

6. Modelle mit binären abhängigen Variablen

6.1 Lineare Wahrscheinlichkeitsmodelle

Qualitative Variablen:

- Binäre Variablen: Diese Variablen haben genau zwei mögliche Kategorien und nehmen deshalb genau zwei Werte an, nämlich null und eins
- Multinomiale Variablen: Diese Variablen haben mehr als zwei mögliche sich gegenseitig ausschließende Alternativen und sind nicht geordnet (z.B. Wahl zwischen verschiedenen Verkehrsmitteln)
- Ordinale Variablen: Diese Variablen haben ebenfalls mehr als zwei mögliche Kategorien, sind aber geordnet (z.B. Kreditrating)

Beispiele für ökonometrische Analysen mit binären abhängigen Variablen:

- Analyse der Faktoren, die erklären, ob eine Person erwerbstätig oder aber erwerbslos ist
- Analyse der Faktoren, die erklären, ob eine Person ein bestimmtes Verkehrsmittel wählt oder aber ein anderes Verkehrsmittel
- Analyse der Faktoren, die erklären, ob eine Person einem politischen Programm zustimmt oder nicht
- Analyse der Faktoren, die erklären, ob ein Unternehmen eine Innovation durchgeführt hat oder nicht

Mit y_i ($i = 1, \dots, n$) als binäre abhängige Variable, $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})'$ als Vektor von k erklärenden Variablen (einschließlich Konstante) und mit dem entsprechenden k -dimensionalen Parametervektor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ kann ein ökonometrisches Modell wie ein lineares Regressionsmodell spezifiziert werden:

$$(6.1) \quad y_i = \beta'x_i + u_i$$

Ein solches lineares Regressionsmodell mit einer binären abhängigen Variablen wird als lineares Wahrscheinlichkeitsmodell bezeichnet. Mit $E(u_i|x_i) = 0$ folgt:

$$(6.2) \quad E(y_i|x_i) = \beta'x_i$$

Da y_i eine binäre Variable ist mit $y_i = 1$ oder $y_i = 0$, ist sie Bernoulli verteilt mit Parameter p_i und der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$(6.3) \quad f_i(y_i; p) = p_i^{y_i} (1-p_i)^{1-y_i} \quad \text{für } y_i = 0, 1$$

Im linearen Wahrscheinlichkeitsmodell folgt:

$$(6.4) \quad p_i = p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1|x_i, \beta) = E(y_i|x_i) = \beta'x_i$$

Interpretation der Steigungsparameter:

- Die Steigungsparameter β_h ($h = 2, \dots, k$) geben nicht mehr die Veränderung von y_i bei einem Anstieg der erklärenden Variablen x_{ih} um eine Einheit an (falls alle anderen erklärenden Variablen konstant gehalten werden)
- Stattdessen weist β_h ($h = 2, \dots, k$) die Veränderung der Wahrscheinlichkeit $p_i(x_i, \beta)$, dass y_i den Wert eins annimmt, bei einer Erhöhung von x_{ih} um eine Einheit (bei quantitativen erklärenden Variablen) aus (ceteris paribus)

Falls alle anderen erklärenden Variablen konstant gehalten werden, ergibt sich:

$$(6.5) \quad \Delta p_i(x_i, \beta) = \Delta P(y_i = 1|x_i, \beta) = \beta_h \Delta x_{ih}$$

Wie bei der OLS-Schätzung in linearen Regressionsmodellen können die unbekanntes Regressionsparameter β_1, \dots, β_k auch im linearen Wahrscheinlichkeitsmodell mit der OLS-Methode geschätzt werden. Dies führt zum OLS-Schätzer des Parametervektors $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)$. Es folgt:

- Der Schätzer der abhängigen Variablen ist $\hat{y}_i = \hat{\beta}'x_i$, der die geschätzte Wahrscheinlichkeit $\hat{p}_i(x_i, \beta)$, dass y_i den Wert eins annimmt, darstellt
- Der geschätzte Steigungsparameter $\hat{\beta}_h$ ($h = 2, \dots, k$) gibt die Veränderung der geschätzten Wahrscheinlichkeit $\hat{p}_i(x_i, \beta)$ an, falls x_{ih} um eine Einheit (bei quantitativen erklärenden Variablen) steigt (ceteris paribus)

Problem:

Da y_i Bernoulli verteilt ist mit dem Parameter $p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1|x_i, \beta) = \beta'x_i$ und $u_i = -\beta'x_i$ für $y_i = 0$ und $u_i = 1 - \beta'x_i$ für $y_i = 1$, folgt für die bedingte Varianz von y_i und die bedingte Varianz des Störterms u_i :

$$(6.6) \quad \text{Var}(y_i|x_i) = \text{Var}(u_i|x_i) = \beta'x_i(1 - \beta'x_i)$$

Die bedingte Varianz des Störterms ist damit notwendigerweise nicht konstant, so dass Heteroskedastizität vorliegt. Deshalb sollten zumindest heteroskedastizitäts-robuste t-Statistiken verwendet werden.

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen

Mit Hilfe eines linearen Wahrscheinlichkeitsmodells soll der Effekt anderer Einkommen (in 1000 Dollar) einschließlich der des Ehemanns ($nwifeinc$), der Ausbildungszeit in Jahren ($educ$), der Berufserfahrung in Jahren ($exper$), der quadrierten Berufserfahrung in Jahren ($expersq$), des Alters in Jahren (age) sowie der Anzahl der Kinder unter sechs Jahren ($kidslt6$) bzw. zwischen sechs und 18 Jahren ($kidsge6$) auf die Erwerbstätigkeit ($inlf$) von verheirateten Frauen untersucht werden. Dabei nimmt $inlf$ den Wert eins an, falls die Frau erwerbstätig ist. Die folgende OLS-Regressionsgleichung wurde mit $n = 753$ Frauen geschätzt, wobei auch heteroskedastizitäts-robust geschätzte Standardabweichungen der geschätzten Parameter (in eckigen Klammern) zusätzlich zu den konventionell geschätzten Standardabweichungen ausgewiesen werden ($R^2 = 0,264$):

$$\begin{aligned} \hat{inlf} = & 0,586 - 0,003nwifeinc + 0,038educ + 0,039exper - 0,001expersq \\ & (0,154) (0,001) \quad (0,007) \quad (0,006) \quad (0,000) \\ & [0,152] [0,002] \quad [0,007] \quad [0,006] \quad [0,000] \\ & - 0,016age - 0,262kidslt6 + 0,013kidsge6 \\ & (0,002) \quad (0,034) \quad (0,013) \\ & [0,002] \quad [0,032] \quad [0,014] \end{aligned}$$

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen (Fortsetzung)

Interpretation:

- Auf der Grundlage beider t-Statistiken haben alle erklärenden Variablen außer kidsge6 signifikante Effekte
- Ein zusätzliches Ausbildungsjahr führt zu einer geschätzten Erhöhung der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um 0,038 oder 3,8 Prozentpunkte (ceteris paribus)
- Zehn zusätzliche Ausbildungsjahre implizieren somit eine sehr starke geschätzte Erhöhung der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um $0,038 \cdot 10 = 0,38$ oder 38 Prozentpunkte
- Eine Erhöhung von nwifeinc um 10000 Dollar (d.h. $\Delta nwifeinc = 10$) führt zu einer eher kleinen geschätzten Reduktion der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um 0,034 oder 3,4 Prozentpunkte
- Eine Erhöhung von exper um ein Jahr führt zu einer approximativ geschätzten Veränderung der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um $0,039 - 2 \cdot 0,0006 \cdot exper = 0,039 - 0,0012 \cdot exper$
- Ein zusätzliches Kind unter sechs Jahren impliziert einen sehr starken geschätzten Rückgang der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um 0,262 oder 26,2 Prozentpunkte

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse mit heteroskedastizitäts-robust geschätzten Standardabweichungen der geschätzten Parameter gezeigt:

```
reg inlf nwifeinc educ exper expersq age kidslt6 kidsge6, robust
```

```
Linear regression
```

```
Number of obs =      753  
F( 7, 745) =    62.48  
Prob > F      =    0.0000  
R-squared     =    0.2642  
Root MSE     =    .42713
```

		Robust				
inlf	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
nwifeinc	-.0034052	.0015249	-2.23	0.026	-.0063988	-.0004115
educ	.0379953	.007266	5.23	0.000	.023731	.0522596
exper	.0394924	.00581	6.80	0.000	.0280864	.0508983
expersq	-.0005963	.00019	-3.14	0.002	-.0009693	-.0002233
age	-.0160908	.002399	-6.71	0.000	-.0208004	-.0113812
kidslt6	-.2618105	.0317832	-8.24	0.000	-.3242058	-.1994152
kidsge6	.0130122	.0135329	0.96	0.337	-.013555	.0395795
_cons	.5855192	.1522599	3.85	0.000	.2866098	.8844287

Bewertung von linearen Wahrscheinlichkeitsmodellen:

- Die Parameter sind genauso wie in linearen Regressionsmodellen einfach mit der OLS-Methode zu schätzen und die geschätzten Steigungsparameter sind einfach als geschätzte partielle Effekte zu interpretieren
- Jedoch sind die geschätzten Wahrscheinlichkeiten $\hat{p}_i(x_i, \beta) = \hat{P}(y_i = 1 | x_i, \beta)$, dass die abhängigen Variablen y_i den Wert eins annehmen, nicht auf das Intervall zwischen null und eins beschränkt, d.h. für spezifische Werte der erklärenden Variablen können die geschätzten Wahrscheinlichkeiten entgegen der Definition von Wahrscheinlichkeiten negativ oder größer als eins sein
- Zudem hängen Wahrscheinlichkeiten für alle denkbaren Werte linear mit einer erklärenden Variablen zusammen. Die vorherige Schätzung impliziert z.B. eine geschätzte Reduktion der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um 0,262, falls sich die Anzahl der Kinder unter sechs Jahren von null auf eins erhöht. Diese Reduktion wird genauso bei einer Erhöhung von einem Kind auf zwei Kinder geschätzt, obwohl eine Abschwächung des Rückgangs mit zunehmenden Kinderzahlen realistischer erscheint. Die vorherige Analyse impliziert sogar den definitionsgemäß unmöglichen Fall, dass vier zusätzliche Kinder zu einem geschätzten Rückgang der Wahrscheinlichkeit der Erwerbstätigkeit um $0,262 \cdot 4 = 1,048$ oder 104,8 Prozentpunkte führen.

→ Aus diesen Gründen wird das lineare Wahrscheinlichkeitsmodell nur noch sehr selten in empirischen Anwendungen verwendet

6.2 Binäre Probit- und Logitmodelle

Binäre abhängige Variablen y_i in einem ökonometrischen Modell mit dem Vektor $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})'$ von k erklärenden Variablen und dem entsprechenden Parametervektor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ sind generell Bernoulli verteilt mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion ($i = 1, \dots, n$):

$$(6.7) \quad f_i(y_i; x_i, \beta) = p_i(x_i, \beta)^{y_i} [1 - p_i(x_i, \beta)]^{1-y_i} \\ = P(y_i = 1 | x_i, \beta)^{y_i} [1 - P(y_i = 1 | x_i, \beta)]^{1-y_i} \quad \text{für } y_i = 0, 1$$

Unterschiedliche Modelle mit binären abhängigen Variablen resultieren aus unterschiedlichen Spezifikationen der Wahrscheinlichkeit $p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1 | x_i, \beta)$, dass die abhängige Variable y_i den Wert eins annimmt. Bei linearen Wahrscheinlichkeitsmodellen ist diese Wahrscheinlichkeit identisch mit $\beta'x$, so dass keine Werte zwischen null und eins gewährleistet sind.

Diese Werte können durch nichtlineare Funktionen $F_i(x_i, \beta) = F_i(\beta'x_i)$ und vor allem durch Verteilungsfunktionen beliebiger Zufallsvariablen sichergestellt werden. Bei binären Probitmodellen ist $F_i(\beta'x_i) = \Phi_i(\beta'x_i)$ der Wert der Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen bei $\beta'x_i$:

$$(6.8) \quad F_i(\beta'x_i) = \Phi_i(\beta'x_i) = p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1 | x_i, \beta) = \int_{-\infty}^{\beta'x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p_i(x_i, \beta)$ in binären Probitmodellen müssen somit durch Integration berechnet werden.

Im Fall von binären Logitmodellen ist $F_i(\beta'x_i) = \Lambda_i(\beta'x_i)$ der Wert der Verteilungsfunktion einer standardlogistischen Verteilung bei $\beta'x_i$:

$$(6.9) \quad F_i(\beta'x_i) = \Lambda_i(\beta'x_i) = p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1|x_i, \beta) = \frac{e^{\beta'x_i}}{1 + e^{\beta'x_i}}$$

Im Unterschied zu binären Probitmodellen müssen die Wahrscheinlichkeiten $p_i(x_i, \beta)$ in binären Logitmodellen nicht durch Integration ermittelt werden, sondern weisen eine geschlossene Form auf.

→ Trotz der substantziellen Unterschiede in der funktionalen Form sind die Wahrscheinlichkeiten $p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1|x_i, \beta)$ in binären Probit- und Logitmodellen (außer für einen konstanten Skalierungsfaktor) sehr ähnlich, so dass die Wahl zwischen den beiden ökonometrischen Modellen in empirischen Untersuchungen kaum einen Unterschied macht

Interpretation des Parameters β_h in binären Probit- und Logitmodellen in Bezug auf den (partiellen) Effekt der erklärenden Variablen x_{ih} ($h = 2, \dots, k$) auf die Wahrscheinlichkeit $p_i(x_i, \beta) = P(y_i = 1|x_i, \beta)$:

- Der Parameter β_h kann nicht so einfach wie im linearen Wahrscheinlichkeitsmodell interpretiert werden, d.h. er kann nicht als Veränderung von $p_i(x_i, \beta)$ interpretiert werden, falls (ceteris paribus) x_{ih} um eine Einheit steigt (für eine quantitative erklärende Variable)

- Stattdessen beträgt der (partielle) marginale Wahrscheinlichkeitseffekt von x_{ih} in binären Probit- und Logitmodellen wie folgt ($i = 1, \dots, n$):

$$\frac{\partial p_i(x_i, \beta)}{\partial x_{ih}} = \frac{\partial F_i(\beta'x_i)}{\partial x_{ih}} = \frac{dF_i(\beta'x_i)}{d(\beta'x_i)} \frac{\partial \beta'x_i}{\partial x_{ih}} = f_i(\beta'x_i)\beta_h$$

Dabei ist $F_i(\beta'x_i)$ in binären Probitmodellen die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen und in binären Logitmodellen die Verteilungsfunktion einer standardlogistisch verteilten Zufallsvariablen. Zudem ist $f_i(\beta'x_i)$ die entsprechende Dichtefunktion.

- Falls alle anderen erklärenden Variablen konstant gehalten werden, ergibt sich bei einer Veränderung Δx_{ih} :

$$(5.10) \quad \Delta p_i(x_i, \beta) \approx [f(\beta'x_i)\beta_h] \Delta x_{ih}$$

Je kleiner die Veränderung Δx_{ih} , desto besser ist die lineare Approximation.

Wichtige Aspekte der (partiellen) marginalen Wahrscheinlichkeitseffekte:

- Das Vorzeichen des Parameters β_h gibt die Richtung des marginalen Wahrscheinlichkeitseffektes von x_{ih} an
- Die marginalen Wahrscheinlichkeitseffekte sind für $\beta'x_i = 0$ maximal, da die Dichtefunktionen an diesem Wert maximal sind
- Die marginalen Wahrscheinlichkeitseffekte variieren nicht nur mit unterschiedlichen Werten der erklärenden Variablen x_{ih} , sondern auch mit unterschiedlichen Werten der anderen erklärenden Variablen

→ In empirischen Analysen ist die Betrachtung marginaler Wahrscheinlichkeitseffekte einer erklärenden Variablen x_{ih} für eine typische Beobachtung i (z.B. Person, Haushalt, Unternehmen) interessant. Deshalb werden häufig durchschnittliche marginale Wahrscheinlichkeitseffekte über alle $i = 1, \dots, n$ Beobachtungen geschätzt oder marginale Wahrscheinlichkeitseffekte, die am arithmetischen Mittel der erklärenden Variablen ermittelt werden.

Parameterschätzung:

- Bei binären Probit- und Logitmodellen ist die Schätzung der Parameter mit der OLS-Methode nicht geeignet, da die wesentlichen Annahmen (Vorliegen eines linearen Regressionsmodells) für günstige Schätzeigenschaften nicht gegeben sind. Aus diesem Grund sollte die OLS-Methode durch alternative Schätzmethoden ersetzt werden.
- Der wichtigste Ansatz für binäre Probit- und Logitmodelle ist die Maximum Likelihood Methode (ML), die auf einer parametrischen Verteilung der abhängigen Variablen basiert
- Die ML ist das wichtigste Schätzverfahren bei qualitativen abhängigen Variablen (bzw. allgemein bei mikroökonomischen Modellen) und weist unter bestimmten Annahmen sehr günstige Eigenschaften auf, d.h. ML-Schätzer sind konsistent und asymptotisch effizient (wenn auch meist nicht erwartungstreu) und Funktionen von ML-Schätzern sind asymptotisch normalverteilt (so dass sich t- bzw. z-Statistiken ableiten lassen)

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen

Wie im vorherigen Beispiel soll der Effekt anderer Einkommen, der Ausbildungszeit in Jahren, der einfachen und quadrierten Berufserfahrung, des Alters sowie der Anzahl der Kinder unter sechs Jahren bzw. zwischen sechs und 18 Jahren auf die Erwerbstätigkeit von $n = 753$ verheirateten Frauen untersucht werden. Jedoch werden jetzt keine linearen Wahrscheinlichkeitsmodelle, sondern binäre Probit- und Logitmodelle untersucht. Dabei haben sich mit STATA folgende ML-Schätzergebnisse im binären Probitmodell gezeigt:

```
probit inlf nwifeinc educ exper expersq age kidslt6 kidsge6
```

```
Probit regression                               Number of obs   =           753
                                                LR chi2(7)      =          227.14
                                                Prob > chi2     =           0.0000
Log likelihood = -401.30219                    Pseudo R2      =           0.2206
```

inlf	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
nwifeinc	-.0120237	.0048398	-2.48	0.013	-.0215096	-.0025378
educ	.1309047	.0252542	5.18	0.000	.0814074	.180402
exper	.1233476	.0187164	6.59	0.000	.0866641	.1600311
expersq	-.0018871	.00006	-3.15	0.002	-.003063	-.0007111
age	-.0528527	.0084772	-6.23	0.000	-.0694678	-.0362376
kidslt6	-.8683285	.1185223	-7.33	0.000	-1.100628	-.636029
kidsge6	.036005	.0434768	0.83	0.408	-.049208	.1212179
_cons	.2700768	.508593	0.53	0.595	-.7267472	1.266901

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen (Fortsetzung)

Im binären Logitmodell haben sich mit STATA dagegen folgende ML-Schätzergebnisse gezeigt:

```
logit inlf nwifeinc educ exper expersq age kidslt6 kidsge6
Logistic regression                               Number of obs   =       753
                                                    LR chi2(7)      =       226.22
                                                    Prob > chi2     =       0.0000
Log likelihood = -401.76515                       Pseudo R2      =       0.2197
```

	inlf	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf. Interval]	
nwifeinc		-.0213452	.0084214	-2.53	0.011	-.0378509	-.0048394
educ		.2211704	.0434396	5.09	0.000	.1360303	.3063105
exper		.2058695	.0320569	6.42	0.000	.1430391	.2686999
expersq		-.0031541	.0010161	-3.10	0.002	-.0051456	-.0011626
age		-.0880244	.014573	-6.04	0.000	-.116587	-.0594618
kidslt6		-1.443354	.2035849	-7.09	0.000	-1.842373	-1.044335
kidsge6		.0601122	.0747897	0.80	0.422	-.086473	.2066974
_cons		.4254524	.8603697	0.49	0.621	-1.260841	2.111746

Die Darstellung sämtlicher Schätzergebnisse im linearen Wahrscheinlichkeitsmodell sowie im binären Probit- und Logitmodell, die typischerweise zumindest die Schätzwerte, die t- bzw. z-Statistiken oder geschätzten Standardabweichungen der geschätzten Parameter sowie Informationen über die Signifikanz des Effektes der erklärenden Variablen enthält, hat z.B. folgendes Aussehen: 13

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von Frauen (Fortsetzung)

ML-Schätzwerte (z-Statistiken), abhängige Variable: Erwerbstätigkeit (inlf)			
Erklärende Variablen	Lineares Wahrscheinlichkeitsmodell	Binäres Probitmodell	Binäres Logitmodell
nwifeinc	-0.003** (-2.23)	-0.012** (-2.48)	-0.021** (-2.53)
educ	0.038*** (5.23)	0.131*** (5.18)	0.221*** (5.09)
exper	0.039*** (6.80)	0.123*** (6.59)	0.206*** (6.42)
expersq	-0.001*** (-3.14)	-0.002*** (-3.15)	-0.003*** (-3.10)
age	-0.016*** (-6.71)	-0.053*** (-6.23)	-0.088*** (-6.04)
kidslt6	-0.262*** (-8.24)	-0.868*** (-7.33)	-1.443*** (-7.09)
kidsge6	0.013 (0.96)	0.036 (0.83)	0.060 (0.80)
Konstante	0.586 (3.85)	0.270 (0.53)	0.425 (0.49)

Anmerkung: *** (**, *) bedeutet, dass die entsprechende erklärende Variable zum 1% (5%, 10%) Signifikanzniveau einen Effekt aufweist, n = 753

Beispiel: Erklärung der Erwerbstätigkeit von verheirateten Frauen (Fortsetzung)

Interpretation:

- Die Schätzergebnisse sind in allen drei ökonometrischen Modellen mit binären abhängigen Variablen qualitativ sehr ähnlich, d.h. die Vorzeichen der Parameterschätzwerte sind identisch und dieselben erklärenden Variablen haben einen signifikanten Effekt
- Allerdings ist die Höhe der Schätzwerte aufgrund unterschiedlicher Schätzungen der durchschnittlichen marginalen Wahrscheinlichkeitseffekte über alle Beobachtungen oder der marginalen Wahrscheinlichkeitseffekte am arithmetischen Mittel der erklärenden Variablen nicht direkt vergleichbar
- Eine kurze Überprüfung der Parameterschätzwerte in binären Probit- und Logitmodellen ergibt sich durch die Berücksichtigung der unterschiedlichen Skalierungsfaktoren in den marginalen Wahrscheinlichkeitseffekten, d.h. als Faustregel können Schätzwerte in binären Probitmodellen mit 1,6 multipliziert (oder umgekehrt durch 0,625 dividiert) werden, um sie mit den Schätzwerten in binären Logitmodellen vergleichbar zu machen