Exkurs: Durbin-Watson-Test

Bei Vorliegen einer Autokorrelation sind Störterme unterschiedlicher Beobachtungen stochastisch abhängig. Wann ist aber in einer Regression die Annahme der Unkorreliertheit der Störgröße verletzt? Der empirische Autokorrelationskoeffizient $\hat{\rho}_1$ wird aufgrund des Stichprobenfehlers von 0 abweichen, auch wenn die Störgröße in der Grundgesamtheit unkorreliert ist. Ein Test dieser Annahme heißt **Autokorrelationstest**. Häufig ist damit zu rechnen, dass sich eine Autokorrelation der Störgröße unmittelbar in einer Abhängigkeit der benachbarten Residuen niederschlägt. Der **Durbin-Watson-Test** ist ein Autokorrelationstest, der die Residuen auf Autokorrelation 1. Ordnung testet. In der Nullhypothese wird also davon ausgegangen, dass der theoretische Autokorrelationskoeffizient ρ_1 gleich 0 ist:

$$H_0: \rho_1 = 0.$$

Ihr wird die Alternativhypothese einer autokorrelierten Störgröße gegenübergestellt:

$$H_1: \rho_1 \neq 0.$$

Aus dem Testergebnis des Durbin-Watson-Tests lässt sich bei Ablehnung der Nullhypothese zusätzlich erkennen, ob positive oder negative Autokorrelation vorliegt.

Ein stochastischer Prozess, der eine Autokorrelation 1. Ordnung der Störgröße erzeugt, ist ein **autoregressiver Prozess 1. Ordnung (Markov-Prozess):**

(6.6) $$u_t = \phi \cdot u_{t-1} + v_t \,, \quad |\phi| < 1 \,, \quad t = 2,...,n$$

Bei diesem Prozess ist die aktuelle Störgröße u_t von der Störgröße der Vorperiode, u_{t-1}, abhängig. Die Stärke der Abhängigkeit wird durch den autoregressiven Parameter ϕ wiedergegeben. v ist eine White-Noise-Störvariable, die diese Beziehung überlagert und auch als Innovation bezeichnet wird:

(6.7) $$E(v_t) = 0 \quad \text{für } t = 2,...,n$$

(6.8) $$Cov(v_t, v_s) = E(v_t \cdot v_s) = \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{für } t = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Restriktion $-1 < \phi < 1$ verhindert, dass vergangene Störvariablen einen dominierenden Einfluss auf die aktuelle Entwicklung erhalten (= Nichtstationarität). Sie ist auch deshalb erforderlich, weil sich der autoregressive Parameter als (Auto-)Korrelationskoeffizient interpretieren lässt, der auf diesen Wertebereich eingeschränkt ist.

Der autoregressive Parameter ϕ kann geschätzt werden, wenn man die Störterme u_t in (6.6) durch die OLS-Residuen des zugrunde liegenden Regressionsmodells ersetzt:

(6.9) $$\hat{u}_t = \phi \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t \,, \quad |\phi| < 1$$

Eine Regression von $\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$ führt dann zu dem OLS-Schätzer

(6.10) $$\hat{\phi} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} - \bar{\hat{u}}_0 \bar{\hat{u}}_1}{\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 - \bar{\hat{u}}_1^2}$$

mit $\bar{\hat{u}}_0 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t$ und $\bar{\hat{u}}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}$

Wegen $\bar{\hat{u}}_0 \approx \bar{\hat{u}}_1 \approx 0$ und $\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^{n-1} \hat{u}_t^2 \approx \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$

erhält man den OLS-Schätzer $\hat{\phi}$, der damit approximativ der Definition des empirischen Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_1$ nach (6.3a) entspricht:

(6.3b) $$\hat{\phi} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2}$$

Die Nullhypothese fehlender Autokorrelation erster Ordnung (H_0: $\rho_1=0$) lässt sich daher gleichwertig durch

(6.11) $H_0: \phi = 0$

formulieren. Sofern die Nullhypothese zutrifft, folgt aus dem Ansatz (6.6), dass $u_t = v_t$ ist, so dass die Störgröße u die Standardannahmen des multiplen Regressionsmodells erfüllt.

Die Nullhypothese (6.11) lässt sich mit dem **Durbin-Watson-Test** überprüfen. Die als Durbin-Watson-Statistik DW bekannte Prüfgröße basiert auf den OLS-Residuen und ist durch

(6.12a) $$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}$$

gegeben. Da im Zähler und Nenner jeweils quadrierte Summanden stehen, ist die Durbin-Watson-Statistik stets nicht negativ (DW≥0).

Positive Autokorrelation: aktuelle Residuen $\hat{u}_t$ und Residuen der Vorperiode, $\hat{u}_{t-1}$, haben mehrheitlich das gleiche Vorzeichen (beide + oder beide -)

Perfekte positive Autokorrelation: Die Residuen $\hat{u}_t$ und $\hat{u}_{t-1}$ stimmen überein → Zähler in (6.12a) ist gleich 0 → DW = 0

Der Zähler in (6.12a) lässt sich noch umformen, was sich insbesondere im Hinblick auf die Interpretation der Teststatistik empfiehlt. Durch Auflösen des Binoms erhält man zunächst

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1}\right)^2=\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t^2-2\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}+\hat{u}_{t-1}^2\right)=\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t^2+\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{t-1}^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}$$

Sofern die Anzahl der Beobachtungen n groß genug ist, gelten die Approximationen

$$\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t^2\approx\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_{t-1}^2\approx\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2 \qquad ,$$

so dass sich

$$\sum_{t=2}^{n}\left(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1}\right)^2\approx 2\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}$$

ergibt. Durch Einsetzen dieser Beziehung in (6.12a) erhält man

$$DW\approx\frac{2\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2-2\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}=2\left(1-\frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2}\right)$$

und unter Berücksichtigung von (6.3b) schließlich

(6.12b) $$\mathrm{DW} \approx 2\left(1 - \hat{\phi}\right) .$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Durbin-Watson-Statistik und dem empirischen Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung der Residuen, $\hat{\rho}_1$, hergestellt. Wegen $|\hat{\rho}_1| < 1$ nimmt die Durbin-Watson-Statistik stets Werte im Intervall (0, 4) an.

<u>DW-Statistik und Grenzfälle der Autokorrelation</u>

Keine Autokorrelation (ρ_1=0) : $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx 0$ → DW ≈ 2

Perfekte positive Autokorrelation (ρ_1=1): $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx 1$ → DW ≈ 0

Perfekte negative Autokorrelation (ρ_1=-1): $\hat{\rho}_1 \approx \hat{\phi} \approx -1$ → DW ≈ 4

Wertebereich der DW-Statistik: 0 ≤ DW ≤ 4

Festlegung der Annahme- und Ablehnbereiche

Um die Annahme- und Ablehnbereiche der DW-Statistik festlegen zu können, benötigen wir die Kenntnis ihrer Verteilung unter der Nullhypothese H_0: $\rho_1 = 0$.

Voraussetzungen:
- Unabhängige, identisch normalverteilte Störgrößen u_t
- Erklärende Variablen X_k sind feste Größen

Unter diesen Voraussetzungen hängt die Verteilung der DW-Statistik von
- der Anzahl n der Beobachtungen (Stichprobenumfang),
- der Anzahl k der exogenen Variablen,
- den Werten der exogenen Variablen

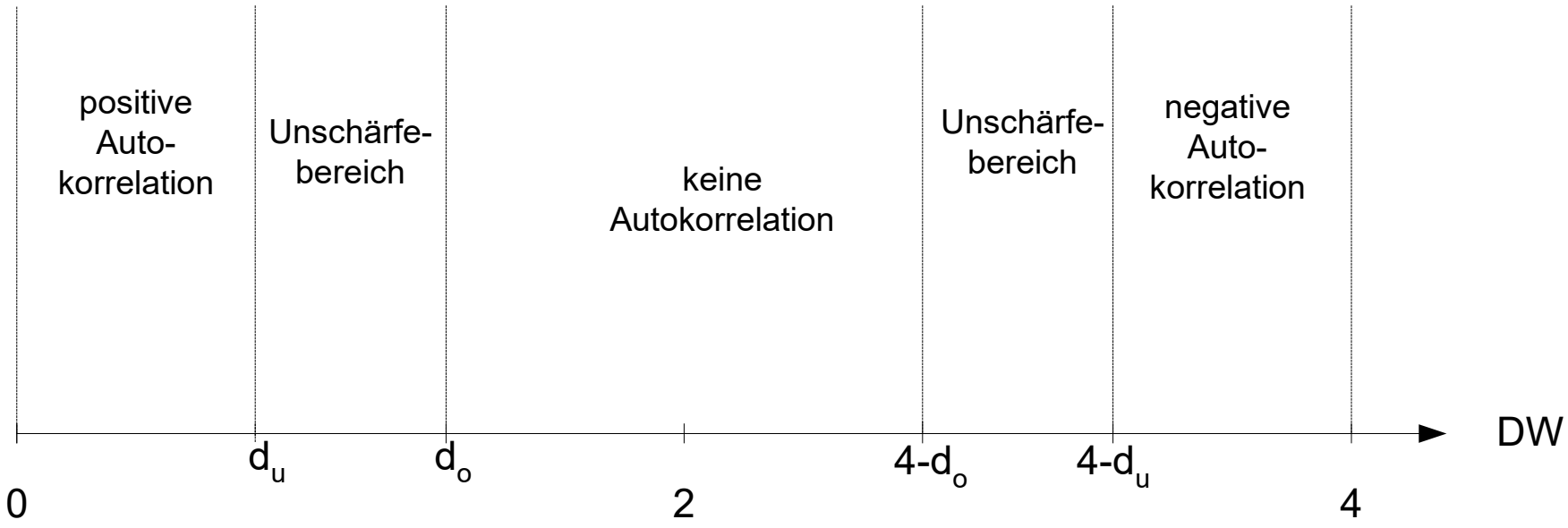
ab.

Um bei dem Autokorrelationstest eine universelle Verteilung einsetzen zu können, nimmt man eine gewisse Unschärfe in Kauf. Auf diese Weise können die kritischen Werte unabhängig von den konkreten Variablenwerten angegeben werden.

Bei der Tabellierung der kritischen Werte ergeben sich **Unbestimmtheitsbereiche** bei der Entscheidung über positive oder negative Autokorrelation, die durch den unteren (d_u) und oberen (d_o) kritischen Wert festgelegt sind:

- bei positiver Autokorrelation: $d_u \leq DW \leq d_o$
- bei negativer Autokorrelation: $4-d_o \leq DW \leq 4-d_u$

Abbildung: Bereiche der DW-Statistik



Die kritischen Werte d_u und d_o sind in Abhängigkeit von der Anzahl n der Beobachtungen und Anzahl k der exogenen Variablen (einschl. der Scheinvariablen) für Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha=0{,}05$ und $\alpha=0{,}01$) tabelliert.

Beispiel:

Der Durbin-Watson-Test soll unter Verwendung der Keynesschen Konsumfunktion (2.27) illustriert werden. Damit lässt sich beurteilen, ob die Annahme einer fehlenden Autokorrelation der Störvariablen der Konsumfunktion berechtigt ist. Genauer wird die Störvariable u mit dem Durbin-Watson-Test auf Autokorrelation erster Ordnung getestet. Als Prüfgröße dieses Tests wird die Durbin-Watson-Statistik DW unter Verwendung der OLS-Residuen $\hat{u}_t$ bestimmt.

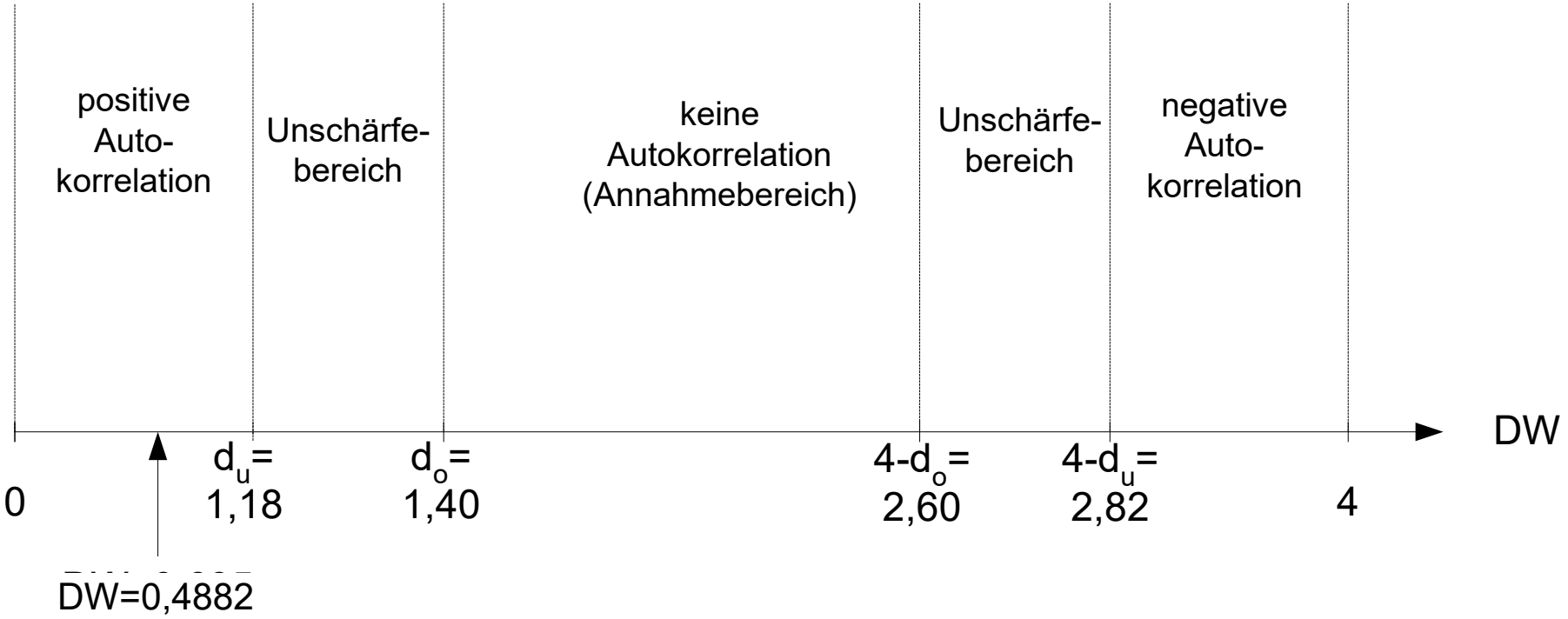
Die hierzu benötigten Abweichungsquadratsummen werden in einer Arbeitstabelle berechnet:

t	$\hat{u}_t$	$\hat{u}_{t-1}$	$\hat{u}_t^2$	$(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2$
1	-11,059452	–	122,311474	–
2	-6,484428	-11,059452	42,0478065	20,9308428
3	-4,945561	-6,484428	24,4585746	2,36811134
4	-0,278686	-4,945561	0,07766578	21,7797251
5	0,613325	-0,278686	0,37616731	0,79568291
6	6,707777	0,613325	44,9942736	37,1423488
7	19,312656	6,707777	372,978689	158,882977
8	13,751808	19,312656	189,112223	30,9230327
9	6,450680	13,751808	41,611266	53,3064774
10	1,105008	6,450680	1,22104334	28,5762006
11	-2,554586	1,105008	6,52590708	13,3926268
12	-6,378473	-2,554586	40,684914	14,6221133
13	-4,055685	-6,378473	16,4485841	5,39534084
14	-7,263435	-4,055685	52,7574822	10,2896549
15	-10,669292	-7,263435	113,833796	11,599866
16	-1,168320	-10,669292	1,36497139	90,2684746
17	-2,267566	-1,168320	5,14185511	1,20834177
18	4,388743	-2,267566	19,261066	44,3064495
19	4,795486	4,388743	22,9966831	0,16543954
			1118,20444	545,953706

Die Durbin-Watson-Statistik nimmt somit den Wert

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{19}\left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{19}\hat{u}_t^2} = \frac{545{,}953706}{1118{,}20444} = 0{,}4882$$

an. Die kritischen Werte des Durbin-Watson-Testes für ein Signifikanzniveau von 5% bei einem Stichprobenumfang von n=19 und k=2 Regressoren (einschl. der Scheinvariablen) gehen aus der folgenden Skizze hervor:



In unserem Beispiel fällt die Durbin-Watson-Statistik DW in den linken Bereich,

$$DW = 0{,}4882 \in [0; d_u = 1{,}18] \text{ ,}$$

was bedeutet, dass aus dem Testergebnis auf eine Autokorrelation der OLS-Residuen der Keynesschen Konsumfunktion geschlossen werden kann. Der Durbin-Watson-Test indiziert, dass der private Konsum trotz des hohen Erklärungsgehalts nicht allein auf das verfügbare Einkommen zurückzuführen ist.

In den OLS-Residuen bleibt eine systematische Variation bestehen, die durch die Vernachlässigung von Einflüssen wie z.B. des Vermögens, des Zinssatzes, Stimmungsindikatoren (→ GfK) oder des zeitlich verzögerte Konsum (→ Habit-Persistence-Hypothese) sein könnten. Die Autokorrelation der Störgröße könnte aber auch auf eine Inadäquanz der in der Keynesschen Konsumfunktion verwendeten Einkommensgröße zurückzuführen sein. Aufschluss hierüber würden z.B. ökonometrische Tests der Permanenten Einkommenshypothese oder der Lebenszyklushypothese geben. □