Apl. Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

Aufgaben zur Zeitreihenanalyse (Kap. 4)

Aufgabe 4.1

Gegeben sind die trendstationären Prozesse

$$(1)\ x_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + u_t$$

und

$$(2)\ y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + v_t\,,$$

worin die Störgrößen u_t und v_t einem White-Noise-Prozess folgen.

a) Geben Sie die einem White-Noise-Prozess zugrundeliegenden Annahmen an und erläutern Sie sie! Worin unterscheidet sich ein White-Noise-Prozess von einem i.i.d-Prozess!

Lösung

Damit eine Zufallsvariable U_t einem White-Noise-Prozess folgt, müssen drei Annahmen erfüllt sein. Erstens muss ihr Erwartungswert konstant sein,

$$E(U_t) = \mu,$$

wobei μ in der Regel ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 0 gesetzt wird. Zweitens muss die Varianz konstant sein:

$$Var(U_t) = \sigma^2.$$

Und drittens müssen die Autokovarianzen verschwinden:

$$Cov(U_t, U_s) = 0 \text{ für } t \neq s.$$

Aufeinanderfolgende Werte einer White-Noise Zufallsvariablen U_t sind somit nicht autokorreliert, so dass ihre zukünftigen Werte u_{t+h}, $h>0$, auf der Basis eines linearen Zeitreihenmodells nicht prognostiziert werden können.

Bei einem i.i.d.-Prozess [independently and identically distributed (= i.i.d.) ist eine Zufallsvariable U_t unabhängig und identisch verteilt. Das bedeutet, dass alle alle Terme dieselbe Verteilung haben und stochastisch unabhängig sind. Stochastische Unabhängigkeit,

$$f_{1,2,\ldots,T}\left(U_1, U_2, \ldots, U_T\right) = \prod_{t=1}^{T} f_t\left(U_t\right) = \left[f\left(U_t\right)\right]^T$$

impliziert, dass die zukünftigen Werte u_{t+h}, $h>0$, auch auf der Basis nichtlinearer Zeitreihenmodelle nicht prognostiziert werden können.

b) Zeigen Sie, dass das Steigungsmaß γ_1 von x_t einer

- Regression von y_t auf x_t unter Berücksichtigung des Trends t,

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_t + \gamma_2 \cdot t + \varepsilon_t,$$

gleichwertig aus einer

Regression der Residuen v_t auf die Residuen u_t ohne Berücksichtigung des Trends t,

$$v_t = \delta_0 + \delta_1 \cdot u_t + \varepsilon_t,$$

$\gamma_1 = \delta_1$, ermittelt werden kann!

Lösung

Die Regressionsgleichungen (1) und (2) lassen sich in den trendbereinigten Formen

(1‘) $x_t - \alpha_1 \cdot t = \alpha_0 + u_t$

und

(2‘) $y_t - \beta_1 \cdot t = \beta_0 + v_t$

darstellen.

Regressiert man trendbereinigten y- und x-Variablen aufeinander, d.h. die linke Seite von (2‘) auf die linke Seite von (1‘), so erhält man die Regression von y_t auf x_t unter Berücksichtigung des Trends t:

$$y_t - \beta_1 \cdot t = \gamma_0 + \gamma_1 (x_t - \alpha_1 \cdot t) + \varepsilon_t$$

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_t - \gamma_1 \cdot \alpha_1 \cdot t + \beta_1 \cdot t + \varepsilon_t$$

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_t + \underbrace{(\beta_1 - \gamma_1 \cdot \alpha_1)}_{=\gamma_2} \cdot t + \varepsilon_t.$$

Bei einer Regression der rechten Seite von (2‘) auf die rechte Seite von (1‘), d.h. der um die absoluten Glieder erweiterten Residuen, ergibt sich

$$\beta_0 + v_t = \gamma_0 + \gamma_1 (\alpha_0 + u_t) + \varepsilon_t$$

$$v_t = \underbrace{\gamma_0 + \gamma_1 \cdot \alpha_0 - \beta_0}_{=\delta_0} + \underbrace{\gamma_1}_{=\delta_1} \cdot u_t + \varepsilon_t.$$

Beide Regressionen führen somit zum selben Steigungsmaß $\gamma_1 = \delta_1$ der beiden unabhängigen Variablen x_t und u_t, so dass anstelle einer Regression der originären trendbehafteten Variablen y_t und x_t gleichwertig eine Regression der Residuen v_t und u_t durchgeführt werden kann.

c) Angenommen, die Niveaubeziehung

$$(3)\ y_t = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_t + w_t,$$

mit $E(w_t)=0$, $Var(w_t)=\sigma^2$ und $E(w_t \cdot w_{t-j})=0$ für $j>0$ würde für die trendstationären Prozesse (x_t) und (y_t) durch eine Regression von Δy_t auf Δx_t mit der OLS-Methode geschätzt.

Welche Folgen hat dieser Ansatz im Hinblick auf die

- Autokovarianz 1. Ordnung der Störvariablen,
- Varianz der Störvariablen

der Differenzenregression?

Lösung

Für die Periode t-1 lautet die Niveaubeziehung (3)

$$(3')\ y_{t-1} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_{t-1} + w_{t-1}.$$

Subtrahiert man (3') von (3), erhält man die Regressionsbeziehung in Differenzenform

$$(4)\ \Delta y_t = \eta_1 \cdot \Delta x_t + \Delta w_t$$

mit

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1},\ \Delta x_t = x_t - x_{t-1} \text{ und } \Delta w_t = w_t - w_{t-1}.$$

Damit ergibt sich für die Autokovarianz 1. Ordnung der Störvariablen Δw_t der Differenzenregression (4)

$$Cov(\Delta w_t, \Delta w_{t-1}) = Cov(w_t - w_{t-1}, w_{t-1} - w_{t-2})$$

$$= Cov(w_t, w_{t-1}) - Cov(w_t, -w_{t-2}) - Cov(-w_{t-1}, w_{t-1}) + Cov(-w_{t-1}, -w_{t-2})$$

$$= \underbrace{Cov(w_t, w_{t-1})}_{=0} - \underbrace{Cov(w_t, w_{t-2})}_{=0} - Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) + \underbrace{Cov(w_{t-1}, w_{t-2})}_{=0}$$

$$= -Cov(w_{t-1}, w_{t-1}) = -Var(w_{t-1}) = -\sigma^2$$

Während die Störvariable w_t der Niveauregression (3) der trendbehafteten Variablen x_t und y_t frei von Autokorrelation ist, ist die Störvariable Δw_t der Differenzenregression (4) der trendbereinigten Variablen Δx_t und Δy_t negativ autokorreliert.

Für die Varianz der Störvariablen Δw_t der Differenzenregression (4) ergibt sich

$$Var(\Delta w_t) = Var(w_t - w_{t-1}) = Var(w_t) + (-1)^2 \cdot Var(w_{t-1})$$

$$= Var(w_t) + Var(w_{t-1}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2 \cdot \sigma^2$$

Die Varianz der Störvariablen Δw_t der Differenzenregression (4) ist doppelt so groß wie die Varianz der Störvariablen w_t der Niveauregression (3), was bedeutet, dass die Regression der trendbereinigten Variablen Δx_t und Δy_t mit einem Verlust an Effizienz (geringere Präzision der Schätzung) einhergeht.

Aufgabe 4.2

Gegeben sind die beiden stochastischen Prozess

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + U_t, \ \beta \neq 0$$

und

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t, \ \delta \neq 0,$$

in denen U_t eine White-Noise-Zufallsvariable mit einem Erwartungswert von 0 ist.

a) Erläutern Sie anhand der beiden stochastischen Prozesses die Begriffe des trend- und differenzstationären Prozesses!

Lösung

- Trendstationärer Prozess: $Y_t = \alpha + \beta \cdot t + U_t, \ \beta \neq 0$

Der trendstationäre Prozess lässt sich durch Herausrechnen (oder Aufnahme) eines linearen Trends $\beta \cdot t$ in das Regressionsmodell in einen stationären Prozess überführen:

$$Y_t - \beta \cdot t = (\alpha + \beta \cdot t + U_t) - \beta \cdot t = \alpha + U_t \sim I(0)$$

- Differenzstationärer Prozess: $Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t, \ \delta \neq 0$

Der differenzstationäre Prozess lässt sich durch die Bildung erster Differenzen in einem stationären Prozess überführen:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \delta + U_t \sim I(0)$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der beiden Prozesse und interpretieren Sie anhand dieser Kenngrößen ihre stochastischen Eigenschaften!

Lösung

- Erwartungswert

Trendstationärer Prozess $Y_t = \alpha + \beta \cdot t + U_t, \ \beta \neq 0$	Differenzstationärer Prozess $Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t, \ \delta \neq 0$
$E(Y_t) = E(\alpha + \beta \cdot t + U_t)$ $= E(\alpha) + E(\beta \cdot t) + \underbrace{E(U_t)}_{=0}$ $= \alpha + \beta \cdot t$ Da $E(Y_t)$ nicht konstant ist, sondern sich zeitlich ändert, ist der Prozess nicht mittelwertstationär.	$Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t$ $= \delta + (\delta + Y_{t-2} + U_{t-1}) + U_t$ $= 2 \cdot \delta + Y_{t-2} + U_t + U_{t-1}$ $= 2 \cdot \delta + (\delta + Y_{t-3} + U_{t-2}) + U_t + U_{t-1}$ $= 3 \cdot \delta + Y_{t-3} + U_t + U_{t-1} + U_{t-2}$ nach (t-1)-maliger Substitution (mit Y_0=0): $Y_t = t \cdot \delta + Y_0 + U_t + U_{t-1} + U_{t-2} + \ldots + U_1$ $E(Y_t) = E(t \cdot \delta + U_t + U_{t-1} + U_{t-2} + \ldots + U_1)$ $= E(t \cdot \delta) + \underbrace{E(U_t)}_{=0} + \underbrace{E(U_{t-1})}_{=0} + \underbrace{E(U_{t-2})}_{=0} + \ldots + \underbrace{E(U_1)}_{=0}$ $= t \cdot \delta$ Da $E(Y_t)$ nicht konstant ist, sondern sich zeitlich ändert, ist der Prozess nicht mittelwertstationär.

- Varianz

Trendstationärer Prozess $Y_t = \alpha + \beta \cdot t + U_t,\ \beta \neq 0$	Differenzstationärer Prozess $Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t,\ \delta \neq 0$
$\mathrm{Var}(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2$ $= E[(\alpha + \beta \cdot t + U_t) - (\alpha + \beta \cdot t)]^2$ $= E(U_t^2) = \mathrm{Var}(U_t^2) = \sigma^2$ Da $\mathrm{Var}(Y_t)$ konstant, d.h. unabhängig von der Zeit ist, ist der Prozess varianzstationär.	$\mathrm{Var}(Y_t) = E[(t \cdot \delta + U_t + U_{t-1} + \ldots + U_1) - \delta \cdot t]^2$ $= E[(U_t + U_{t-1} + \ldots + U_1)^2]$ $= E(U_t^2) + \underbrace{E(U_t U_{t-1})}_{=0} + \ldots + \underbrace{E(U_t U_1)}_{=0}$ $+ \underbrace{E(U_{t-1} U_t)}_{=0} + E(U_{t-1}^2) + \underbrace{E(U_{t-1} U_{t-2})}_{=0} + \ldots + \underbrace{E(U_{t-1} U_1)}_{=0}$ $+ \ldots + \underbrace{E(U_1 U_t)}_{=0} + \underbrace{E(U_1 U_{t-1})}_{=0} + \underbrace{E(U_1 U_{t-2})}_{=0} + \ldots + E(U_1^2)$ $= \underbrace{E(U_t^2)}_{=\sigma^2} + \underbrace{E(U_{t-1}^2)}_{=\sigma^2} + \ldots + \underbrace{E(U_1^2)}_{\sigma^2} = t \cdot \sigma^2$ Da $\mathrm{Var}(Y_t)$ nicht konstant ist, sondern mit zunehmender Zeit wächst, ist der Prozess nicht varianzstationär.

Bei dem trendstationären Prozess streuen die Zeitreihenwerte zufällig mit einer konstanten Varianz um den Erwartungswert $\alpha + \beta \cdot t$. Damit lässt sich seine Entwicklung durch eine Trendgerade beschreiben, mit der der Prozess auch prognostiziert werden kann.

Bei dem differenzstationären Prozess kumulieren sich die vergangenen Störgrößen zusammen mit der aktuellen Störgröße um einen Trend $\delta \cdot t$, so dass die Varianz mit wachsendem t über alle Grenzen wächst. Die Kumulierung der Störgrößen kann den linearen Trend $\delta \cdot t$ verstärken oder konterkarieren, so dass seine Prognosefähigkeit verloren geht.

Aufgabe 4.3

Warum folgt die Dickey-Fuller-Teststatistik nicht der bei einem Signifikanztest der Regressionskoeffizienten verwendeten t-Verteilung und damit asymptotisch der Standard-normalverteilung?

Lösung

Voraussetzung für eine asymptotische Normalverteilung der t-Statistik der Regressions-koeffizienten ist eine konstante Varianz des stochastischen Prozesses. Sie wird bei einer Anwendung der OLS-Methode durch die Stichprobenvarianz von X_{t-1} geschätzt. Im Falle einer Einheitswurzel liegt jedoch ein Random Walk vor, dessen Varianz für $t \to \infty$ gegen unendlich geht. Die Nichtstationarität von X_t unter der Nullhypothese hat eine von einer Standardverteilung abweichende Verteilung der Dickey-Fuller-Statistik (t-Statistik des Schätzers des autoregressiven AR(1)-Parameters) zur Konsequenz.

Aufgabe 4.4

Der datengenerierende Prozess (X_t) mit dem Erwartungswert μ ist durch das in Abweichungen definierte AR(1)-Modell

$$X_t - \mu = \rho \cdot (X_{t-1} - \mu) + U_t$$

mit $\rho = \phi_1$ gegeben, das unter der Nullhypothese einer Einheitswurzel in X_t betrachtet wird.

a) Wie lautet die Testgleichung des Dickey-Fuller-Tests bei Verwendung der t-Statistik des Regressionskoeffizienten von X_{t-1} als Prüfgröße?

Lösung

$$X_t - \mu = \rho \cdot (X_{t-1} - \mu) + U_t$$
$$X_t = (\mu - \rho \cdot \mu) + \rho \cdot X_{t-1} + U_t$$
$$X_t - X_{t-1} = (\mu - \rho \cdot \mu) + \rho \cdot X_{t-1} - X_{t-1} + U_t$$
$$\Delta X_t = \underbrace{(1-\rho) \cdot \mu}_{=\mu^*} + (\rho - 1) \cdot X_{t-1} + U_t$$

$$\boxed{\Delta X_t = \mu^* + (\rho - 1) \cdot X_{t-1} + U_t}$$

b) Erläutern Sie Hypothesen über die Regressionskoeffizienten, die auf der Grundlage einer OLS-Schätzung der Testgleichung sinnvoll überprüft werden können?

Lösung

Bei einem Test der Nullhypothese einer Einheitswurzel H_0: $\rho = 1$ gegen die Alternativhypothese H_1: $\rho < 1$, wird in der Regel tatsächlich

$$H_0: \rho - 1 = 0 \text{ gegen } H_1: \rho - 1 < 0$$

getestet, um die übliche t-Statistik $t = (\hat{\rho} - 1) / \hat{\sigma}_{\hat{\rho}}$ benutzen zu können. Die t-Statistik folgt jedoch nicht der t-Verteilung, sondern der Dickey-Fuller-Verteilung, die durch Simulation ermittelt worden ist. Unterstellt, dass die zugrundeliegende Zeitreihe keinen Trend aufweist, folgt aus einer Annahme der Nullhypothese, das $\mu^* = 0$ ist. Bei einer Ablehnung der Nullhypothese schließt man dagegen $\mu^* \neq 0$ Der Fall $\mu^* = 0$ ist unrealistisch, da ökonomische Zeitreihen in der Regel keinen Mittelwert von 0 haben.

Außerdem kann die verbundene Nullhypothese

$$H_0: \rho - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \mu^* = 0$$

überprüft werden. Wenn unterstellt wird, dass die Zeitreihe langfristig nicht wächst, ist entweder $\rho - 1 = 0$, d.h. $\rho = 1$, und $\mu^* = 0$ oder $\rho - 1 < 0$, d.h. $\rho < 1$, und $\mu^* \neq 0$. Im letzten Fall ist $\mu^* = 0$ wiederum unrealistisch, da ökonomische Zeitreihen in der Regel keinen Mittelwert von 0 haben. Als Prüfgröße dieses Tests wird die F-Statistik verwendet, die jedoch nicht der F-Verteilung folgt, sondern deren Verteilung durch Simulation ermittelt worden ist.

Aufgabe 4.5

X_t wird durch einen autoregressiven Prozess 1. Ordnung erzeugt, der in Abweichungen von einem potenziellen linearen Trend durch

$$X_t - \mu - \delta \cdot t = \rho \cdot (X_{t-1} - \mu - \delta \cdot (t-1)) + U_t$$

mit $\rho = \phi_1$ gegeben ist.

a) Geben Sie die Testgleichung des Dickey-Fuller-Tests bei Verwendung der t-Statistik des Regressionskoeffizienten von X_{t-1} als Prüfgröße an!

Lösung

$$\begin{aligned}
X_t - \mu - \delta \cdot t &= \rho \cdot (X_{t-1} - \mu - \delta \cdot (t-1)) + U_t \\
X_t &= \mu + \delta \cdot t - \rho \cdot \mu - \rho \cdot \delta \cdot t + \rho \cdot \delta + \rho \cdot X_{t-1} + U_t \\
X_t &= (1-\rho) \cdot \mu + \rho \cdot \delta + (1-\rho) \cdot \delta \cdot t + \rho \cdot X_{t-1} + U_t \\
X_t - X_{t-1} &= (1-\rho) \cdot \mu + \rho \cdot \delta + (1-\rho) \cdot \delta \cdot t + \rho \cdot X_{t-1} - X_{t-1} + U_t \\
\Delta X_t &= \underbrace{(1-\rho) \cdot \mu + \rho \cdot \delta}_{=\mu^*} + \underbrace{(1-\rho) \cdot \delta}_{=\delta^*} \cdot t + (\rho - 1) \cdot X_{t-1} + U_t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta X_t = \mu^* + \delta^* \cdot t + (\rho - 1) \cdot X_{t-1} + U_t}$$

b) Erläutern Sie die Hypothesen über die Regressionskoeffizienten, die sich aufgrund einer OLS-Schätzung der Testgleichung sinnvoll überprüfen lassen?

Lösung

Bei einem Test der Nullhypothese einer Einheitswurzel H_0: $\rho = 1$ gegen die Alternativhypothese H_1: $\rho < 1$, wird in der Regel tatsächlich

$$H_0: \rho - 1 = 0 \text{ gegen } H_1: \rho - 1 < 0$$

getestet, um die übliche t-Statistik $t = (\hat{\rho} - 1) / \hat{\sigma}_{\hat{\rho}}$ benutzen zu können. Die t-Statistik folgt jedoch nicht der t-Verteilung, sondern der Dickey-Fuller-Verteilung, die durch Simulation ermittelt worden ist. Kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, ist bei einer langfristig wachsenden Zeitreihe mit einem stochastischen Trend $\mu^* \neq 0$. Dagegen können wir in diesem Fall $\delta^* = 0$ annehmen, da ein konstanter Trendanstieg bereits in dem Random Walk mit Drift berücksichtigt worden ist. Muss die Nullhypothese einer Einheitswurzel dagegen abgelehnt werden, ist $\delta^* \neq 0$, da die Zeitreihe langfristig wächst.

Außerdem kann die verbundene Nullhypothese

$$H_0: \rho - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \delta^* = 0$$

überprüft werden. Da unterstellt wird, dass die Zeitreihe langfristig wächst, ist entweder $\rho - 1 < 0$, d.h. $\rho < 1$, und $\delta^* \neq 0$ die einzige realistische Alternative. (X_t) verläuft dann stationär um einen linearen Trend, d.h. es liegt dann ein trendstationärer Prozess vor. Im Falle $\rho < 1$ und $\delta^* = 0$ würde (X_t) keinen Trend aufweisen, was wir vorab ausgeschlossen haben. Für $\rho = 1$ und $\delta^* \neq 0$ läge ein „doppelter“ Trendanstieg vor, was unrealistisch ist. Als Prüfgröße dieses Tests wird die F-Statistik verwendet, die jedoch nicht der F-Verteilung folgt, sondern deren Verteilung durch Simulation ermittelt worden ist.

Aufgabe 4.6

Gegeben ist ein Auszug eines EViews-Outputs über den Augmented Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) für den Verbraucherpreisindex (VPI), bei dem Auslassungen mit schwarzen Kreisen (● ● ● ●) markiert sind:

Null Hypothesis: ● ● ● ●
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=3)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		● ● ● ●	● ● ● ●
Test critical values:	1% level	-5.124875	
	5% level	-3.933364	
	10% level	-3.420030	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 11
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(VPI)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1995 2005
Included observations: 11 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VPI(-1)	-0.583180	0.286953	-2.032321	0.0978
D(VPI(-1))	0.715937	0.231515	3.092400	0.0271
D(VPI(-2))	-0.593336	0.209739	-2.828920	0.0367
D(VPI(-3))	0.462335	0.161502	2.862721	0.0353
C	50.52030	24.92494	2.026897	0.0985
@TREND(1991)	0.868772	0.387218	2.243624	0.0749

a) Wie lautet die Nullhypothese des Augmented Dickey-Fuller-Tests (ADF-Tests)?

Lösung

Die Nullhypothese der ADF-Tests besagt, dass der Verbraucherpreisindex eine Einheitswurzel hat: H_0: $\rho = 1$ oder H_0: $\rho - 1 = 0$.

b) Welchen Wert nimmt die ADF-Teststatistik an?

Lösung

Der Wert der ADF-Statistik stimmt mit dem t-Wert des geschätzten Regressionskoeffizeinten vonVPI(-1) überein:

Augmented Dickey-Fuller test statistic (=t-Statistik) = -2.032321.

c) Warum lässt sich die Nullhypothese des ADF-Tests auf einem Signifikanzniveau von 10% nicht verwerfen?

Lösung

Der kritische Wert der ADF-Statistik (= t-Statistik) ist nicht der t-Verteilung, sondern der Dickey-Fuller-Verteilung zu entnehmen. EViews weist auf dem Signifikanzniveau von 10% einen kritischen DF-Wert von -3,420030 aus. Unter Verwendung der t-Statistik ergibt sich für $\alpha = 0{,}10$ die Testentscheidung:

$t = -2{,}032 > DF^{w}_{\infty;0,10} = -3.420$ => H_0 annehmen, d.h. Nichtstationarität (Einheitswurzel)

Aufgabe 4.7

Geben Sie die Testgleichung des erweiterten (augmented) Dickey-Fuller-Test für den datenerzeugenden Prozess (AR(3)-Prozess)

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 \cdot X_{t-2} + \phi_3 \cdot X_{t-3} + U_t$$

an! Formulieren Sie die Nullhypothese einer Einheitswurzel unter Verwendung der autoregressiven Parameter ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3!

Lösung

• Herleitung der Testgleichung:

Zuerst wird die Prozessgleichung um den Term $\phi_3 \cdot X_{t-2}$ erweitert,

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + (\phi_2 + \phi_3) \cdot X_{t-2} - \phi_3 \cdot \underbrace{(X_{t-2} - X_{t-3})}_{=\Delta X_{t-2}} + U_t,$$

und anschließend um den Term $(\phi_2 + \phi_3) \cdot X_{t-1}$:

$$X_t = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \cdot X_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) \cdot \underbrace{(X_{t-1} - X_{t-2})}_{=\Delta X_{t-1}} - \phi_3 \cdot \underbrace{(X_{t-2} - X_{t-3})}_{=\Delta X_{t-2}} + U_t.$$

Schließlich wird auf beiden Seiten der Gleichung X_{t-1} subtrahiert:

$$X_t - X_{t-1} = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 1) \cdot X_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3) \cdot \underbrace{(X_{t-1} - X_{t-2})}_{=\Delta X_{t-1}} - \phi_3 \cdot \underbrace{(X_{t-2} - X_{t-3})}_{=\Delta X_{t-2}} + U_t,$$

woraus sich die Testgleichung

$$(*) \quad \boxed{\Delta X_t = \underset{\substack{\uparrow \\ =\rho-1}}{\pi} \cdot X_{t-1} + \beta_1 \cdot \Delta X_{t-1} + \beta_2 \cdot \Delta X_{t-2} + U_t}$$

mit $\rho = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$, $\beta_1 = -(\phi_2 + \phi_3)$, $\beta_2 = -\phi_3$ ergibt.

Die Testgleichung (*) trägt der speziellen Form des datenerzeugenden Prozesses von X_t Rechnung. Eine Regression von ΔX_t auf X_{t-1} (= Testgleichung des DF-Tests) würde im Falle eines AR(3)-Prozesses von X_t autokorrelierte Störgrößen mit sich bringen, die jedoch durch die Aufnahme zeitlich verzögerter Differenzen ΔX_{t-1} und ΔX_{t-2} (= Testgleichung des ADF-Tests) beseitigt werden können. Bei ihrer Vernachlässigung würde der Dickey-Fuller-Test nicht valide sein.

• Formulierung der Nullhypothese einer Einheitswurzel:

H_0: π (=ρ-1) = 0 oder H_0: $\rho = 1$

mit autoregressiven Parameter ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3:

H_0: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - 1 = 0$ oder H_0: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1$

Aufgabe 4.8

Die datenerzeugenden Prozesse für (X_t) und (Y_t) lauten

(1a) $X_t + \alpha \cdot Y_t = U_t$, (1b) $U_t = \mu_1 + \rho_1 \cdot U_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$, $0 \le \rho_1 \le 1$

(2a) $X_t + \beta \cdot Y_t = V_t$, (2b) $V_t = \mu_2 + \rho_2 \cdot V_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$, $0 \le \rho_2 \le 1$

mit $\alpha \neq \beta$, wobei α oder β gleich 0 sein kann. μ_1 und μ_2 sind Konstanten. (ε_1) und (ε_1) sind White-Noise-Prozesse.

<u>Hinweis</u>: Man kann durch adäquate Subtraktion der beiden Gleichungen (1a) und (2a) voneinander nach Einsetzen von (1b) und (2b) zeigen, dass X_t und Y_t im Falle a) und c) I(1)-Variablen sind.

a) Warum können die Variablen X_t und Y_t in dem Fall $\rho_1 = \rho_2 = 1$ nicht kointegriert sein?

Lösung

Setzt man (1b) in (1a) ein, erhält man mit $\rho_1 = 1$ die Gleichung

$$\underbrace{X_t + \alpha \cdot Y_t}_{=U_t} = \mu_1 + U_{t-1} + \varepsilon_{1,t}.$$

Einsetzen von (2b) in (2a) mit $\rho_2 = 1$ ergibt

$$\underbrace{X_t + \beta \cdot Y_t}_{=V_t} = \mu_2 + V_{t-1} + \varepsilon_{2,t}.$$

Die beiden Variablen X_t und Y_t sind daher als I(1)-Variablen nichtstationär. Sie haben individuell jeweils einen stochastischen Trend, da $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ist. Linearkombinationen von X_t und Y_t, die durch U_t und V_t repräsentiert werden, sind I(1), da sie sich als unabhängige Random Walks mit Drift für μ_1, $\mu_2 \neq 0$ und ohne Drift für μ_1, $\mu_2 = 0$ darstellen. Somit wird die Integrationsordnung der Variablen X_t und Y_t nicht reduziert. Sie haben sie keinen gemeinsamen stochastischen Trend, da keine der Linearkombinationen von X_t und Y_t stationär ist. Damit sind die Variablen X_t und Y_t nicht kointegriert.

b) Interpretieren Sie den Fall $0 \leq \rho_1 < 1$ und $0 \leq \rho_2 < 1$!

Lösung

Nach Einsetzen von (1b) in (1a) und (2b) in (2a) erhält man das Gleichungssystem

$$\underbrace{X_t + \alpha \cdot Y_t}_{=U_t} = \mu_1 + \rho_1 \cdot U_{t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$\underbrace{X_t + \beta \cdot Y_t}_{=V_t} = \mu_2 + \rho_2 \cdot V_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

Da $0 \leq \rho_1 < 1$ und $0 \leq \rho_2 < 1$ gilt, folgen die Linearkombinationen von X_t und Y_t, die durch U_t und V_t repräsentiert werden, stationären AR(1)-Prozessen. Im Falle von I(1)-Variablen ist der (normierte) Kointegrationsvektor eindeutig, d.h. es dürfte nur eine stationäre Linearkombination von X_t und Y_t geben. Hierzu müsste $\alpha=\beta$ gelten bei einem identischem AR(1)-Prozess in der Störvariablen gelten. Nur dann könnten die Variablen X_t und Y_t kointegriert sein.

Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, was hier der Fall ist, müssten X_t und Y_t selbst I(0)-Variablen sein, wenn die beiden verschiedenen Linearkombinationen von X_t und Y_t I(0) sind.

c) Zeigen Sie auf, dass X_t und Y_t unter der Bedingung $\rho_1 = 1$ und $0 \leq \rho_2 < 1$ kointegriert sind!

Lösung

Setzt man (1b) in (1a) ein, erhält man mit $\rho_1 = 1$ die Gleichung

$$\underbrace{X_t + \alpha \cdot Y_t}_{=U_t} = \mu_1 + U_{t-1} + \varepsilon_{1,t}\,.$$

Mit $0 \leq \rho_2 < 1$ erhält man nach Einsetzen von (2b) in (2a)

$$\underbrace{X_t + \beta \cdot Y_t}_{=V_t} = \mu_2 + \rho_2 \cdot V_{t-1} + \varepsilon_{2,t}\,.$$

Während erstere Gleichung eine Linearkombination von X_t und Y_t als einen Random Walk (mit Drift für $\mu_1 \neq 0$) angibt, stellt sich die Linearkombination in letzterer Gleichung als stationärer AR(1)-Prozess dar. Obwohl beide Variablen X_t und Y_t I(1)-Variablen sind, gibt es eine Linearkombination zwischen beiden Variablen, die stationär ist. Dies impliziert, dass beide Variablen einen gemeinsamen stochastischen Trend haben. X_t und Y_t sind damit kointegriert.

Aufgabe 4.9

Die ungedeckte Zinsparität (uncovered interest parity, UIP) besagt, dass die nationalen Zinsdifferenzen (i_t-i_t*) den erwarteten Wechselkursveränderungen ($E(\Delta s_t)$) entsprechen (* steht für Ausland). Bei rationalen Erwartungen können die erwarteten Wechselkurveränderungen, $E(\Delta s_t)$, durch die beobachteten Wechselkurveränderungen, Δs_t, operationalisiert werden.

Im Falle einer Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität müssen die Variablen i_t-i_t* und Δs_t kointegriert sein, sofern sie nichtstationär sind. Bei Anwendung des Engle-Granger-Verfahrens zum Test auf Kointegration ist die Regressionsgleichung

(1) $\Delta s_t = \beta \cdot (i_t - i_t^*) + U_t$,

(i_t: deutscher Zinssatz, i_t*: ausländischer Zinssatz, Δs_t: logarithmierte Wechselkursveränderung)) mit der OLS-Methode zu schätzen. Im Anschluss daran werden die Residuen dieser statischen Regression (Langfristbeziehung) auf eine Einheitswurzel getestet.
(Hinweis: Die Zinsdifferenz (i_t-i_t*) und die Wechselkursveränderung Δs_t sind I(1)-Variablen.)

Die beiden folgenden Tabellen geben die Ergebnisse des Engle-Granger-Tests für Deutschland im Vergleich zur OECD (=Ausland) für den Zeitraum con 1974-1998 wieder:

Dependent Variable: DLNEXRATE_GER (=Δs_t)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1974 1998
Included observations: 25 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INTRATEDIFF_GER (=i_t-i_t*)	0.008894	0.002750	3.233745	0.0035

R-squared	0.071890	Mean dependent var	0.021652
Adjusted R-squared	0.071890	S.D. dependent var	0.038323
S.E. of regression	0.036920	Akaike info criterion	-3.720942
Sum squared resid	0.032714	Schwarz criterion	-3.672186
Log likelihood	47.51177	Durbin-Watson stat	1.699642

Null Hypothesis: U has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=5)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.398506	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.669359	
	5% level	-1.956406	
	10% level	-1.608495	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(U)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1976 1998
Included observations: 23 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
U(-1)	-1.191353	0.270854	-4.398506	0.0003
D(U(-1))	0.368061	0.211583	1.739560	0.0966

R-squared	0.512149	Mean dependent var	0.000962
Adjusted R-squared	0.488918	S.D. dependent var	0.050263
S.E. of regression	0.035933	Akaike info criterion	-3.731393
Sum squared resid	0.027114	Schwarz criterion	-3.632654
Log likelihood	44.91102	Durbin-Watson stat	1.871809

a) Interpretieren Sie die mit der OLS-Methode geschätzte Langfristbeziehung (1)!

Lösung

Bei Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität (UIP), $E(\Delta s_t) = i_t - i_t^*$, lautet der Kointegationsvektor (1, -1). In der statischen Regression (Gleichgewichtsbeziehnung) von Δs_t auf $i_t - i_t^*$ nimmt der OLS-Schätzer $\hat{\beta}$ für β den Wert 0.008894 bei einem Standardfehler von 0.002750 an. Zu prüfen ist daher die Nullhypothese H_0: $\beta = 1$. Die t-Statistik nimmt für $\hat{\beta}$ den Wert

$$t(\hat{\beta}) = (\hat{\beta} - 1) / \sigma_{\hat{\beta}} = (0.008894 - 1) / 0.002750 = -360{,}022$$

an, der auf allen üblichen Signifikanzniveaus zu einer Ablehnung der Nullhypothese führt.

Die ungedeckte Zinsparität ist daher im betrachteten Zeitraum zwischen Deutschland und der OECD insgesamt nicht bestätigt worden. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Verwendung der tatsächlichen Wechselkurveränderung (Δs_t) anstelle der erwarteten Wechselkurveränderungen ($E(\Delta s_t)$) die von der Theorie unterstellte Gleichgewichtsbeziehung lockern. Die Wechselkurveränderungen (Δs_t) könnten mit den nationalen Zinsdifferenzen ($i_t - i_t^*$) bei dem von (1, -1) verschiedenen Kointegrationsvektor (1, -0.008894) kointegriert sein.

b) Beurteilen Sie anhand des Testergebnisses, ob die Zinsdifferenzen ($i_t - i_t^*$) und Wechselkurveränderungen (Δs_t) kointegriert sind (α=0,05)?

Lösung

Wie in Teil a) begründet worden ist, könnten die Wechselkurveränderungen (Δs_t) mit den nationalen Zinsdifferenzen ($i_t - i_t^*$) bei dem von (1, -1) verschiedenen Kointegrationsvektor (1, -0.008894) kointegriert sein. In dem Engle-Granger-Verfahren werden hierzu die Residuen der statischen Regression von Δs_t auf $i_t - i_t^*$ auf eine Einheitswurzel getestet.

Falls die Residuen keine Einheitswurzel aufweisen, lassen sich die Komponenten des Vektors (1, -0.008894) als Koeffizienten einer stationären Linearkombination von Δs_t und $i_t - i_t^*$ auffassen. Der Vektor (1, -0,008894) heißt dann Kointegrationsvektor.

Weisen die Residuen dagegen eine Einheitswurzel auf, ist auch die Linearkombination nichtstationär. Die beiden Variablen Δs_t und $i_t - i_t^*$ sind dann nicht kointegriert.

Hier sind die Residuen mit dem ADF-Test auf eine Einheitswurzel geprüft worden. Um die Autokorrelation zu beseitigen, ist nach dem Bayesschen Informationskriterium (BIC) die erste Differenz Δu_{t-1} in die Dickey-Fuller-Regression einzubeziehen:

$$\hat{u}_t = -1{,}191 \cdot u_{t-1} + 0{,}368 \cdot \Delta u_{t-1}.$$

Als Prüfgröße des ADF-Test wird die t-Statistik von -4,399 des Regressionskoeffizienten von $\hat{u}_{t-1}$ (= Augmented Dickey-Fuller test statistic) verwendet, die jedoch nicht mit den kritischen Werten der t-Verteilung verglichen werden darf. Da die getestete Variable nicht beobachtbar ist, sondern aus der Schätzung der Langfristbeziehung (1) hervorgeht, dürfen hier auch nicht die von EViews ausgewiesenen Quantile der Dickey-Fuller-Verteilung als kritische Werte herangezogen werden. Die korrekten kritischen Werte CV(α) können der Response-Surface-Simulation von MacKinnon (1991) entnommen werden. Bei einem Signifikanzniveau von 5% erhält man:

$$CV(0{,}05) = -3{,}34 - 5{,}97 / 23 - 8{,}98 / 23^2 = -3{,}62$$

Da die t-Statistik (Augmented Dickey-Fuller test statistic) von -4,399 den kritischen Wert der CV(0,05) von -3,62 unterschreitet, muss die Nullhypothese einer Einheitswurzel in der

Residuen der Langfristbeziehung zwischen Δs_t und i_t-i_t* auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden. Obwohl die ungedeckte Zinsparität (UIP) in ihrer strikten Form nicht bestätigt wird, sind die Wechselkursveränderungen und die Zinsdifferenzen zwischen Deutschland und den OECD-Ländern kointegriert. Der Kointegrationsvektor ist durch (1, -0,008894) gegeben.

Aufgabe 4.10

Gegeben sind die beiden nichtstationären Prozesse

$$X_t = 4 + 2 \cdot Z_t + U_t$$

und

$$Y_t = 2 + 3 \cdot Z_t + V_t$$

mit den I(0)-Variablen U_t und V_t und der I(1)-Variablen Z_t.

a) Zeigen Sie, dass X_t und Y_t kointegriert sind! Geben Sie die Ordnung (d,b) der Kointegration $X_t, Y_t \sim CI(d,b)$ an!

Lösung

$$(1)\ X_t = 4 + 2 \cdot Z_t + U_t \quad \Big| \cdot 1{,}5$$

$$(2)\ Y_t = 2 + 3 \cdot Z_t + V_t$$

---

(2)– 1,5·(1):

$$Y_t - 1{,}5 \cdot X_t = 2 - 4 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot Z_t - 2 \cdot 1{,}5 \cdot Z_t + V_t - 1{,}5 \cdot U_t$$

$$Y_t - 1{,}5 \cdot X_t = -4 + V_t - 1{,}5 \cdot U_t$$

$$\underbrace{Y_t - 1{,}5 \cdot X_t}_{} + 4 = \underbrace{V_t - 1{,}5 \cdot U_t}_{}$$

Linearkomb. der Var. X u. Y ist damit I(0), d.h. stationär (Konst. hat keinen Einfluss darauf)

Linearkomb. von 2 I(0)-Var.: I(0) (stationär)

Da X_t und Y_t aufgrund der Abhängigkeit von $Z_t \sim I(1)$ selbst I(1)-Variablen sind und ihre Linearkombination I(0) ist, wird d=1 um b=1 reduziert, d.h. die Ordnung der Kointegration ist durch (d=1, b=1) gegeben:

$$X_t, Y_t \sim CI(d=1,b=1)$$

b) Geben Sie die Störvariable ε_t und den normierten Kointegrationsvektor einer Regression von Y auf X an!

Lösung

- Störvariable ε_t einer Regression von Y auf X:

  $Y_t - 1{,}5 \cdot X_t + 4 = V_t - 1{,}5 \cdot U_t$

  $$Y_t = -4 + 1{,}5 \cdot X_t + \underbrace{V_t - 1{,}5 \cdot U_t}_{= \varepsilon_t}$$

- Normierter Kointegrationsvektor

  Aus der Darstellung

  $Y_t - 1{,}5 \cdot X_t + 4 = \varepsilon_t$

  erhält man den normierten Kointegrationsvektor

  $(1 \quad 4 \quad -1{,}5)$