei um keinen gemischten ARMA-Prozess, sondern einen reinen AR- oder MA-Prozess!

Lösung:

● Ermittlung der signifikanten Autokorrelationen und partiellen Autokorrelationen

Approximatives 95%-Konfidenzintervall für r_τ und $\phi_{\tau\tau}$:

$$-\left[2 \cdot \sqrt{1/n};\quad 2 \cdot \sqrt{1/n}\right] = \left[-2 \cdot \sqrt{1/100};\quad 2 \cdot \sqrt{1/100}\right] = \left[-2 \cdot 0{,}1;\quad 2 \cdot 0{,}1\right] = \left[-0{,}2;\quad 0{,}2\right]$$

Signifikante Autokorrelationen (r_τ außerhalb des Konfidenzintervalls):

$$r_1 \approx -0{,}5,\ \ r_2 \approx 0{,}4,$$

Signifikante partielle Autokorrelationen ($\phi_{\tau\tau}$ außerhalb des Konfidenzintervalls):

$$\phi_{11} \approx -0{,}5,\ \ \phi_{33} \approx 0{,}4,\ \phi_{55} \approx -0{,}4,\ \phi_{99} \approx 0{,}3,\ \phi_{12,12} \approx -0{,}25$$

● Interpretation der Verläufe der ACF und PACF

Die ACF bricht nach einem Lag von 2 abbricht, d.h. für $\tau > 2$ treten nur noch nicht-signifikant von 0 verschiedene r_τ-Werte auf.

Dagegen ist kein Abbruch der PACF bei einem kleinen Lag festzustellen. Vielmehr verläuft die PACF mit gedämpften Schwingungen, wobei auch bei hohen Lags noch signifikante $\phi_{\tau\tau}$-Werte auftreten.

→ Dies sind genau die Kennzeichen eines MA(2)-Prozesses (≙ ARMA(0,2)-Prozess). Die ACF eines MA(2)-Prozesses bricht nach einem Lag von 2 ab, während die PACF bei Invertabilität exponentiell abnehmend oder in gedämpften Schwingungen verläuft.

Aufgab 3.21

Gegeben ist die Prozessgleichung eines AR(1)-Prozesses:

$$x_t = \delta + \phi_1 \cdot x_{t-1} + u_t.$$

U_t ist eine White-Noise-Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz σ^2.

a) Geben Sie die h-Schritt-Prognose $\hat{x}_t(h)$ des AR(1)-Prozesses in Abhängig-keit vom letzten bekannten Beobachtungswert x_t an! Gegen welchen Wert strebt die Prognose bei wachsendem Prognosehorizont?

Lösung

Setzt man in die Prognosegleichung des AR(1)-Prozesses,

(1) $\hat{x}_t(h) = \delta + \phi_1 \cdot \hat{x}_t(h-1)$,

für h=1,

$$\hat{x}_t(1) = \delta + \phi_1 \cdot \hat{x}_t(0),$$

$\hat{x}_t(0) = x_t$ (x_t ist zur Zeit t bereits bekannt), erhält man

(2) $\hat{x}_t(1) = \delta + \phi_1 \cdot x_t$.

Substituiert man $\hat{x}_t(1)$ in der Zwei-Schritt-Prognose (h=2),

$$\hat{x}_t(2) = \delta + \phi_1 \cdot \hat{x}_t(1)$$

durch (2), ergibt sich

$$\hat{x}_t(2) = \delta + \phi_1 \cdot (\delta + \phi_1 \cdot x_t) = \delta + \phi_1 \cdot \delta + \phi_1^2 \cdot x_t.$$

Bei fortlaufender Substitution erhält man

$$\hat{x}_t(h) = \delta + \phi_1 \cdot \delta + \ldots + \phi_1^{h-1}\delta + \cdot\phi_1^h \cdot x_t$$
$$= (1 + \phi_1 + \ldots + \phi_1^{h-1}) \cdot \delta + \cdot\phi_1^h \cdot x_t$$

und unter Verwendung der Summenformel einer geometrischen Reihe

(3) $$\hat{x}_t(h) = \frac{1-\phi_1^h}{1-\phi_1}\delta + \phi_1^h \cdot x_t = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \phi_1^h \cdot (x_t - \frac{\delta}{1-\phi_1}).$$

(3) gibt die h-Schritt-Prognose $\hat{x}_t(h)$ in Abhängigkeit von x_t an.

Da der Term $\delta/(1-\phi_1)$ dem Prozessmittelwert μ entspricht, folgt

$$\hat{x}_t(h) = \mu + \phi_1^h \cdot (x_t - \mu),$$

so dass man bei über alle Grenzen wachsendem Prognosehorizont h, $h\to\infty$, den Grenzwert

(4) $$\lim_{h\to\infty} \hat{x}_t(h) = \mu$$

erhält. Bei wachsendem Prognosehorizont strebt die h-Schritt-Prognose somit gegen den Prozessmittelwert μ.

b) Wie lautet die Varianz des Prognosefehlers $f_t(h)$? Gegen welchen Ausdruck strebt sie?

Lösung

h-Schritt-Prognosefehler:

(5) $$f_t(h) = x_{t+h} - \hat{x}_t(h)$$

<u>h=1:</u>

$$f_t(1) = x_{t+1} - \hat{x}_t(1)$$
$$= (\delta + \phi_1 \cdot x_t + u_{t+1}) - (\delta + \phi_1 \cdot x_t) = u_{t+1}$$

$$\mathrm{Var}(f_t(1)) = \mathrm{Var}(u_{t+1}) = \sigma^2$$

<u>h=2:</u>

$$f_t(2) = x_{t+2} - \hat{x}_t(2)$$
$$= (\delta + \phi_1 \cdot x_{t+1} + u_t) - (\delta + \phi_1 \cdot \delta + \phi_1^2 \cdot x_t)$$
$$= [\delta + \phi_1 \cdot (\delta + \phi_1 \cdot x_t + u_{t+1}) + u_{t+2}] - (\delta + \phi_1 \cdot \delta + \phi_1^2 \cdot x_t)$$
$$= (\delta + \phi_1 \cdot \delta + \phi_1^2 \cdot x_t + \phi_1 \cdot u_{t+1}) + u_{t+2}] - (\delta + \phi_1 \cdot \delta + \phi_1^2 \cdot x_t)$$
$$= u_{t+2} + \phi_1 \cdot u_{t+1}$$

$$\mathrm{Var}(f_t(2)) = \mathrm{Var}(u_{t+2} + \phi_1 \cdot u_{t+1}) = \sigma^2 + \phi_1^2 \cdot \sigma^2 = (1 + \phi_1^2) \cdot \sigma^2$$

Allgemein ist der Prognosefehler $f_t(h)$ durch

$$
\begin{aligned}
f_t(h) &= x_{t+h} - \hat{x}_t(h) \\
&= [(1 + \phi_1 + \ldots + \phi_1^{h-1}) \cdot \delta + \cdot\phi_1^h \cdot x_t + (u_{t+h} + \phi_1 \cdot u_{t+h-1} + \ldots + \phi_1^{h-1} \cdot u_{t+1})] \\
&\quad - [(1 + \phi_1 + \ldots + \phi_1^{h-1}) \cdot \delta + \cdot\phi_1^h \cdot x_t] \\
&= u_{t+h} + \phi_1 \cdot u_{t+h-1} + \ldots + \phi_1^{h-1} \cdot u_{t+1} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

gegeben. Für die Varianz des Prognosefehlers $f_t(h)$ erhält man aus (6)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(f_t(h)) &= \mathrm{Var}(u_{t+h} + \phi_1 \cdot u_{t+h-1} + \ldots + \phi_1^{h-1} \cdot u_{t+1}) \\
&= \sigma^2 + \phi_1^2 \cdot \sigma^2 + \phi_1^4 \cdot \sigma^2 + \ldots + \phi_1^{2\cdot(h-1)} \cdot \sigma^2 \\
&= (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots + \phi_1^{2\cdot(h-1)}) \cdot \sigma^2
\end{aligned}
$$

Da der Ausdruck $(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \ldots + \phi_1^{2\cdot(h-1)})$ eine endliche geometrische Rei-he darstellt, ist die Varianz des Prognosefehlers $f_t(h)$ der h-Schritt-Prognose schließlich durch

$$
(7) \quad \mathrm{Var}(f_t(h)) = \frac{1 - \phi_1^{2h}}{1 - \phi_1^2} \cdot \sigma^2
$$

gegeben.

Bei über alle Grenzen wachsendem Prognosehorizont h, $h \to \infty$, strebt die Vari-anz des Prognosefehlers $f_t(h)$ gegen den Wert

$$
(8) \quad \lim_{h \to \infty} \mathrm{Var}(f_t(h)) = \frac{1}{1 - \phi_1^2} \cdot \sigma^2 .
$$

erhält. Bei wachsendem Prognosehorizont strebt die Varianz der h-Schritt-Prognose somit gegen die Varianz γ_0 des AR(1)-Prozesses.

c) In den ersten vier Perioden liegen die Werte der Störgröße U bei σ^2=4 vor: u_1 = 1,7208, u_2 = 0,9254, u_3 = -1,4668, u_4 = -0,9576.
Stellen Sie Realisationen und Prognosen des AR(1)-Prozesses mit δ= -0,2 und ϕ_1=0,8 bei x_0=-0,4102 für die Perioden 1 bis 8 zusammen mit dem 95%-Prognoseintervall in einem Zeitreihendiagramm dar!

Lösung

• Realisationen des AR(1)-Prozesses in t=1,2,3,4:

x_1 = -0,2 + 0,8·(x_0 = -0,4102) + (u_1 = 1.7208) = 1,1926

x_2 = -0,2 + 0,8·(x_1 = 1,1926) + (u_2 = 0,9254) = 1,6795

x_3 = -0,2 + 0,8·(x_2 = 1,6795) + (u_3 = -1,4668) = -0,3232

x_4 = -0,2 + 0,8·(x_3 = -0,3232) + (u_4 = -0,9576) = -1,4162

• Prognosegleichung des AR(1)-Prozesses:

$$\hat{x}_t(h) = (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot \hat{x}_t(h-1)$$

• Prognosen des AR(1)-Prozesses in t=5,6,7,8:

h=1: $$\hat{x}_4(1) = (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot \hat{x}_4(0)$$
$$= (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot (x_4 = -1{,}4162) = -1{,}3330$$

h=2: $$\hat{x}_4(2) = (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot (\hat{x}_4(1) = -1{,}3330) = -1{,}2664$$

h=3: $$\hat{x}_4(3) = (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot (\hat{x}_4(2) = -1{,}2664) = -1{,}2131$$

h=4: $$\hat{x}_4(4) = (\delta = -0.2) + (\phi_1 = 0{,}8) \cdot (\hat{x}_4(3) = -1{,}2131) = -1{,}1705$$

• Varianz des Prognosefehlers:

h=1: $$\mathrm{Var}(f_4(1)) = \mathrm{Var}(u_5) = \sigma^2 = 4$$

h=2: $$\mathrm{Var}(f_4(2)) = \mathrm{Var}(u_6 + 0{,}8 \cdot u_5) = (1 + 0{,}8^2) \cdot \sigma^2 = 1{,}64 \cdot 4 = 6{,}56$$

h=3: $$\mathrm{Var}(f_4(3)) = \mathrm{Var}(u_7 + 0{,}8 \cdot u_6 + 0{,}8^2 \cdot u_5)$$
$$= (1 + 0{,}8^2 + 0{,}8^4) \cdot \sigma^2 = 2{,}0496 \cdot 4 = 8{,}1984$$

h=4: $$\mathrm{Var}(f_4(4)) = \mathrm{Var}(u_8 + 0{,}8 \cdot u_7 + 0{,}8^2 \cdot u_6 + 0{,}8^3 \cdot u_5)$$
$$= (1 + 0{,}8^2 + 0{,}8^4 + 0{,}8^6) \cdot \sigma^2 = 2{,}2174 \cdot 4 = 8{,}8695$$

• 95%-Prognoseintervall der h-Schritt-Prognose:

$$\hat{X}_t(h) \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(f_t(h)}$$

h=1: $\hat{X}_4(1) \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(f_4(1)} = -1{,}3330 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{4} = -1{,}3330 \pm 1{,}96 \cdot 2$

$= -1{,}3330 \pm 3{,}92$ → [-5,253; 2,587]

h=2: $\hat{X}_4(2) \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(f_4(2)} = -1{,}2664 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{6{,}56}$

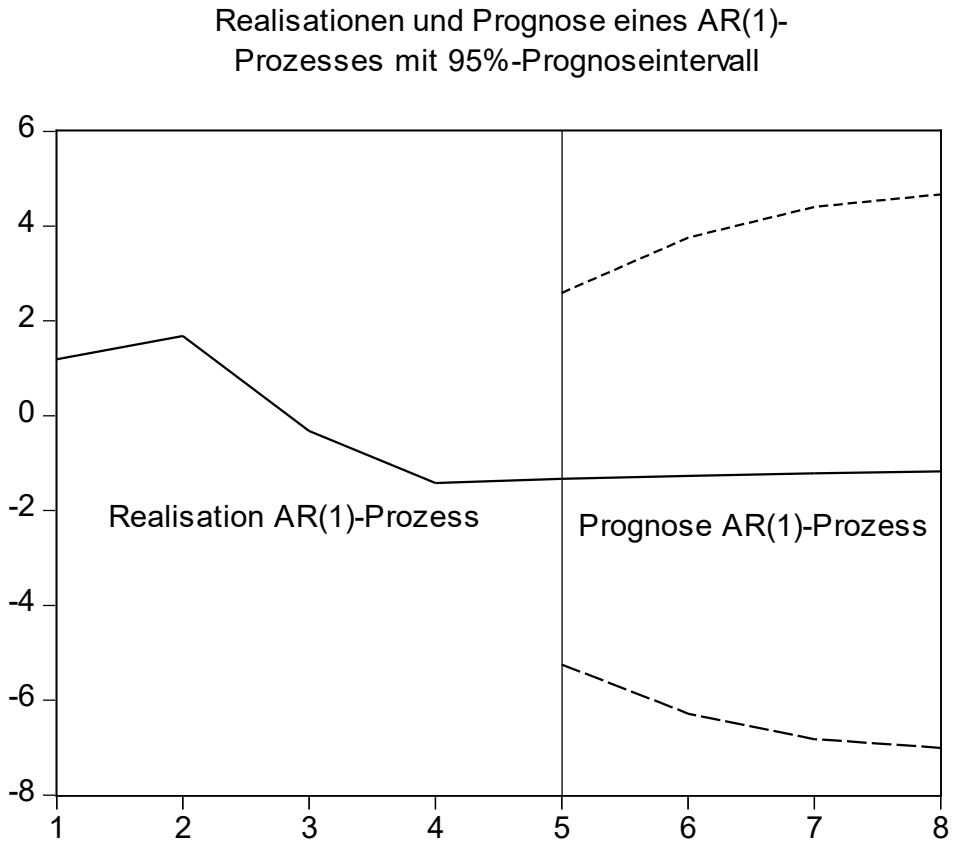
$= -1{,}2664 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}5612 = -1{,}2664 \pm 5{,}0200$ → [-6,2864; 3,7536]

h=3: $\hat{X}_4(3) \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(f_4(3)} = -1{,}2131 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{8{,}1984}$

$= -1{,}2131 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}8633 = -1{,}2131 \pm 5{,}6121$ → [-6,8252; 4,3990]

h=4: $\hat{X}_4(4) \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(f_4(4)} = -1{,}1705 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{8{,}8695}$

$= -1{,}1705 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}9782 = -1{,}1705 \pm 5{,}8373$ → [-7,0078; 4,6668]



Aufgabe 3.22

Gegeben ist die Prozessgleichung eines MA(1)-Prozesses

$$X_t = \mu + U_t - \theta_1 \cdot U_{t-1}$$

mit $\theta_1 = 0{,}7$. U_t ist eine White-Noise-Zufallsvariable mit einem Erwartungswert 0 und der Varianz σ^2.

a) Leiten Sie die Autokorrelationskoeffizienten 1. und 2. Ordnung des MA(1)-Prozesses her!

Lösung

Varianz des MA(1)-Prozesses:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(\mu + U_t - 0{,}7 \cdot U_t) = \mathrm{Var}(\mu) + \mathrm{Var}(U_t) + 0{,}7 \cdot \mathrm{Var}(U_{t-1}) \\ &= 0 + \mathrm{Var}(U_t) + 0{,}49 \cdot \mathrm{Var}(U_{t-1}) = \sigma^2 + 0{,}49 \cdot \sigma^2 = 1{,}49 \cdot \sigma^2\end{aligned}$$

Autokovarianz 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\mu + U_t - 0{,}7 \cdot U_{t-1},\ \mu + U_{t-1} - 0{,}7 \cdot U_{t-2}) \\ &= \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-1}) - 0{,}7 \cdot \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-2}) - 0{,}7 \cdot \mathrm{Cov}(U_{t-1}, U_{t-1}) + 0{,}7^2 \cdot \mathrm{Cov}(U_{t-1}, U_{t-2}) \\ &= -0{,}7 \cdot \mathrm{Var}(U_{t-1}) = -0{,}7 \cdot \sigma^2\end{aligned}$$

Autokovarianz 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-2}) = \mathrm{Cov}(\mu + U_t - 0{,}7 \cdot U_{t-1},\ \mu + U_{t-2} - 0{,}7 \cdot U_{t-3}) \\ &= \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-2}) - 0{,}7 \cdot \mathrm{Cov}(U_t, U_{t-3}) - 0{,}7 \cdot \mathrm{Cov}(U_{t-1}, U_{t-2}) + 0{,}7^2 \cdot \mathrm{Cov}(U_{t-1}, U_{t-3}) = 0\end{aligned}$$

Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-0{,}7 \cdot \sigma^2}{1{,}49 \cdot \sigma^2} = -\frac{0{,}7}{1{,}49} = -0{,}470$$

Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung:

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{0}{1{,}49 \cdot \sigma^2} = 0$$

b) Wie groß sind die partiellen Autokorrelationskoeffizienten 1. und 2. Ordnung? Wie lassen sie sich interpretieren?

Lösung

Partieller Autokorrelationskoeffizient 1. Ordnung:

$$\phi_{11} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-0{,}7}{1 + 0{,}7^2} = -\frac{0{,}7}{1{,}49} = -0{,}470$$

Partieller Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung:

$$\phi_{22} = \frac{-\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4} = \frac{-0{,}7^2}{1+0{,}7^2+0{,}7^4} = -\frac{0{,}49}{1+0{,}49+0{,}240} = -\frac{0{,}49}{1{,}730} = -0{,}283$$

c) Prüfen Sie, ob der MA(1)-Prozess invertierbar ist! Was versteht man unter Invertierbarkeit?

Lösung

Charakteristische Gleichung:

$$1-\theta_1 \cdot z \overset{!}{=} 0$$
$$1-0{,}7 \cdot z = 0$$
$$0{,}7 \cdot z = 1$$
$$z = \frac{1}{0{,}7} = 1{,}4286$$

Da die Wurzel des charakteristischen Polynoms außerhalb des Einheitskreises liegt, d.h. bei rellen Wurzeln größer als 1 ist, ist der MA(1)-Prozess invertierbar.

d) Erläutern Sie anhand der AR-Darstellung des MA(1)-Prozesses in Abhängigkeit von X_{t-1} und X_{t-2}, dass die Autokorrelationsfunktion (ACF) nicht nach dem Lag 1 abbricht!

Lösung

Prozessgleichung des MA(1)-Prozesses:

$X_t = \mu + U_t - 0{,}7 \cdot U_{t-1}$

$U_{t-1} = X_{t-1} - \mu + 0{,}7 \cdot U_{t-2}$

$X_t = \mu + U_t - 0{,}7 \cdot (X_{t-1} - \mu + 0{,}7 \cdot U_{t-2})$

$\quad = (1 + 0{,}7) \cdot \mu - 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}7^2 \cdot U_{t-2} + U_t$

$U_{t-2} = X_{t-2} - \mu + 0{,}7 \cdot U_{t-3}$

$X_t = (1 + 0{,}7) \cdot \mu - 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}7^2 \cdot (X_{t-2} - \mu + 0{,}7 \cdot U_{t-3})$

$\quad = (1 + 0{,}7 + 0{,}49) \cdot \mu - 0{,}7 \cdot X_{t-1} - 0{,}49 \cdot X_{t-2} - 0{,}7^3 \cdot U_{t-3} + U_t$

Da der Regressionskoeffizient von X_{t-2} ungleich Null ist, ist X_t mit X_{t-2} nach Ausschaltung des Einflusses der intervenierenden Größe X_{t-1} korreliert. Aus diesem Grund verschwindet der partielle Autokorrelationskoeffizient 2. Ordnung nicht, d.h. die partielle Autokorrelationsfunktion bricht nicht nach dem Lag 1 ab.

e) Geben Sie die Prognosefehler von Prognosen mit dem MA(1)-Modell für die

- Ein-Schritt-Prognose (h=1),
- Zwei-Schritt-Prognose (h=2)

mit den zugehörigen Varianzen an!

Lösung

- Ein-Schritt-Prognose (h=1)

Prozessgleichung für Prognose in t für h=1:

$X_{t+1} = \mu + U_{t+1} - 0{,}7 \cdot U_t$

Bedingter Erwartungswert für h=1:

$$\begin{aligned} E_t(X_{t+1}) &= E_t(\mu + U_{t+1} - 0{,}7 \cdot U_t) \\ &= \mu + E_t(U_{t+1}) - 0{,}7 \cdot E_t(U_t) \\ &= \mu + 0 - 0{,}7 \cdot E_t(U_t) = \mu - 0{,}7 \cdot E_t(U_t) \end{aligned}$$

Prognosefunktion für h=1:

$\cdot \hat{X}_t(1) = \mu + 0{,}7 \cdot U_t$

Prognosefehler für h=1:

$f_t(1) = X_{t+1} - \hat{X}_t(1) = \mu + U_{t+1} - 0{,}7 \cdot U_t - (\mu - 0{,}7 \cdot U_t) = U_{t+1}$

Varianz des Prognosefehlers:

$Var(f_t(1)) = Var(X_{t+1} - \hat{X}_t(1)) = Var(U_{t+1}) = \sigma^2$

- Zwei-Schritt-Prognose (h=2)

Prozessgleichung für Prognose in t für h=2:

$X_{t+2} = \mu + U_{t+2} - 0{,}7 \cdot U_{t+1}$

Bedingter Erwartungswert für h=2:

$$\begin{aligned} E_t(X_{t+2}) &= E_t(\mu + U_{t+2} - 0{,}7 \cdot U_{t+1}) \\ &= \mu + E_t(U_{t+2}) - 0{,}7 \cdot E_t(U_{t+1}) = \mu \end{aligned}$$

Prognosefunktion für h=2:

$\cdot \hat{X}_t(2) = \mu$

Prognosefehler für h=2:

$$f_t(2) = X_{t+2} - \hat{X}_t(2) = \mu + U_{t+2} - 0{,}7 \cdot U_{t+1} - \mu$$
$$= U_{t+2} - 0{,}7 \cdot U_{t+1}$$

Varianz des Prognosefehlers:

$$\mathrm{Var}(f_t(2)) = \mathrm{Var}(X_{t+2} - \hat{X}_t(2)) = \mathrm{Var}(U_{t+2} - 0{,}7 \cdot U_{t+1})$$
$$= \mathrm{Var}(U_{t+2}) + 0{,}7^2 \cdot \mathrm{Var}(U_{t+1})$$
$$= \sigma^2 + 0{,}7^2 \cdot \sigma^2 = 1{,}49\,\sigma^2$$