3. Tests in linearen Regressionsmodellen

3.1 Verteilung der mit OLS geschätzten Regressionsparameter

Hintergrund:

Der Erwartungswert und die Varianz von OLS-Schätzern in linearen Regressionsmodellen sind sehr nützlich, um die Präzision der Schätzer zu beschreiben. Für die Durchführung von statistischen Tests reichen diese ersten beiden Momente der Verteilung der geschätzten Regressionsparameter aber nicht aus. Hierzu benötigt man Informationen zur kompletten Verteilung, die von der Verteilung des Störterms abhängt. Aus diesem Grund wird nun zusätzlich zu den Annahmen A1 bis A5 aus Kapitel 2 eine weitere Annahme getroffen.

Annahme A6: Normalverteilung

Der Störterm u ist von den erklärenden Variablen x_1, x_2, …, x_k unabhängig und normalverteilt mit einem Erwartungswert von null und einer Varianz von σ^2, d.h. es gilt: $u \sim N(0; \sigma^2)$

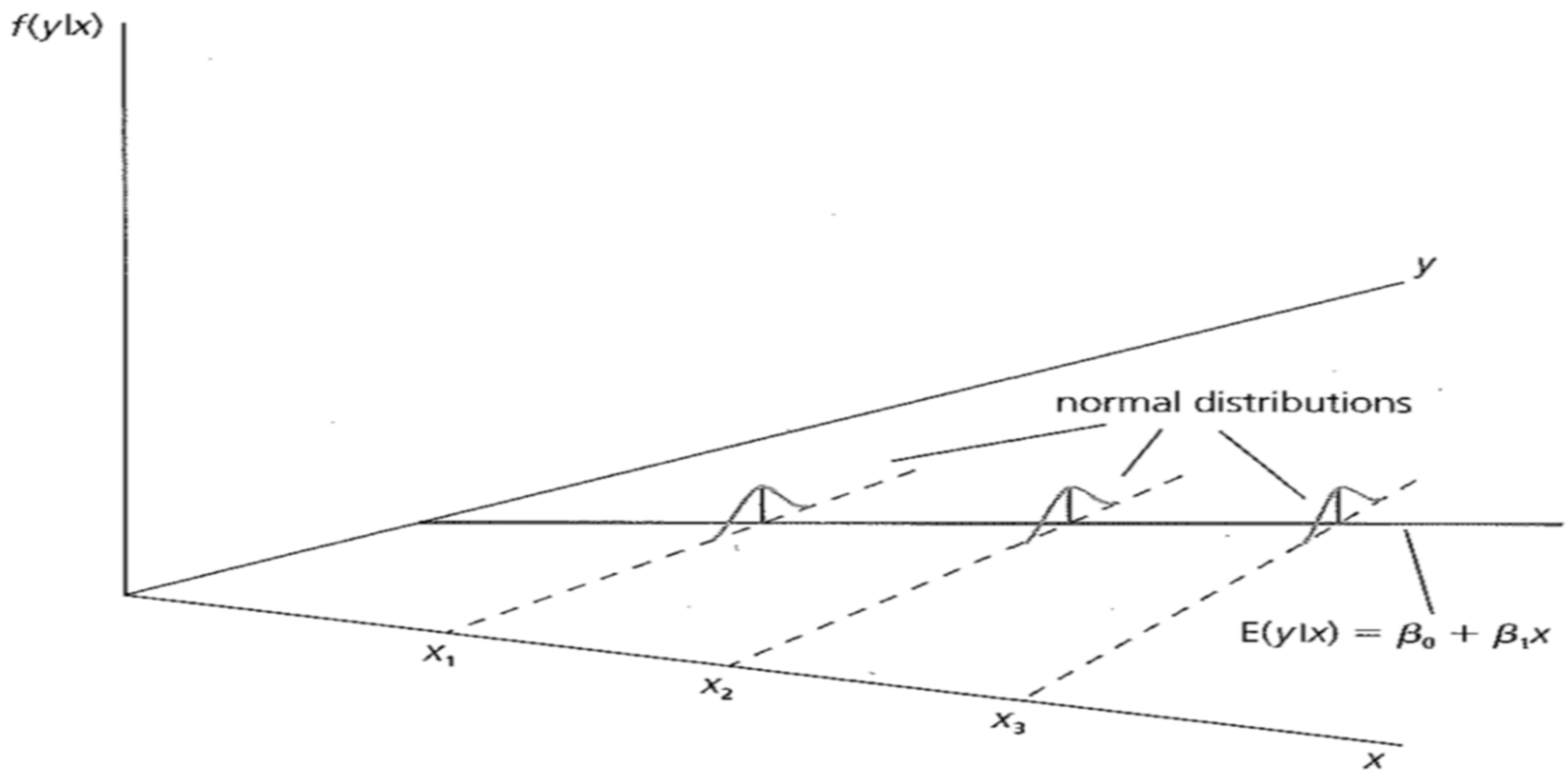
→ Annahme A6 impliziert die Annahmen A4 (bedingter Erwartungswert von u ist null) und A5 (Homoskedastizität). Die Annahmen A1 bis A6 werden (im Falle von Regressionsanalysen mit Querschnittsdaten) auch als klassische lineare Modellannahmen bezeichnet. Der entsprechende Ansatz wird dementsprechend auch als klassisches lineares Regressionsmodell bezeichnet.

Bei einem klassischen linearen Regressionsmodell (d.h. mit den Annahmen A1 bis A6) gilt für die abhängige Variable:

$$y|x_1, x_2, \ldots, x_k \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k; \sigma^2)$$

In einem einfachen klassischen linearen Regressionsmodell ergibt sich dann:

The homoskedastic normal distribution with a single explanatory variable.



Bei einem klassischen linearen Regressionsmodell (d.h. mit den Annahmen A1 bis A6) ergibt sich:

Die OLS-Schätzer sind die besten unverzerrten Schätzer der Regressionsparameter in linearen Regressionsmodellen („BUE, best unbiased estimator"). Damit haben die OLS-Schätzer eine stärkere Effizienzeigenschaft als wenn lediglich die Gauss-Markov-Annahmen (Annahmen A1 bis A5) gelten, d.h. die OLS-Schätzer haben nicht nur in der Klasse aller linearen unverzerrten Schätzer die geringste Varianz, sondern in der Klasse aller unverzerrten Schätzer.

Zu Annahme A6:

Die Annahme eines normalverteilten Störterms wird oft damit gerechtfertigt, dass u die Summe zahlreicher verschiedener Faktoren darstellt, die auf die abhängige Variable y einwirken. Mit der Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes könnte daher von einer approximativen Normalverteilung des Störterms ausgegangen werden. Allerdings ergeben sich bei diesem Argument mehrere Probleme (z.B. stellt sich die Frage, ob die unbeobachteten Faktoren die abhängige Variable in additiver Form beeinflussen). Die Annahme zumindest approximativ normalverteilter Störterme bzw. abhängiger Variablen ist deshalb letztlich eine empirische Frage.

→ Allerdings ist eine von der Normalverteilung abweichende Verteilung des Störterms im Hinblick auf die Durchführung von statistischen Tests bei großen Stichprobenumfängen kein großes Problem (siehe später)

Falls Annahme A6 und damit ein normalverteilter Störterm vorliegt, sind auch die mit OLS geschätzten Steigungsparameter in linearen Regressionsmodellen normalverteilt, d.h. es gilt unter Einbeziehung von (2.33) (j = 1,…, k):

$$(3.1) \quad \hat{\beta}_j \sim N[\beta_j; \mathrm{Var}(\hat{\beta}_j)] \ \text{ bzw. } \ \hat{\beta}_j \sim N\left[\beta_j; \frac{\sigma^2}{(1-R_j^2)\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}\right]$$

Damit ergibt sich (j = 1,…, k):

$$(3.2) \quad \frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j)}} \sim N(0; 1) \ \text{ bzw. } \ \frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{(1-R_j^2)\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}}} \sim N(0; 1)$$

Zudem gilt, dass jede lineare Funktion der mit OLS geschätzten Regressionsparameter $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$,…, $\hat{\beta}_k$ auch normalverteilt ist.

3.2 Testen von Hypothesen über einen Regressionsparameter

Allerdings sind die Varianzen oder Standardabweichungen der mit OLS geschätzten Steigungsparameter in linearen Regressionsmodellen in der Regel nicht bekannt und müssen deshalb geschätzt werden. Falls die Annahmen A1 bis A6 gelten, ergibt sich mit (2.39):

$$(3.3) \quad \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}} \sim t_{n-k-1} \text{ bzw. } \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\dfrac{\hat{\sigma}}{\sqrt{(1-R_j^2)\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}}} \sim t_{n-k-1}$$

Dabei ist k+1 die Anzahl der unbekannten Regressionsparameter. Die t-Verteilung mit n-k-1 Freiheitsgraden in (3.3) ergibt sich gegenüber der Standardnormalverteilung in (3.2) durch die Einbeziehung der Schätzung $\hat{\sigma}$ der Standardabweichung σ des Störterms u.

Die wichtigste zu testende Nullhypothese in empirischen Anwendungen lautet:

$$(3.4) \quad H_0: \beta_j = 0 \quad \text{für } j = 1,\dots, k$$

Die Nullhypothese über den Steigungsparameter β_j impliziert, dass die erklärende Variable x_j keinen partiellen Effekt auf die abhängige Variable y hat.

Beispiel: Erklärung von Löhnen

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll wiederum der Effekt der Ausbildungszeit in Jahren (educ), der Berufserfahrung in Jahren (exper) und der Betriebszugehörigkeit in Jahren (tenure) auf den Logarithmus des Stundenlohns (logwage) untersucht werden:

$$\text{logwage} = \beta_0 + \beta_1 \text{educ} + \beta_2 \text{exper} + \beta_3 \text{tenure} + u$$

Die Nullhypothese H_0: $\beta_2 = 0$ impliziert dann, dass nach der Kontrolle für educ und tenure die Berufserfahrung in Jahren keinen Effekt auf den Logarithmus des Stundenlohns hat. Für $\beta_2 > 0$ hat exper dagegen einen positiven Effekt.

Testidee zur Überprüfung von H_0: $\beta_j = 0$:

- Zunächst wird die OLS-Schätzung des Regressionsparameters $\hat{\beta}_j$ ermittelt
- Da die geschätzten Regressionsparameter in empirischen Anwendungen praktisch nie null sind, ist allerdings die alleinige Abweichung des Schätzwertes von null nicht ausreichend für die Ablehnung der Nullhypothese
- Aufgrund des Stichprobenfehlers muss $\hat{\beta}_j$ dagegen deutlich von null verschieden sein
- Dazu benötigt man die Verteilung einer Funktion von $\hat{\beta}_j$

Als Prüfgröße wird hierzu folgende t-Statistik (t-Wert) betrachtet, die die geschätzte Standardabweichung des geschätzten Parameters einbezieht:

$$(3.5) \quad t_{\hat{\beta}_j} = t_{j} = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}}$$

Ökonometrische Programmpakete wie z.B. STATA weisen t-Werte bei der OLS-Schätzung linearer Regressionsmodelle standardmäßig aus. Da die geschätzte Standardabweichung des geschätzten Parameters immer positiv ist, bestimmt das Vorzeichen des geschätzten Parameters das Vorzeichen der t-Statistik.

→ Die Überprüfung von H_0: $\beta_j = 0$ bei einem vorgegebenen Signifikanzniveau ergibt sich durch die Kenntnis, dass die t-Statistik bei Gültigkeit der Nullhypothese nach (3.3) t-verteilt ist mit n-k-1 Freiheitsgraden

Einseitige Fragestellung:

Dabei gilt für die Alternativhypothesen H_1: $\beta_j > 0$ oder H_1: $\beta_j < 0$. Im ersten Fall wird die Nullhypothese verworfen, wenn die t-Statistik einen hinreichend großen positiven Wert überschreitet. Im zweiten Fall wird die Nullhypothese verworfen, wenn die t-Statistik einen hinreichend hohen negativen Wert unterschreitet.

Zur Durchführung des Testverfahrens:

- Zur Ermittlung des Schrankenwertes benötigt man die Anzahl der Freiheitsgrade aus der t-Verteilung sowie ein vorgegebenes kleines Signifikanzniveau (d.h. die maximale Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird, obwohl sie tatsächlich gültig ist)
- Bei einem Signifikanzniveau von α (0<α<1) wird das (1-α)-Quantil der t-Verteilung mit n-k-1 Freiheitsgraden $t_{n-k-1;1-\alpha}$ betrachtet (die Werte sind tabelliert)
- H_0: $\beta_j = 0$ wird somit zugunsten von H_1: $\beta_j > 0$ verworfen, falls der t-Wert größer ist als $t_{n-k-1;1-\alpha}$
- H_0: $\beta_j = 0$ wird somit zugunsten von H_1: $\beta_j < 0$ verworfen, falls der t-Wert kleiner ist als $-t_{n-k-1;1-\alpha}$
- Mit sinkendem Signifikanzniveau steigen die Schrankenwerte, so dass die t-Statistik höhere Absolutwerte zur Ablehnung von H_0: $\beta_j = 0$ annehmen muss
- Mit einer Zunahme der Anzahl an Freiheitsgraden sinken die Schrankenwerte, so dass die t-Statistik geringere Absolutwerte zur Ablehnung von H_0: $\beta_j = 0$ annehmen muss
- Mit einer Zunahme der Anzahl an Freiheitsgraden nähert sich die t-Verteilung der Standardnormalverteilung an, so dass man in diesem Fall (d.h. wenn keine tabellierten Werte für die t-Verteilung mehr vorliegen) zur Ermittlung der Schrankenwerte auch die Quantile der Standardnormalverteilung verwenden kann (z.B. für n-k-1 > 120)

Beispiel: Erklärung von Löhnen

Wie zuvor soll wieder mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells der Effekt der Ausbildungszeit in Jahren (educ), der Berufserfahrung in Jahren (exper) und der Betriebszugehörigkeit in Jahren (tenure) auf den Logarithmus des Stundenlohns (logwage) untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt (in Klammern sind die geschätzten Standardabweichungen der geschätzten Parameter angegeben):

$$\widehat{\text{logwage}} = \underset{(0{,}104)}{0{,}284} + \underset{(0{,}007)}{0{,}092}\,\text{educ} + \underset{(0{,}0017)}{0{,}0041}\,\text{exper} + \underset{(0{,}003)}{0{,}022}\,\text{tenure}$$

Es soll H_0: $\beta_{exper} = 0$ gegen H_1: $\beta_{exper} > 0$ getestet werden:

- Da n = 526 beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade n-k-1 = 526-3-1 = 522
- Bei dieser hohen Anzahl an Freiheitsgraden betrachtet man Quantile der Standardnormalverteilung: Bei einem Signifikanzniveau von 0,05 ergibt sich der Schrankenwert $t_{522;0,95} = 1{,}645$ und bei einem Signifikanzniveau von 0,01 ergibt sich der Schrankenwert $t_{522;0,99} = 2{,}326$
- Für die t-Statistik ergibt sich dann $t_{exper} = 0{,}0041/0{,}0017 = 2{,}41$. Somit ist $\hat{\beta}_{exper}$ sowohl zum 5%- und auch zum 1%-Signifikanzniveau (statistisch) signifikant größer als null.

In empirischen Analysen wird allerdings bei der Überprüfung von H_0: $\beta_j = 0$ anstatt der einseitigen Fragestellung in der Regel die zweiseitige Fragestellung untersucht. Dabei gilt für die Alternativhypothese:

$$(3.6) \quad H_1: \beta_j \neq 0 \quad \text{für } j = 1,\ldots, k$$

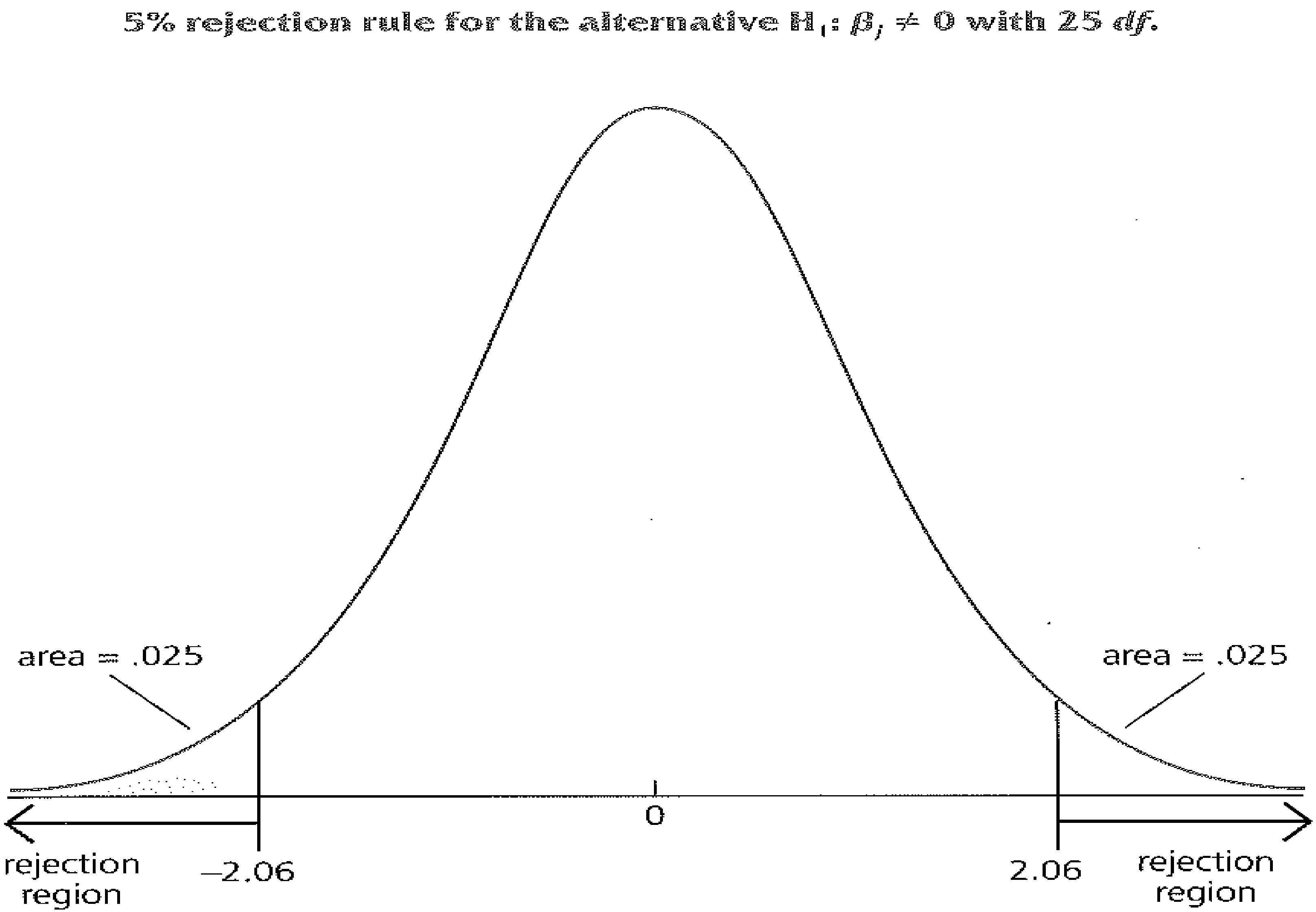
In diesem Fall wird die Nullhypothese verworfen, wenn die t-Statistik entweder einen hinreichend großen positiven Wert überschreitet oder einen hinreichend hohen negativen Wert unterschreitet. Dabei wird bei einem Signifikanzniveau von α das (1-α/2)-Quantil $t_{n-k-1;1-\alpha/2}$ der t-Verteilung mit n-k-1 Freiheitsgraden betrachtet.

Die Nullhypothese wird somit verworfen, falls:

$$(3.7) \quad \left| t_{\hat{\beta}_j} \right| > t_{n-k-1;1-\alpha/2}$$

Wenn z.B. die Anzahl der Freiheitsgrade n-k-1 = 25 ist, gilt bei einem Signifikanzniveau von 5% für das Quantil aus der t-Verteilung mit 25 Freiheitsgraden $t_{25;0,975} = 2{,}060$. Wenn in diesem Fall der Absolutwert der t-Statistik größer als 2,060 ist, ist der entsprechende geschätzte Regressionsparameter zu diesem Signifikanzniveau von null verschieden. Damit hat die entsprechende erklärende Variable einen (statistisch) signifikanten Effekt auf die abhängige Variable.

Graphische Darstellung:



Beispiel: Erklärung von College-Noten

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll der Effekt der durchschnittlichen Punktzahl in der Highschool (hsGPA), der Punktzahl im College-Aufnahmetest (ACT) und der durchschnittlichen Anzahl verpasster Vorlesungen pro Woche (skipped) auf die durchschnittliche College-Punktzahl (colGPA) untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt:

$$\widehat{\text{colGPA}} = \underset{(0{,}33)}{1{,}39} + \underset{(0{,}094)}{0{,}412}\,\text{hsGPA} + \underset{(0{,}011)}{0{,}015}\,\text{ACT} - \underset{(0{,}026)}{0{,}083}\,\text{skipped}$$

$$n = 141,\ R^2 = 0{,}234$$

Bei einem 5%-Signifikanzniveau ergibt sich für das Quantil aus der t-Verteilung mit n-k-1 = 141-4 = 137 Freiheitsgraden bzw. das Quantil aus der Standardnormalverteilung $t_{137;0,975} = 1{,}96$. Bei einem 1%-Signifikanzniveau ergibt sich ein Wert von 2,58. Die t-Werte betragen dann für hsGPA 4,38, für ACT 1,36 und für skipped -3,19 (Abweichungen vom STATA-Output aufgrund von Rundungen). Damit hat hsGPA einen (statistisch) signifikant positiven Effekt, skipped einen (statistisch) signifikant negativen Effekt und ACT keinen (statistisch) signifikanten Effekt auf colGPA.

Beispiel: Erklärung von College-Noten (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg colGPA hsGPA ACT skipped

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     141
-------------+------------------------------           F(  3,   137) =   13.92
       Model |  4.53313277     3  1.51104426           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  14.8729665   137  .108561799           R-squared     =  0.2336
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2168
       Total |  19.4060993   140  .138614995           Root MSE      =  .32949

------------------------------------------------------------------------------
      colGPA |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       hsGPA |   .4118161   .0936742     4.40   0.000     .2265818    .5970504
         ACT |   .0147202   .0105649     1.39   0.166    -.0061711    .0356115
     skipped |  -.0831131   .0259985    -3.20   0.002    -.1345234   -.0317028
       _cons |   1.389554   .3315535     4.19   0.000     .7339296    2.045178
------------------------------------------------------------------------------
```

Im Folgenden wird getestet, ob ein Regressionsparameter β_j einer beliebigen Konstante a_j entspricht. Die allgemeinere Nullhypothese lautet somit:

$$(3.8) \quad H_0: \beta_j = a_j \quad \text{für } j = 1,\ldots, k$$

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn die OLS-Schätzung des Regressionsparameters $\hat{\beta}_j$ deutlich von a_j abweicht. Als Prüfgröße wird jetzt folgende allgemeinere t-Statistik betrachtet:

$$(3.9) \quad t = \frac{\hat{\beta}_j - a_j}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}}$$

Bei Gültigkeit von $H_0: \beta_j = a_j$ ist die t-Statistik (3.9) wiederum t-verteilt mit n-k-1 Freiheitsgraden. Die Nullhypothese $H_0: \beta_j = a_j$ wird somit bei einem Signifikanzniveau von α zugunsten der Alternativhypothese $H_1: \beta_j \neq a_j$ verworfen, falls $|t| > t_{n-k-1;1-\alpha/2}$.

Anmerkungen:

- Die einfache t-Statistik (3.5) wird erreicht, wenn $a_j = 0$
- Auch die Nullhypothese $H_0: \beta_j = a_j$ kann in einseitigen Fragestellungen gegen die Alternativhypothesen $H_1: \beta_j > a_j$ oder $H_1: \beta_j < a_j$ getestet werden. Im ersten Fall wird die Nullhypothese mit $t > t_{n-k-1;1-\alpha}$ und im zweiten Fall mit $t < -t_{n-k-1;1-\alpha}$ verworfen.

Beispiel: Effekt von Luftverschmutzung auf Immobilienpreise

Mit einem linearen Regressionsmodells soll mit einer Stichprobe von n = 506 Gemeinden der Effekt des Logarithmus der Stickoxide in der Luft (lognox), des Logarithmus der gewichteten Entfernung zu fünf Beschäftigungszentren (logdist), der durchschnittlichen Anzahl an Räumen in Häusern (rooms) und des Verhältnisses von Lehrern und Schülern in den Schulen (stratio) auf den Logarithmus des Medians der Immobilienpreise (logprice) untersucht werden:

$$\text{logprice} = \beta_0 + \beta_1 \text{lognox} + \beta_2 \text{logdist} + \beta_3 \text{rooms} + \beta_4 \text{stratio} + u$$

Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt (R^2 = 0,581):

$$\text{log}\hat{\text{p}}\text{rice} = \underset{(0,32)}{11{,}08} - \underset{(0,117)}{0{,}954}\,\text{lognox} - \underset{(0,043)}{0{,}134}\,\text{logdist} + \underset{(0,019)}{0{,}255}\,\text{rooms} - \underset{(0,006)}{0{,}052}\,\text{stratio}$$

Aufgrund der recht hohen einfachen t-Werte haben alle erklärenden Variablen bei üblichen Signifikanzniveaus (z.B. 0,05, 0,01) einen signifikanten Effekt. Eine weitere interessante Nullhypothese bezieht sich auf die Überprüfung, ob β_1 dem Wert -1 entspricht, d.h. H_0: β_1 = -1. Dabei ergibt sich t = (-0,954+1)/0,117 = 0,393. Damit kann bei üblichen Signifikanzniveaus die Nullhypothese nicht verworfen werden (d.h. die geschätzte Elastizität unterscheidet sich nicht signifikant vom Wert -1, die Diskussion von Elastizitäten erfolgt später).

Beispiel: Effekt von Luftverschmutzung auf Immobilienpreise (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg logprice lognox logdist rooms stratio
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     506
-------------+------------------------------           F(  4,   501) =  175.86
       Model |  49.3987581     4  12.3496895           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  35.1834907   501  .070226528           R-squared     =  0.5840
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5807
       Total |  84.5822488   505  .167489602           Root MSE      =    .265

------------------------------------------------------------------------------
    logprice |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      lognox |  -.9535397   .1167418    -8.17   0.000    -1.182904   -.7241759
     logdist |    -.13434   .0431032    -3.12   0.002    -.2190254   -.0496547
       rooms |    .254527   .0185303    13.74   0.000     .2181203    .2909338
     stratio |  -.0524512   .0058971    -8.89   0.000    -.0640373   -.0408651
       _cons |   11.08386   .3181115    34.84   0.000     10.45887    11.70886
------------------------------------------------------------------------------
```

Zu vorgegebenen Signifikanzniveaus:

Die bisherige Überprüfung einer Nullhypothese mit Hilfe von t-Tests basiert auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau α, z.B. 0,01, 0,05 oder 0,1. Allerdings ist diese Vorgabe durch eine gewisse Willkür gekennzeichnet, da es kein definitiv korrektes Signifikanzniveau gibt. So kann z.B. das Testergebnis ausgewiesen werden, dass eine Nullhypothese zum 5%-Signifikanzniveau nicht verworfen werden kann. Unklar ist dann aber, ob die Hypothese evtl. zu einem 10%-Signifikanzniveau abgelehnt werden kann. Deshalb sollte immer die geschätzte Standardabweichung oder aber der Wert der Prüfgröße (also hier der t-Wert) ausgewiesen werden. Eine Alternative ist die Darstellung von p-Werten.

Definition von p-Werten:

p-Werte geben das geringste Signifikanzniveau an, bei dem eine Nullhypothese noch verworfen werden kann. p-Werte sind schwer durch umfangreiche Tabellen ermittelbar. Ökonometrische Programmpakete wie z.B. STATA weisen aber für bestimmte Hypothesen bei der OLS-Schätzung linearer Regressionsmodelle standardmäßig p-Werte aus, vor allem zur Überprüfung von H_0: $\beta_j = 0$. Falls T eine t-verteilte Zufallsvariable mit n-k-1 Freiheitsgraden und t die Prüfgröße (also die t-Statistik) darstellen, gilt in diesem Fall für den p-Wert:

$$(3.10) \quad p = P(|T| > |t|)$$

Die Nullhypothese H_0: $\beta_j = 0$ wird dann bei einem Signifikanzniveau von α zugunsten der Alternativhypothese H_1: $\beta_j \neq 0$ verworfen, falls $p < \alpha$. H_0: $\beta_j = 0$ wird in einseitigen Fragestellungen gegen die Alternativhypothesen H_1: $\beta_j > 0$ oder H_1: $\beta_j < 0$ verworfen, falls $p/2 < \alpha$.

Beispiel:

Bei der OLS-Schätzung in einem linearen Regressionsmodell soll für einen Regressionsparameter H_0: $\beta_j = 0$ gegen H_1: $\beta_j \neq 0$ getestet werden. Dabei ist bekannt, dass die t-Statistik bei Gültigkeit der Nullhypothese t-verteilt ist mit n-k-1 = 40 Freiheitsgraden. Der Wert der t-Statistik lautet 1,85.

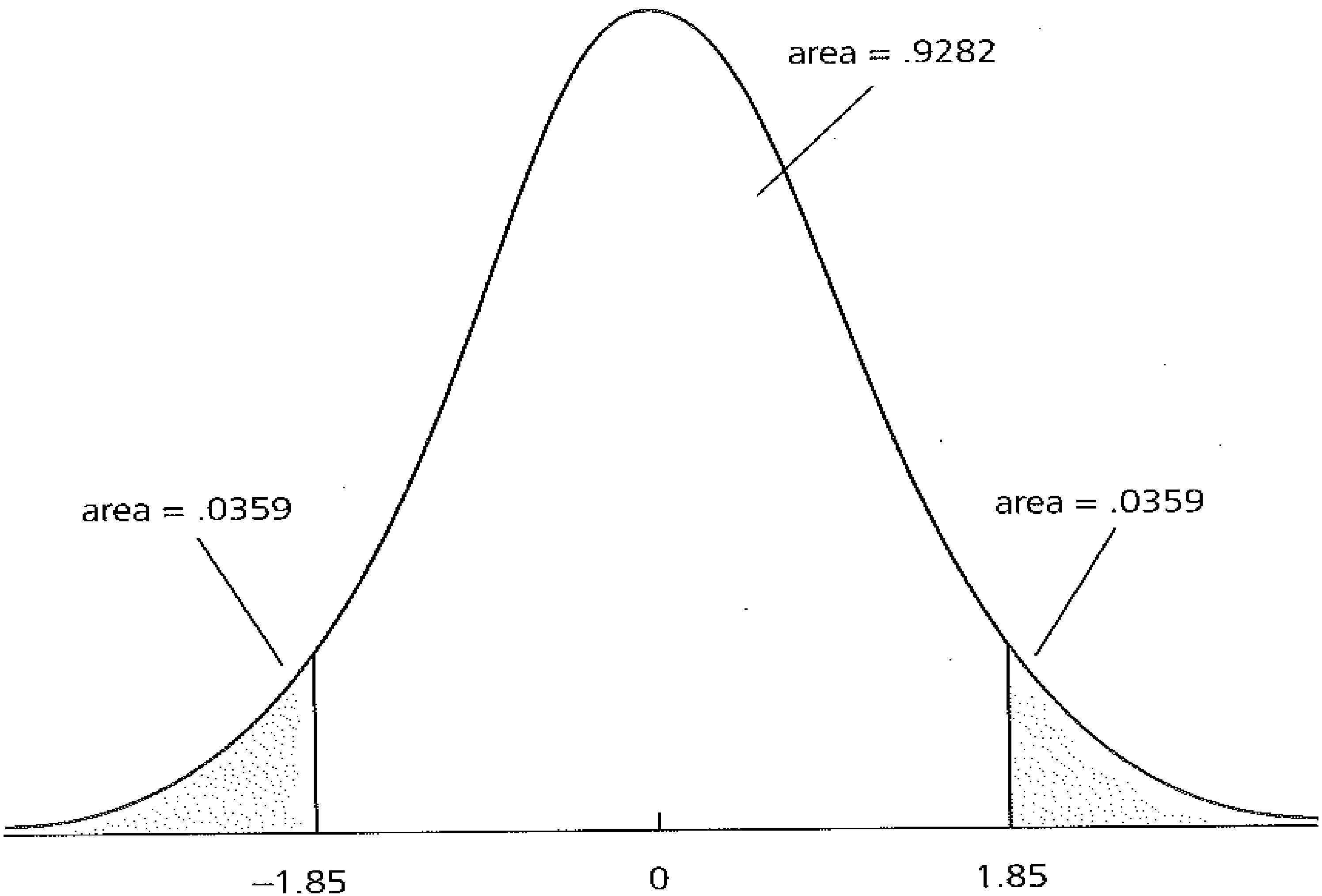
Für den p-Wert ergibt sich dann:

$$p = P(|T| > |t|) = P\left(\left|T\right| > 1{,}85\right) = 2P\left(T > 1{,}85\right) = 2 \cdot 0{,}0359 = 0{,}0718$$

Dies bedeutet, dass sich bei Gültigkeit von H_0: $\beta_j = 0$ in durchschnittlich 7,18% der Fälle absolute t-Werte von 1,85 oder größer ergeben. Damit kann die Nullhypothese bei einem (vorgegebenen) Signifikanzniveau von 0,1 verworfen werden, nicht aber bei einem (vorgegebenen) Signifikanzniveau von 0,05 (die Schrankenwerte lauten in diesen Fällen 1,684 und 2,021).

Graphische Darstellung:

Obtaining the p-value against a two-sided alternative, when t = 1.85 and df = 40.



Bemerkungen zu Hypothesentests in linearen Regressionsmodellen:

- Falls eine Nullhypothese bei einem bestimmten Signifikanzniveau nicht verworfen wird, bedeutet dies nicht, dass die Nullhypothese gilt. Deshalb gilt hier die Terminologie, dass die „Nullhypothese bei einem bestimmten Signifikanzniveau nicht abgelehnt wird“.
- Bisher wurde bei der Überprüfung von H_0: $\beta_j = 0$ lediglich die statistische Signifikanz betrachtet, die durch die Größe der t-Statistik bestimmt wird. Ein geringer Absolutwert kann sich durch kleine Absolutwerte der geschätzten Parameter oder durch große geschätzte Standardabweichungen (z.B. bei kleinen Stichprobenumfängen oder starker Multikollinearität) ergeben.
- Damit kann allein durch die statistische Signifikanz des Effektes einer erklärenden Variablen nicht auf deren Bedeutung geschlossen werden. Hierzu muss auch die ökonomische Signifikanz und damit die Größe des geschätzten Regressionsparameters betrachtet werden.
- In empirischen Anwendungen sollte deshalb zunächst die statistische Signifikanz untersucht werden und für den Fall eines statistisch signifikanten Effektes einer erklärenden Variablen die ökonomische Signifikanz. Die Betrachtung höherer Signifikanzniveaus aufgrund von kleinen Stichprobenumfängen ist problematisch. Unerwartete Vorzeichen der geschätzten Regressionsparameter sind bei kleinen Absolutwerten der t-Statistik unproblematisch. Falls sich in diesem Fall dagegen statistisch und ökonomisch signifikante Effekte ergeben, sollte z.B. Endogenität überprüft werden.

Beispiel 1: Erklärung von Partizipation in unternehmerischen Rentenplänen

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll der Effekt des Anteils des Beitrages eines Unternehmens zu jedem Dollar, den ein Beschäftigter zu einem Rentenplan leistet (mrate), des Alters des unternehmerischen Rentenplans (age) in Jahren und der Anzahl der Beschäftigten des Unternehmens (totemp) auf die Partizipationsrate im Rentenplan (prate) in % untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt:

$$\widehat{prate} = \underset{(0{,}78)}{80{,}29} + \underset{(0{,}52)}{5{,}44}\,mrate + \underset{(0{,}045)}{0{,}269}\,age - \underset{(0{,}00004)}{0{,}00013}\,totemp$$

$n = 1534$ Rentenpläne, $R^2 = 0{,}100$

Interpretation des geringsten Absolutwertes der t-Statistiken:

- Bei totemp ergibt sich ein t-Wert von -3,25: Somit hat die Anzahl der Beschäftigten des Unternehmens selbst bei sehr kleinen Signifikanzniveaus einen statistisch signifikanten Effekt auf prate
- Allerdings ist die ökonomische Signifikanz gering, d.h. bei einer starken Erhöhung der Anzahl der Beschäftigten z.B. um 10000 ergibt sich lediglich eine geringe geschätzte Verminderung der Partizipationsrate im Rentenplan um 1,3 Prozentpunkte

Beispiel 1: Erklärung von Partizipation in unternehmerischen Rentenplänen (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg prate mrate age totemp
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    1534
-------------+------------------------------           F(  3,  1530) =   56.41
       Model |  42666.5735     3  14222.1912           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  385718.966  1530  252.103899           R-squared     =  0.0996
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0978
       Total |  428385.539  1533  279.442622           Root MSE      =  15.878

------------------------------------------------------------------------------
       prate |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       mrate |   5.441433   .5244086    10.38   0.000     4.412797    6.470068
         age |   .2694073   .0451486     5.97   0.000     .1808477    .3579669
      totemp |  -.0001298   .0000367    -3.53   0.000    -.0002018   -.0000578
       _cons |   80.29429   .7776952   103.25   0.000     78.76882    81.81975
------------------------------------------------------------------------------
```

Beispiel 2: Erklärung von Ausschussraten eines Unternehmens

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll der Effekt der jährlichen Trainingsstunden pro Beschäftigten (hrsemp), des Logarithmus der Anzahl der Beschäftigten (logemploy) und des Logarithmus der jährlichen Umsätze in Dollar (logsales) auf den Logarithmus der Anzahl von Ausschussteilen pro 100 produzierten Stücken (logscrap) untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt ($n = 29$ Unternehmen, $R^2 = 0{,}262$):

$$\widehat{logscrap} = \underset{(5{,}69)}{12{,}46} - \underset{(0{,}023)}{0{,}029}\,hrsemp + \underset{(0{,}407)}{0{,}761}\,logemploy - \underset{(0{,}453)}{0{,}962}\,logsales$$

Interpretation des Effektes von Weiterbildung:

- Eine Erhöhung der jährlichen Trainingsstunden pro Beschäftigten hrsemp um z.B. fünf Stunden führt zu einer geschätzten Senkung von logscrap um 0,145. Dies entspricht einer Senkung von scrap um 14,5% (genaue Interpretation von logarithmierten Variablen siehe später) und ist damit nicht trivial.
- Allerdings ergibt sich bei hrsemp ein t-Wert von $-0{,}029/0{,}023 = -1{,}26$, so dass auch bei einem Signifikanzniveau von 0,1 keine statistische Signifikanz vorliegt. Die Betrachtung höherer Signifikanzniveaus aufgrund des geringen Stichprobenumfangs ist aber problematisch.

Beispiel 2: Erklärung von Ausschussraten eines Unternehmens (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg logscrap hrsemp logemploy logsales
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      29
-------------+------------------------------           F(  3,    25) =    2.97
       Model |  16.8426941     3  5.61423137           Prob > F      =  0.0513
    Residual |  47.3369105    25  1.89347642           R-squared     =  0.2624
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.1739
       Total |  64.1796046    28  2.29212874           Root MSE      =   1.376

------------------------------------------------------------------------------
    logscrap |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
      hrsemp |  -.0292689   .0228048    -1.28   0.211    -.0762364    .0176985
   logemploy |   .7614707    .407433     1.87   0.073    -.0776532    1.600595
    logsales |  -.9620266    .452518    -2.13   0.044    -1.894005   -.0300483
       _cons |   12.45837   5.686768     2.19   0.038     .7462476    24.17048
------------------------------------------------------------------------------
```

3.3 Konfidenzintervalle für Regressionsparameter

Bei klassischen linearen Regressionsmodellen lassen sich auf Basis der OLS-Schätzung nicht nur Hypothesen über einen Regressionsparameter testen, sondern auch Intervallschätzungen durchführen und damit Konfidenzintervalle für diese Parameter konstruieren. Grundlage hierfür ist nach (3.3):

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}} \sim t_{n-k-1}$$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für den Regressionsparameter:

$$(3.11) \quad \hat{\beta}_j \pm c\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}$$

Die Unter- und Obergrenzen des Konfidenzintervalls lauten somit:

$$\hat{\beta}_j - c\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}$$

$$\hat{\beta}_j + c\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}$$

Dabei stellt die Konstante c bei einem (1-α)-Konfidenzintervall das (1-α/2)-Quantil $t_{n-k-1;1-\alpha/2}$ der t-Verteilung mit n-k-1 Freiheitsgraden dar. Somit gilt z.B. bei einem 95%-Konfidenzintervall $c = t_{n-k-1;0,975}$.

Anmerkungen:

- Ein (1-α)-Konfidenzintervall gibt Grenzen an, in die β_j in (1-α)% aller Zufallsstichproben fällt. Für eine spezifische Stichprobe kann allerdings nicht bestimmt werden, ob β_j in das realisierte Konfidenzintervall fällt.
- Zur Berechnung von Konfidenzintervallen benötigt man lediglich den mit OLS geschätzten Regressionsparameter, die geschätzte Standardabweichung des geschätzten Parameters und $t_{n-k-1;1-\alpha/2}$. Die geschätzten Parameter und Standardabweichungen werden von ökonometrischen Programmpaketen wie z.B. STATA standardmäßig ausgewiesen. Darüber hinaus werden z.B. bei STATA standardmäßig 95%-Konfidenzintervalle ausgewiesen.
- Für die Bestimmung von (tabellierten) Quantilen $t_{n-k-1;1-\alpha/2}$ benötigt man die Anzahl der Freiheitsgrade n-k-1 sowie das Konfidenzniveau 1-α. Bei n-k-1 = 25 ergibt sich z.B. für ein 95%-Konfidenzintervall $t_{25;0,975} = 2,06$. Bei einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden können wieder Quantile der Standardnormalverteilung verwendet werden (z.B. für n-k-1 > 120).
- Mit (1-α)-Konfidenzintervallen kann auch H_0: $\beta_j = a_j$ gegen H_1: $\beta_j \neq a_j$ getestet werden. Falls a_j nicht in das Konfidenzintervall fällt, kann die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von α verworfen werden.
- Die Qualität von Konfidenzintervallen hängt von korrekten Annahmen im linearen Regressionsmodell ab (Probleme ergeben sich also z.B. bei Endogenität oder Heteroskedastizität)

Beispiel 1: Erklärung von Ausschussraten eines Unternehmens

Wie zuvor soll mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells wieder der Effekt der jährlichen Trainingsstunden pro Beschäftigten (hrsemp), des Logarithmus der Anzahl der Beschäftigten (logemploy) und des Logarithmus der jährlichen Umsätze in Dollar (logsales) auf den Logarithmus der Anzahl von Ausschussteilen pro 100 produzierten Stücken (logscrap) untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt (n = 29):

$$\widehat{\text{logscrap}} = \underset{(5{,}69)}{12{,}46} - \underset{(0{,}023)}{0{,}029}\,\text{hrsemp} + \underset{(0{,}407)}{0{,}761}\,\text{logemploy} - \underset{(0{,}453)}{0{,}962}\,\text{logsales}$$

Damit ergibt sich:

- Das 95%-Konfidenzintervall für β_{hrsemp} lautet mit $t_{n-k-1;1-\alpha/2} = t_{25;0,975} = 2{,}06$: $[-0{,}029-2{,}06\cdot 0{,}023; -0{,}029+2{,}06\cdot 0{,}023] = [-0{,}076; 0{,}018]$
- Auf Basis dieses realisierten Konfidenzintervalls kann somit H_0: $\beta_{hrsemp} = 0$ gegen H_1: $\beta_{hrsemp} \neq 0$ zum 5%-Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden, da der Wert null innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls liegt

---

Beispiel 2: Erklärung von Forschungs- und Entwicklungsausgaben

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll der Effekt des Logarithmus der jährlichen Umsätze (logsales) und des prozentualen Anteils des Gewinns vom Umsatz (profmarg) auf den Logarithmus von Forschungs- und Entwicklungsausgaben (logrd) untersucht werden. Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion für n = 32 Chemie-Unternehmen geschätzt ($R^2 = 0{,}918$):

$$\widehat{\text{logrd}} = \underset{(0,47)}{-4{,}38} + \underset{(0,060)}{1{,}084}\text{logsales} + \underset{(0,013)}{0{,}0217}\text{profmarg}$$

Damit ergibt sich:

- Das 95%-Konfidenzintervall für β_{logsales} lautet mit $t_{n-k-1;1-\alpha/2} = t_{29;0,975} = 2{,}045$: $[1{,}084-2{,}045\cdot 0{,}060;\ 1{,}084+2{,}045\cdot 0{,}060] = [0{,}961;\ 1{,}21]$
- Auf Basis dieses realisierten Konfidenzintervalls kann somit H_0: $\beta_{\text{logsales}} = 0$ gegen H_1: $\beta_{\text{logsales}} \neq 0$ zum Signifikanzniveau von 0,05 abgelehnt werden, da der Wert null nicht innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls liegt
- Dagegen kann H_0: $\beta_{\text{logsales}} = 1$ (d.h. eine Umsatzelastizität von eins, die Diskussion von Elastizitäten erfolgt später) gegen H_1: $\beta_{\text{logsales}} \neq 1$ nicht zum 5%-Signifikanzniveau abgelehnt werden, da der Wert eins innerhalb des 95%-Konfidenzintervalls liegt

Beispiel 2: Erklärung von Forschungs- und Entwicklungsausgaben (STATA-Output)

Mit STATA haben sich folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg logrd logsales profmarg
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      32
-------------+------------------------------           F(  2,    29) =  162.24
       Model |  85.5970595     2  42.7985297           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  7.65020571    29  .263800197           R-squared     =  0.9180
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9123
       Total |  93.2472652    31   3.0079763           Root MSE      =  .51361

------------------------------------------------------------------------------
       logrd |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
    logsales |   1.084228   .0601941    18.01   0.000     .9611173    1.207339
    profmarg |   .0216594    .012782     1.69   0.101    -.0044827    .0478015
       _cons |   -4.37835   .4680132    -9.36   0.000    -5.335544   -3.421155
------------------------------------------------------------------------------
```

3.4 Testen von Hypothesen über mehrere Regressionsparameter

Bei klassischen linearen Regressionsmodellen lassen sich auf Basis der OLS-Schätzung nicht nur Hypothesen über einen Regressionsparameter testen, sondern auch Hypothesen über Linearkombinationen von Regressionsparametern. Mit beliebigen Werten r_1, r_2,…,r_k und c kann die Nullhypothese folgendermaßen spezifiziert werden:

$$(3.12)\quad H_0: r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \cdots + r_k\beta_k = c \text{ bzw. } H_0: r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \cdots + r_k\beta_k - c = 0$$

Mit einer entsprechenden Schätzung der Varianz der Linearkombination der geschätzten Parameter ergibt sich folgende t-Statistik, die bei Gültigkeit der Nullhypothese t-verteilt ist mit n-k-1 Freiheitsgraden:

$$(3.13)\quad t = \frac{r_1\hat{\beta}_1 + \cdots + r_k\hat{\beta}_k - c}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(r_1\hat{\beta}_1 + \cdots + r_k\hat{\beta}_k)}}$$

Eine häufig betrachtete Nullhypothese ist die Überprüfung der Gleichheit zweier Parameter (was aber nicht die Gleichheit der Effekte zweier erklärender Variablen impliziert), z.B.:

$$(3.14)\quad H_0: \beta_1 = \beta_2 \text{ bzw. } H_0: \beta_1 - \beta_2 = 0$$

Diese Nullhypothese kann in einseitigen Fragestellungen gegen H_1: $\beta_1 > \beta_2$ bzw. H_1: $\beta_1 < \beta_2$ oder in zweiseitigen Fragestellungen gegen H_1: $\beta_1 \neq \beta_2$ getestet werden.

Die t-Statistik lautet hier:

$$(3.15) \quad t = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{\sqrt{\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}}$$

H_0 wird also bei einem Signifikanzniveau von α (in zweiseitigen Fragestellungen) verworfen, falls $|t| > t_{n-k-1;1-\alpha/2}$. Das Problem dabei ist, dass für die Schätzung der Varianz der Differenz zweier geschätzter Parameter die Kovarianz der beiden geschätzten Parameter geschätzt werden muss, da:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) - 2\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

$$\hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = \hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_1) + \hat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_2) - 2\hat{\mathrm{Cov}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

Diese Kovarianz kann mit Hilfe von Programmpaketen oder aber mit Hilfe der Schätzung eines alternativen linearen Regressionsmodells geschätzt werden, das direkt den entsprechenden Wert liefert. Hierzu wird mit $\theta_1 = \beta_1 - \beta_2$ bzw. $\beta_1 = \theta_1 + \beta_2$ die Nullhypothese H_0: $\theta_1 = 0$ getestet. Für das betrachtete Regressionsmodell ergibt sich dann:

$$y = \beta_0 + (\theta_1 + \beta_2)x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

$$y = \beta_0 + \theta_1 x_1 + \beta_2 (x_1 + x_2) + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Mit Hilfe der OLS-Schätzung des linearen Regressionsmodells kann dann direkt die Varianz von $\hat{\theta}_1$ und damit von $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$ geschätzt werden.

Beispiel: Erklärung von Löhnen

Mit einem linearen Regressionsmodell soll der Effekt des Besuchs eines zweijährigen Colleges in Jahren (jc), des Besuchs einer Universität in Jahren (univ) und der Berufserfahrung in Monaten (exper) auf den Logarithmus des Stundenlohns (logwage) untersucht werden. Dabei wurde für n = 6763 Beschäftigte folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt ($R^2 = 0{,}222$):

$$\widehat{\text{logwage}} = \underset{(0{,}021)}{1{,}472} + \underset{(0{,}0068)}{0{,}0667}\text{jc} + \underset{(0{,}0023)}{0{,}0769}\text{univ} + \underset{(0{,}0002)}{0{,}0049}\text{exper}$$

Damit ergibt sich $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 = -0{,}0102$. Für die Überprüfung von H_0: $\beta_{jc} = \beta_{univ}$ kann mit $\theta_1 = \beta_{jc} - \beta_{univ}$ folgendes lineare Regressionsmodell betrachtet werden:

$$\text{logwage} = \beta_0 + \theta_1 \text{jc} + \beta_2(\text{jc} + \text{univ}) + \beta_3 \text{exper} + u$$

Dabei wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt ($R^2 = 0{,}222$):

$$\widehat{\text{logwage}} = \underset{(0{,}021)}{1{,}472} - \underset{(0{,}0069)}{0{,}0102}\text{jc} + \underset{(0{,}0023)}{0{,}0769}(\text{jc}+\text{univ}) + \underset{(0{,}0002)}{0{,}0049}\text{exper}$$

Zur Überprüfung von H_0: $\beta_{jc} = \beta_{univ}$ und damit H_0: $\theta_1 = 0$ ergibt sich somit also $t = -0{,}0102/0{,}0069 = -1{,}48$. Für ein entsprechendes 95%-Konfidenzintervall ergibt sich $\hat{\theta}_1 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}0069 = -0{,}0102 \pm 0{,}0135$.

Bei klassischen linearen Regressionsmodellen lassen sich auf Basis der OLS-Schätzung nicht nur Hypothesen über einzelne Regressionsparameter oder Linearkombinationen von Regressionsparametern testen, sondern auch multiple lineare Restriktionen. Im Vordergrund der Betrachtung steht dabei die Überprüfung von Hypothesen, dass eine Gruppe von erklärenden Variablen gemeinsam keinen Effekt auf die abhängige Variable hat. Ausgangspunkt ist folgendes (unrestringierte) lineare Regressionsmodell:

$$(3.16) \quad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

Bei der Überprüfung, ob q erklärende Variablen gemeinsam keinen Effekt auf die abhängige Variable haben (d.h. also bei der Überprüfung von q Ausschlussrestriktionen, „exclusion restrictions") lässt sich die Nullhypothese folgendermaßen formulieren:

$$(3.17) \quad H_0\colon \beta_{k-q+1} = 0, \beta_{k-q+2} = 0, \ldots, \beta_k = 0 \;\text{ bzw. }\; H_0\colon \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \cdots = \beta_k = 0$$

Das unter H_0 restringierte Regressionsmodell lautet dann:

$$(3.18) \quad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_{k-q} x_{k-q} + u$$

Die Alternativhypothese H_1 ist dadurch gekennzeichnet, dass H_0 nicht gilt, d.h. also dass mindestens einer dieser q Regressionsparameter ungleich null ist bzw. dass die erklärenden Variablen einen gemeinsamen Effekt haben.

Testidee:

- Die Betrachtung von einzelnen t-Statistiken hilft nicht weiter, da sich solche t-Werte auf Hypothesen über einen einzelnen Regressionsparameter und damit eine einzige erklärende Variable beziehen, nicht aber auf Restriktionen für andere Parameter. Deshalb müssen diese Ausschlussrestriktionen gemeinsam getestet werden.
- Ein entsprechender Test betrachtet die OLS-Schätzungen der unrestringierten und restringierten linearen Regressionsmodelle in (3.16) und (3.18)
- Dabei werden die jeweiligen Residualabweichungsquadratsummen entsprechend (2.25) ermittelt:

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$$

- In Kapitel 2.2 wurde bereits erläutert, dass SSR immer steigt, wenn in einem linearen Regressionsmodell erklärende Variablen ausgeschlossen werden. Deshalb spricht es für die Gültigkeit der Nullhypothese, wenn SSR im restringierten linearen Regressionsmodell (= SSR_r) nicht deutlich größer ist als SSR im unrestringierten linearen Regressionsmodell (= SSR_{ur}). Damit wird H_0 verworfen, wenn die Differenz von SSR_r und SSR_{ur} hohe Werte annimmt.
- Für die Durchführung des Tests wird die Verteilung einer Funktion der Differenz von SSR_r und SSR_{ur} bei Gültigkeit der Nullhypothese benötigt

Als Prüfgröße für den entsprechenden F-Test wird deshalb folgende F-Statistik (F-Wert) betrachtet:

$$(3.19)\quad F = \frac{\dfrac{SSR_r - SSR_{ur}}{q}}{\dfrac{SSR_{ur}}{n-k-1}} = \frac{SSR_r - SSR_{ur}}{SSR_{ur}} \frac{n-k-1}{q}$$

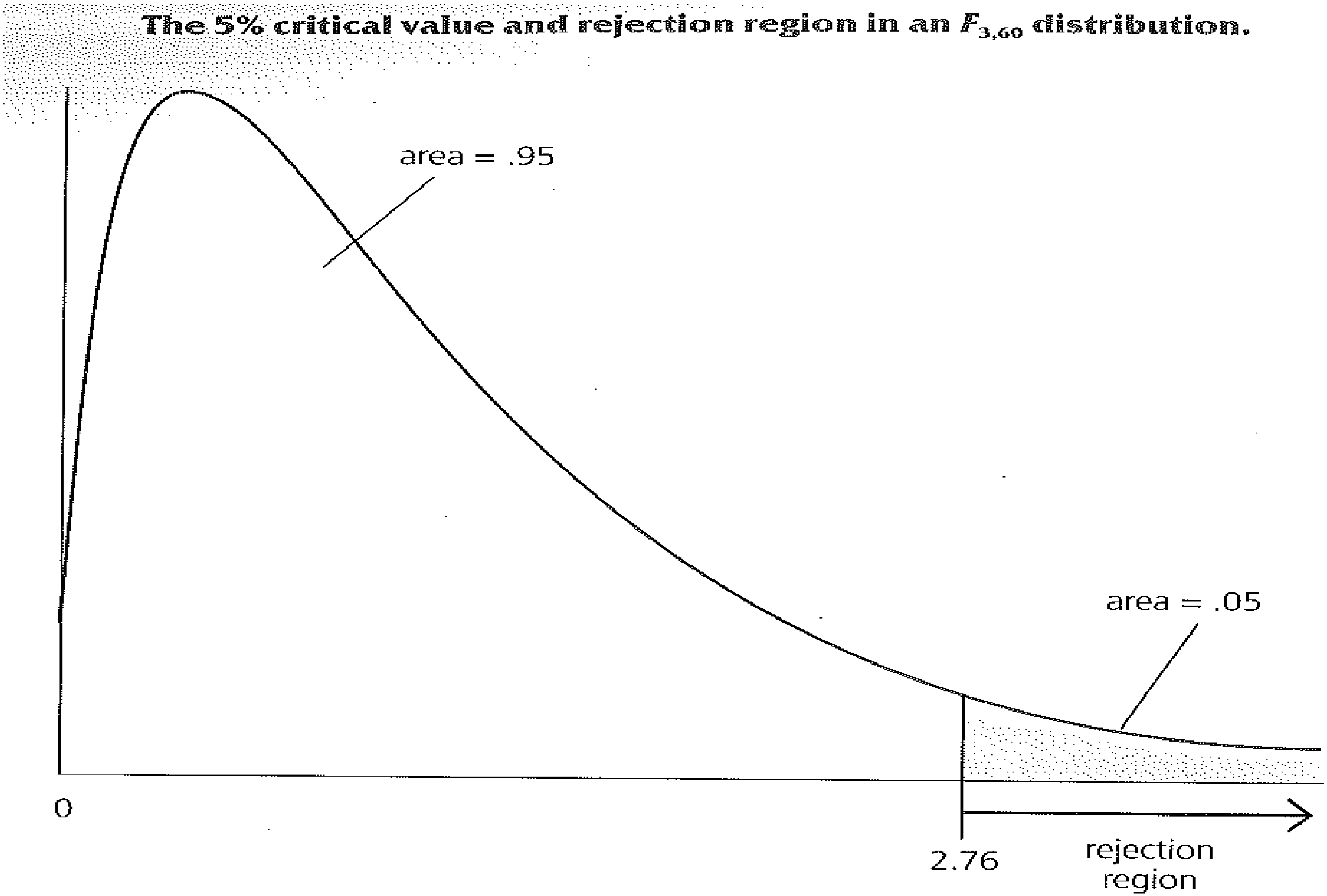
Bei Gültigkeit von H_0: $\beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \ldots = \beta_k = 0$ ist diese Prüfgröße F-verteilt mit q (d.h. der Anzahl der überprüften Ausschlussrestriktionen) und n-k-1 Freiheitsgraden, d.h.:

$$F \sim F_{q;n-k-1}$$

Zur Durchführung des F-Tests:

- Durch die Ermittlung von SSR_r und SSR_{ur} (z.B. mit Hilfe eines ökonometrischen Programmpaketes) kann die F-Statistik berechnet werden
- Die Nullhypothese wird verworfen, wenn F sehr große Werte annimmt. Zur Ermittlung des Schrankenwertes benötigt man das (1-α)-Quantil der F-Verteilung mit q und n-k-1 Freiheitsgraden (viele Werte sind tabelliert).
- H_0: $\beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = \ldots = \beta_k = 0$ wird bei einem Signifikanzniveau von α zugunsten der Alternativhypothese verworfen, wenn $F > F_{q;n-k-1;1-\alpha}$

Wenn z.B. q = 3 und n-k-1 = 60, wird die Nullhypothese zu einem 5%-Signifikanzniveau verworfen, falls $F > F_{q;n-k-1;1-\alpha} = F_{3;60;0,95} = 2{,}76$:



Beispiel: Erklärung von Gehältern von Baseball-Spielern

Bei einer Untersuchung für n = 353 Baseball-Spieler in der major league wird mit einem linearen Regressionsmodell der Effekt der in der Liga gespielten Jahre (years), der durchschnittlichen Anzahl der Spiele pro Jahr (gamesyr), der durchschnittlichen Schlagleistung („career batting averages“, bavg), der Anzahl der home runs pro Jahr (hrunsyr) und der geschlagenen runs pro Jahr (rbisyr) auf den Logarithmus des Jahresgehalts (logsalary) untersucht. Dabei soll insbesondere die Nullhypothese überprüft werden, dass bavg, hrunsyr und rbisyr gemeinsam keinen Effekt haben (d.h. also dass alle drei Regressionsparameter dieser erklärenden Variablen null sind).

Für das unrestringierte lineare Regressionsmodell wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt (R^2 = 0,6278):

$$\begin{aligned} \widehat{\text{logsalary}} = {} & \underset{(0{,}29)}{11{,}19} + \underset{(0{,}0121)}{0{,}0689}\,\text{years} + \underset{(0{,}0026)}{0{,}0126}\,\text{gamesyr} + \underset{(0{,}00110)}{0{,}00098}\,\text{bavg} \\ & + \underset{(0{,}0161)}{0{,}0144}\,\text{hrunsyr} + \underset{(0{,}0072)}{0{,}0108}\,\text{rbisyr} \end{aligned}$$

Dabei gilt für die Residualabweichungsquadratsumme SSR_{ur} = 183,186.

Beispiel: Erklärung von Gehältern von Baseball-Spielern (Fortsetzung)

Für das restringierte lineare Regressionsmodell wurde folgende OLS-Regressionsfunktion geschätzt (R^2 = 0,5971):

$$\widehat{\log salary} = \underset{(0,11)}{11{,}22} + \underset{(0,0125)}{0{,}0713}years + \underset{(0,0013)}{0{,}0202}gamesyr$$

Für die Residualabweichungsquadratsumme ergibt sich $SSR_r = 198{,}311$.

Mit q = 3 und n-k-1 = 353-5-1 = 347 wird H_0: $\beta_{bavg} = \beta_{hrunsyr} = \beta_{rbisyr} = 0$ bei einem 1%- bzw. 5%-Signifikanzniveau verworfen, wenn die F-Statistik die Schrankenwerte $F_{3;347;0,99} = 3{,}78$ bzw. $F_{3;347;0,95} = 2{,}60$ überschreitet.

Für die F-Statistik ergibt sich:

$$F = \frac{198{,}311-183{,}186}{183{,}186}\frac{347}{3} = 9{,}55$$

Damit wird die Nullhypothese auch bei einem 1%-Signifikanzniveau verworfen, d.h. die Hypothese, dass die drei Regressionsparameter von bavg, hrunsyr und rbisyr gleich null sind, wird klar abgelehnt (obwohl die Variablen einzeln keinen signifikanten Effekt haben, evtl. aufgrund von Multikollinearität).

Beispiel: Erklärung von Gehältern von Baseball-Spielern (STATA-Output)

Im unrestringierten linearen Regressionsmodell haben sich mit STATA folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg logsalary years gamesyr bavg hrunsyr rbisyr
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     353
-------------+------------------------------           F(  5,   347) =  117.06
       Model |  308.989228     5  61.7978456           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  183.186336   347  .527914514           R-squared     =  0.6278
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6224
       Total |  492.175565   352  1.39822604           Root MSE      =  .72658

------------------------------------------------------------------------------
   logsalary |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       years |   .0688626   .0121145     5.68   0.000     .0450354    .0926898
     gamesyr |   .0125521   .0026468     4.74   0.000     .0073464    .0177578
        bavg |   .0009786   .0011035     0.89   0.376    -.0011918     .003149
     hrunsyr |   .0144295    .016057     0.90   0.369    -.0171517    .0460108
      rbisyr |   .0107657    .007175     1.50   0.134    -.0033461    .0248776
       _cons |   11.19242   .2888229    38.75   0.000     10.62436    11.76048
------------------------------------------------------------------------------
```

Beispiel: Erklärung von Gehältern von Baseball-Spielern (STATA-Output Fortsetzung)

OLS-Schätzergebnisse mit STATA im restringierten linearen Regressionsmodell:

```
reg logsalary years gamesyr
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     353
-------------+------------------------------           F(  2,   350) =  259.32
       Model |  293.864043     2  146.932022           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  198.311521   350  .566604347           R-squared     =  0.5971
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.5948
       Total |  492.175565   352  1.39822604           Root MSE      =  .75273

------------------------------------------------------------------------------
   logsalary |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       years |    .071318    .012505     5.70   0.000     .0467235    .0959124
     gamesyr |   .0201745   .0013429    15.02   0.000     .0175334    .0228156
       _cons |    11.2238    .108312   103.62   0.000     11.01078    11.43683
------------------------------------------------------------------------------
```

Testanweisung und Testergebnisse mit STATA (nur direkt nach Durchführung der OLS-Schätzung im unrestringierten linearen Regressionsmodell möglich):

```
test bavg=hrunsyr=rbisyr=0

( 1)  bavg - hrunsyr = 0
( 2)  bavg - rbisyr = 0
( 3)  bavg = 0

      F(  3,   347) =    9.55
           Prob > F =    0.0000
```

Anmerkungen:

- Ein F-Test zum Nachweis, dass eine Gruppe von erklärenden Variablen (z.B. verschiedene Indikatoren von Unternehmensgröße) einen signifikanten Effekt auf die abhängige Variable (z.B. Unternehmensgewinn) hat, ist oft dann nützlich, wenn die erklärenden Variablen hoch korreliert sind, so dass der Nachweis eines entsprechenden einzelnen signifikanten Effektes aufgrund der Multikollinearität schwierig ist
- Ein F-Test kann mit q = 1 auch zur Überprüfung des Effektes einer einzelnen erklärenden Variablen (mit H_0: $\beta_k = 0$) eingesetzt werden. Ein solcher F-Test ist identisch mit dem entsprechenden t-Test, da die entsprechende F-Statistik das Quadrat der t-Statistik ist und eine quadrierte mit n-k-1 Freiheitsgraden t-verteilte Zufallsvariable F-verteilt ist mit 1 und n-k-1 Freiheitsgraden. Allerdings ist ein t-Test insofern flexibler, als auch einseitige Fragestellungen getestet werden können.
- Es ist auch möglich, dass ein t-Test ergibt, dass eine spezifische erklärende Variable innerhalb einer Gruppe von Variablen einen signifikanten Effekt hat, ein F-Test in Bezug auf diese Gruppe von Variablen aufgrund der Insignifikanz der anderen Variablen aber keinen signifikanten Effekt ausweist. Dies deutet darauf hin, dass der F-Test nicht zum Nachweis des Effektes einer einzelnen erklärenden Variablen verwendet werden sollte, da der t-Test hier eine größere Macht besitzt.

Aufgrund des in (2.27) dargestellten Zusammenhangs zwischen der Residualabweichungsquadratsumme und dem Bestimmtheitsmaß $R^2 = 1 - SSR/SST$ kann die F-Statistik in (3.19) auch mit den Bestimmtheitsmaßen in den restringierten und unrestringierten linearen Regressionsmodellen R^2_r und R^2_{ur} formuliert werden. Mit $SSR_r = SST(1- R^2_r)$ und $SSR_{ur} = SST(1- R^2_{ur})$ ergibt sich:

$$(3.20) \quad F = \frac{\frac{R^2_{ur}-R^2_r}{q}}{\frac{1-R^2_{ur}}{n-k-1}} = \frac{R^2_{ur}-R^2_r}{1-R^2_{ur}} \frac{n-k-1}{q}$$

Diese Form der F-Statistik ist sehr nützlich, da manche ökonometrische Programmpakete (im Gegensatz zu STATA) zwar standardmäßig Bestimmtheitsmaße, nicht aber SSR bei der OLS-Schätzung linearer Regressionsmodelle ausweisen.

Beispiel 1: Erklärung von Gehältern von Baseball-Spielern

Aufgrund der zuvor ausgewiesenen Bestimmtheitsmaße ergibt sich jetzt für die F-Statistik (Abweichung ergibt sich durch Rundungen):

$$F = \frac{R^2_{ur}-R^2_r}{1-R^2_{ur}} \frac{n-k-1}{q} = \frac{0,6278-0,5971}{1-0,6278} \frac{347}{3} = 9,54$$

Beispiel 2: Erklärung von Geburtsgewichten

Mit Hilfe eines linearen Regressionsmodells soll der Effekt der durchschnittlichen Anzahl der von der Mutter während der Schwangerschaft gerauchten Zigaretten (cigs), der Geburtsrangfolge des Kindes (parity), des jährlichen Familieneinkommens (faminc), der Anzahl der Schuljahre der Mutter (motheduc) und der Anzahl der Schuljahre des Vaters (fatheduc) auf das Geburtsgewicht des Kindes (bwght) untersucht werden:

$$\text{bwght} = \beta_0 + \beta_1 \text{cigs} + \beta_2 \text{parity} + \beta_3 \text{faminc} + \beta_4 \text{motheduc} + \beta_5 \text{fatheduc} + u$$

Dabei soll zu einem Signifikanzniveau von 0,05 die Nullhypothese überprüft werden, dass die elterliche Anzahl der Schuljahre keinen Effekt auf das Geburtsgewicht hat, d.h. H_0: $\beta_4 = \beta_5 = 0$:

- Für n = 1191 Geburten werden das unrestringierte und das restringierte Regressionsmodell mit OLS geschätzt. Dabei ergibt sich $R^2_r = 0{,}0364$ und $R^2_{ur} = 0{,}0387$.
- Da n-k-1 = 1191 - 6 = 1185 und q = 2 ergibt sich für die F-Statistik: $F = [(0{,}0387-0{,}0364)/(1-0{,}0387)](1185/2) = 1{,}42$
- Der Schrankenwert aus der F-Verteilung mit 2 und 1185 Freiheitsgraden beträgt $F_{2;1185;0,95} = 3{,}00$. Damit kann die Nullhypothese zum 5%-Signifikanzniveau nicht verworfen werden.

Beispiel 2: Erklärung von Geburtsgewichten (STATA-Output)

Im unrestringierten linearen Regressionsmodell haben sich mit STATA folgende OLS-Schätzergebnisse gezeigt:

```
reg bwght cigs parity faminc motheduc fatheduc
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    1191
-------------+------------------------------           F(  5,  1185) =    9.55
       Model |  18705.5567     5  3741.11135           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  464041.135  1185  391.595895           R-squared     =  0.0387
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0347
       Total |  482746.692  1190  405.669489           Root MSE      =  19.789

------------------------------------------------------------------------------
       bwght |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        cigs |  -.5959362   .1103479    -5.40   0.000    -.8124352   -.3794373
      parity |   1.787603   .6594055     2.71   0.007     .4938709    3.081336
      faminc |   .0560414   .0365616     1.53   0.126    -.0156913    .1277742
    motheduc |  -.3704503   .3198551    -1.16   0.247    -.9979957    .2570951
    fatheduc |   .4723944   .2826433     1.67   0.095    -.0821426    1.026931
       _cons |   114.5243   3.728453    30.72   0.000     107.2092    121.8394
------------------------------------------------------------------------------
```

Beispiel 2: Erklärung von Geburtsgewichten (STATA-Output Fortsetzung)

OLS-Schätzergebnisse mit STATA im restringierten linearen Regressionsmodell:

```
reg bwght cigs parity faminc if !missing(fatheduc) & !missing(motheduc)
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    1191
-------------+------------------------------           F(  3,  1187) =   14.95
       Model |  17579.8997     3  5859.96658           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  465166.792  1187  391.884408           R-squared     =  0.0364
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.0340
       Total |  482746.692  1190  405.669489           Root MSE      =  19.796

------------------------------------------------------------------------------
       bwght |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        cigs |  -.5978519   .1087701    -5.50   0.000    -.8112549   -.3844489
      parity |   1.832274   .6575402     2.79   0.005     .5422035    3.122345
      faminc |   .0670618   .0323938     2.07   0.039     .0035063    .1306173
       _cons |   115.4699   1.655898    69.73   0.000     112.2211    118.7187
------------------------------------------------------------------------------
```

Testanweisung und Testergebnisse mit STATA (nur direkt nach Durchführung der OLS-Schätzung im unrestringierten linearen Regressionsmodell möglich) (Abweichung ergibt sich durch Rundungen):

```
test motheduc=fatheduc=0

( 1)  motheduc - fatheduc = 0
( 2)  motheduc = 0

      F(  2,  1185) =    1.44
           Prob > F =    0.2380
```

Für den p-Wert bei einem F-Test mit der F-Statistik F ergibt sich:

$$(3.21) \quad p = P(X > F)$$

Dabei stellt X eine F-verteilte Zufallsvariable mit q und n-k-1 Freiheitsgraden dar.

→ Der p-Wert bei der Betrachtung von solchen F-Tests wird völlig analog zur Betrachtung von t-Tests interpretiert. So kann z.B. bei einem p-Wert von 0,15 die Nullhypothese lediglich bei Signifikanzniveaus von mindestens 15% verworfen werden.

Beispiel: Erklärung von Geburtsgewichten

Im vorherigen Beispiel ergibt sich für die Überprüfung der Nullhypothese, dass die Anzahl der Schuljahre der Mutter (motheduc) und die Anzahl der Schuljahre des Vaters (fatheduc) gemeinsam keinen Effekt auf das Geburtsgewicht des Kindes (bwght) haben (d.h. bei der Überprüfung von H_0: $\beta_4 = \beta_5 = 0$), ein p-Wert von 0,238.

→ Damit kann die Nullhypothese z.B. nicht einmal bei einem Signifikanzniveau von 20% verworfen werden, d.h. selbst bei diesem hohen Signifikanzniveau kann kein gemeinsamer signifikanter Effekt von motheduc und fatheduc nachgewiesen werden

---

Der in empirischen Untersuchungen mit Hilfe von linearen Regressionsmodellen am häufigsten betrachtete F-Test bezieht sich auf die Untersuchung der Nullhypothese, dass sämtliche erklärende Variablen keinen gemeinsamen Effekt auf die abhängige Variable haben:

$$(3.22) \quad H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

Die Alternativhypothese ist bei diesen Tests dadurch gekennzeichnet, dass mindestens ein Steigungsparameter ungleich null ist.

Dadurch ergibt sich in diesem Fall folgendes restringierte lineare Regressionsmodell, bei dem gegenüber dem unrestringierten linearen Regressionsmodell sämtliche erklärende Variablen unberücksichtigt bleiben:

$$(3.23) \quad y = \beta_0 + u$$

Für solche restringierten linearen Regressionsmodelle erhält man ein Bestimmtheitsmaß $R^2_r = 0$, so dass aufgrund sich der in diesem Fall $q = k$ vorliegenden Ausschlussrestriktionen folgende spezifische F-Statistik ergibt:

$$(3.24) \quad F = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}} = \frac{R^2}{1-R^2}\,\frac{n-k-1}{k}$$

Dabei ist R^2 das gewöhnliche Bestimmtheitsmaß bei der OLS-Schätzung eines (unrestringierten) linearen Regressionsmodells mit k erklärenden Variablen.

Anmerkungen:

- Diese F-Statistik wird von ökonometrischen Programmpaketen wie z.B. STATA standardmäßig ausgewiesen
- Falls die entsprechende Nullhypothese bei einem bestimmten Signifikanzniveau nicht verworfen werden kann, liegt keine Evidenz vor, dass auch nur eine erklärende Variable hilft, die abhängige Variable zu erklären. Damit ist in diesem Fall oft eine Mindestanforderung für geeignete lineare Regressionsmodellen nicht erfüllt, so dass nach alternativen erklärenden Variablen gesucht werden sollte.
- Aus diesem Grund ist die Betrachtung dieses F-Tests von deutlich größerer Bedeutung für die Güte eines linearen Regressionsmodells als die Betrachtung des Bestimmtheitsmaßes

---

Beispiel: Erklärung von Geburtsgewichten

Im vorherigen Beispiel der Erklärung von Geburtsgewichten ergibt sich eine entsprechende F-Statistik von 9,55, so dass die Nullhypothese trotz kleinem R^2_{ur} = 0,0387 bei sehr kleinen Signifikanzniveaus verworfen wird

---

Die Überprüfung von Ausschlussrestriktionen in linearen Regressionsmodellen ist bei weitem die häufigste Anwendung von F-Tests. Allerdings können auch allgemeinere lineare Restriktionen mit Hilfe von F-Tests untersucht werden.

Wenn z.B. ein lineares Regressionsmodell mit vier erklärenden Variablen, d.h. $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u$, sowie die Überprüfung der Nullhypothese H_0: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ betrachtet werden, muss weiterhin das unrestringierte und das restringierte Modell geschätzt werden. Damit ergibt sich:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u \quad \text{sowie}$$

$$y = \beta_0 + x_1 + u \quad \text{bzw.} \quad y - x_1 = \beta_0 + u$$

Beim restringierten Modell ergibt sich somit eine neue abhängige Variable.

Die Durchführung des entsprechenden F-Tests ist aber völlig analog zu vorher, d.h. es werden weiterhin die Residualabweichungsquadratsummen SSR_r und SSR_{ur} ermittelt, so dass daraus dann die F-Statistik berechnet werden kann:

$$F = \frac{\frac{SSR_r - SSR_{ur}}{4}}{\frac{SSR_{ur}}{n-5}} = \frac{SSR_r - SSR_{ur}}{SSR_{ur}} \frac{n-5}{4}$$

Allerdings können hier zur Ableitung der F-Statistik keine Bestimmtheitsmaße verwendet werden.

3.5 Asymptotische Eigenschaften

Bisherige Betrachtung:

- Eigenschaften von OLS-Schätzern bei kleinen (endlichen) Stichprobenumfängen n („finite sample properties"): Unabhängig von n sind OLS-Schätzer unter den Annahmen A1 bis A5 die besten linearen unverzerrten Schätzer (BLUE) und unter den Annahmen A1 bis A6 die besten unverzerrten Schätzer (BUE) der Regressionsparameter in linearen Regressionsmodellen
- Exakte Verteilungen: Die Annahmen A1 bis A6 (klassisches lineares Regressionsmodell) implizieren darüber hinaus, dass OLS-Schätzer exakt normalverteilt, t-Statistiken exakt t-verteilt und F-Statistiken exakt F-verteilt sind. Falls A6 dagegen nicht gilt, d.h. der Störterm u nicht normalverteilt ist, sind OLS-Schätzer sowie t- und F-Statistiken nicht normal-, t- und F-verteilt.

Allerdings:

Es lassen sich asymptotische Verteilungen von OLS-Schätzern, t- und F-Statistiken in linearen Regressionsmodellen ermitteln, die nicht für einen spezifischen (endlichen) Stichprobenumfang definiert sind, sondern für einen Stichprobenumfang, der über alle Grenzen gegen unendlich wächst. Dadurch kann gezeigt werden, dass t- und F-Statistiken bei großen Stichprobenumfängen auch ohne Annahme A6 zumindest näherungsweise t- und F-verteilt sind.

Zu den asymptotischen Eigenschaften von Schätzern:

- Für die Erwartungstreue von OLS-Schätzern in linearen Regressionsmodellen reichen die Annahmen A1 bis A4 aus, d.h. z.B. A5 (Homoskedastizität) muss hierfür nicht erfüllt sein (siehe Kapitel 2)
- Die Unverzerrtheit von Schätzern kann aber nicht immer gewährleistet werden. So ist z.B. die geschätzte Standardabweichung $\hat{\sigma}$ in (2.36) kein erwartungstreuer Schätzer für die Standardabweichung σ des Fehlerterms u in linearen Regressionsmodellen. Zudem können auch OLS-Schätzer in linearen Regressionsmodellen verzerrt sein, wenn die Annahmen A1 bis A4 nicht gelten.
- Allerdings erfordert die nützliche Anwendung eines Schätzers nicht unbedingt dessen Unverzerrtheit
- Dagegen ist die Konsistenz eines Schätzers in der Regel eine notwendige Bedingung für dessen nutzenbringenden Einsatz in empirischen Untersuchungen
- Die Konsistenz eines Schätzers ist dadurch gekennzeichnet, dass dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit wachsendem Stichprobenumfang n immer stärker gegen den entsprechenden (unbekannten) Parameter konvergiert und bei einem unendlichen n bei diesem Parameter kollabiert

Formale Definition von Konsistenz:

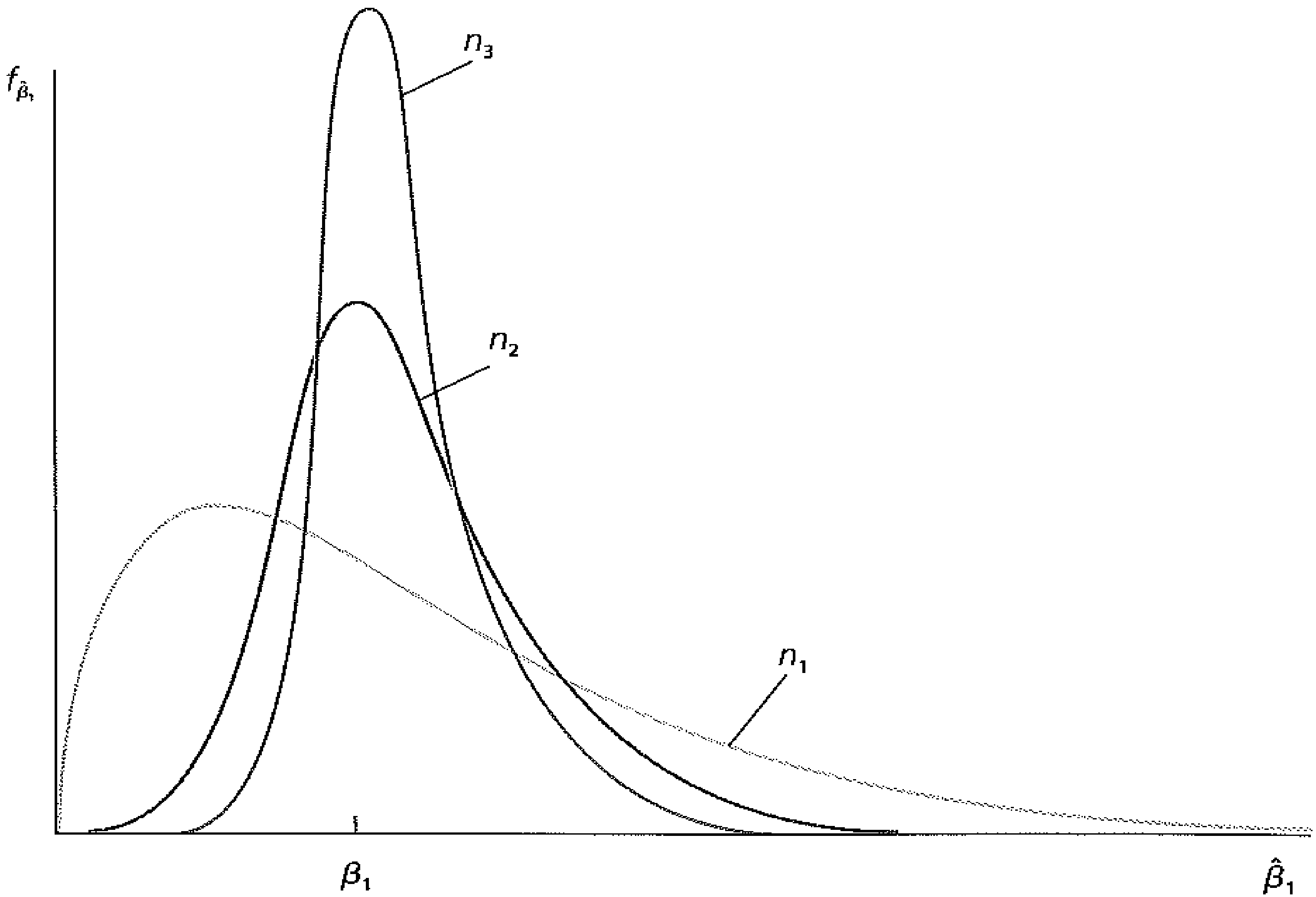
Falls W_n den Schätzer eines Parameters θ auf der Grundlage einer Stichprobe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ darstellt, ist W_n dann ein konsistenter Schätzer von θ, wenn für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, dass $P(|W_n - \theta| > \varepsilon)$ für $n \to \infty$ gegen null konvergiert. In diesem Fall konvergiert W_n stochastisch gegen θ, d.h. $\text{plim}(W_n) = \theta$.

Konsistenz von OLS-Schätzern:

- Falls die Annahmen A1 bis A4 gelten, sind OLS-Schätzer $\hat{\beta}_j$ ($j = 0,1,\ldots, k$) in linearen Regressionsmodellen konsistente Schätzer für β_j, d.h. $\text{plim}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$
- Damit sind für die Konsistenz von OLS-Schätzern dieselben Annahmen wie bei der Erwartungstreue ausreichend, d.h. z.B. A5 (Homoskedastizität) muss nicht erfüllt sein
- Tatsächlich muss für die Konsistenz von OLS-Schätzern nicht einmal A4, d.h. $E(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$ erfüllt sein. Ausreichend ist dagegen neben den Annahmen A1 bis A3 eine Abschwächung von A4, d.h. A4‘: $E(u) = 0$ und $Cov(x_j, u) = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, k$).
- Dies bedeutet, dass es nicht wie im Fall der Erwartungstreue notwendig ist, dass u im Erwartungswert von den erklärenden Variablen unabhängig ist, sondern dass es bereits ausreicht, wenn u mit den erklärenden Variablen unkorreliert ist. Die stärkere Annahme A4 impliziert dabei A4‘.

Graphische Darstellung:

Sampling distributions of $\hat{\beta}_1$ for sample sizes $n_1 < n_2 < n_3$.



Inkonsistenz von OLS-Schätzern:

- Zur Erinnerung: Falls $E(u|x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$, d.h. also A4 nicht gilt, sind die OLS-Schätzer in linearen Regressionsmodellen nicht erwartungstreu (siehe Kapitel 2.3)
- Analog ergibt sich die Inkonsistenz aller OLS-Schätzer, falls u mit einer beliebigen erklärenden Variablen korreliert ist, d.h. also falls A4‘ nicht gilt. In diesem Fall liegt somit Inkonsistenz und eine Verzerrung vor, so dass ein höherer Stichprobenumfang nicht zu einer Vermeidung des Bias führt.
- Die Richtung und Höhe der Inkonsistenz für den Fall der Vernachlässigung relevanter erklärender Variablen (und damit der asymptotischen Analogie zum omitted variable bias) ist analog zur Richtung und Höhe des Bias (siehe Kapitel 2.3). Der Unterschied besteht darin, dass sich die Inkonsistenz auf Varianzen und Kovarianzen in der Grundgesamtheit und der Bias auf entsprechende Stichprobenwerte bezieht.

Allerdings:

Obwohl die Konsistenz eines Schätzers eine wichtige Eigenschaft darstellt, können alleine damit keine statistischen Testverfahren durchgeführt bzw. Konfidenzintervalle ermittelt werden. Hierzu benötigt man Kenntnisse zur Verteilung der Schätzer.

→ Die exakte Normalverteilung der OLS-Schätzer in linearen Regressionsmodellen (und damit die exakte t- und F-Verteilung der t- und F-Statistiken) basiert dabei auf Annahme A6, d.h. $u \sim N(0; \sigma^2)$. Jedoch kann für Funktionen der OLS-Schätzer eine asymptotische Normalverteilung nachgewiesen werden, falls A6 nicht gilt.

Falls die Annahmen A1 bis A5 gelten, ergibt sich (auch ohne Annahme A6) für die mit OLS geschätzten Steigungsparameter in linearen Regressionsmodellen:

$$(3.25) \quad \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}} \overset{a}{\sim} N(0; 1)$$

Diese Eigenschaft widerspricht nicht (3.3), wonach diese Funktion exakt t-verteilt ist mit n-k-1 Freiheitsgraden, falls die Annahmen A1 bis A6 gelten, da für (3.25) auch analog folgende Darstellung möglich ist (da sich die t-Verteilung bei einer Zunahme der Anzahl an Freiheitsgraden der Standardnormalverteilung annähert):

$$(3.26) \quad \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j)}} \overset{a}{\sim} t_{n-k-1}$$

Folge:

Damit können auch für den Fall, dass der Störterm u nicht normalverteilt ist, die bisher betrachteten t- und F-Tests durchgeführt und Konfidenzintervalle konstruiert werden. Voraussetzung hierfür ist aber, dass der Stichprobenumfang n hinreichend groß ist. Bei kleinem n (bzw. bei einer kleinen Anzahl an Freiheitsgraden n-k-1) ist z.B. die Approximation der t-Statistik an die t-Verteilung unzureichend.

Asymptotische Effizienz:

Unter den Gauss-Markov-Annahmen (also unter den Annahmen A1 bis A5) sind OLS-Schätzer $\hat{\beta}_j$ (j = 0, 1,…, k) in einer Klasse konsistenter Schätzer $\tilde{\beta}_j$ der Regressionsparameter in linearen Regressionsmodellen asymptotisch effizient, d.h. für die asymptotische Varianz Avar gilt:

$$\mathrm{Avar}[\sqrt{n}(\hat{\beta}_j-\beta_j)] \leq \mathrm{Avar}[\sqrt{n}(\tilde{\beta}_j-\beta_j)]$$