Apl. Prof. Dr. Reinhold Kosfeld
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

Aufgaben zur Zeitreihenanalyse (Kap. 4)

Aufgabe 4.1

Gegeben sind die trendstationären Prozesse

(1) $x_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + u_t$

und

(2) $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + v_t$,

worin die Störgrößen u_t und v_t einem White-Noise-Prozess folgen.

a) Geben Sie die einem White-Noise-Prozess zugrundeliegenden Annahmen an und erläutern Sie sie! Worin unterscheidet sich ein White-Noise-Prozess von einem i.i.d-Prozess!

b) Zeigen Sie, dass das Steigungsmaß γ_1 von x_t einer

- Regression von y_t auf x_t unter Berücksichtigung des Trends t,

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_t + \gamma_2 \cdot t + \varepsilon_t,$$

gleichwertig aus einer

Regression der Residuen v_t auf die Residuen u_t ohne Berücksichtigung des Trends t,

$$v_t = \delta_0 + \delta_1 \cdot u_t + \varepsilon_t,$$

$\gamma_1 = \delta_1$, ermittelt werden kann!

c) Angenommen, die Niveaubeziehung

(3) $y_t = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_t + w_t$,

mit $E(w_t)=0$, $Var(w_t)=\sigma^2$ und $E(w_t \cdot w_{t-j})=0$ für $j>0$ würde für die trendstationären Prozesse (x_t) und (y_t) durch eine Regression von Δy_t auf Δx_t mit der OLS-Methode geschätzt.

Welche Folgen hat dieser Ansatz im Hinblick auf die

- Autokovarianz 1. Ordnung der Störvariablen,
- Varianz der Störvariablen

der Differenzenregression?

Aufgabe 4.2

Gegeben sind die beiden stochastischen Prozess

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + U_t, \;\; \beta \neq 0$$

und

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + U_t, \;\; \delta \neq 0,$$

in denen U_t eine White-Noise-Zufallsvariable mit verschwindendem Erwartungswert ist.

a) Erläutern Sie anhand der beiden stochastischen Prozesses die Begriffe des trend- und differenzstationären Prozesses!

b) Bestimmen Sie den Erwartungswerts und die Varianz der beiden Prozesse und interpretieren Sie anhand dieser Kenngrößen ihre stochastischen Eigenschaften!

Aufgabe 4.3

Warum folgt die (Augmented) Dickey-Fuller-Teststatistik keiner Standardverteilung?

Aufgabe 4.4

Der datengenerierende Prozess (X_t) mit dem Erwartungswert μ ist durch das in Abweichungen definierte AR(1)-Modell

$$X_t - \mu = \rho \cdot (X_{t-1} - \mu) + U_t$$

mit $\rho = \phi_1$ gegeben, das unter der Nullhypothese einer Einheitswurzel in X_t betrachtet wird.

a) Wie lautet die Testgleichung des Dickey-Fuller-Tests bei Verwendung der t-Statistik des Regressionskoeffizienten von X_{t-1} als Prüfgröße?

b) Erläutern Sie Hypothesen über die Regressionskoeffizienten, die auf der Grundlage einer OLS-Schätzung der Testgleichung sinnvoll überprüft werden können?

Aufgabe 4.5

X_t wird durch einen autoregressiven Prozess 1. Ordnung erzeugt, der in Abweichungen von einem potenziellem linearen Trend durch

$$X_t - \mu - \delta \cdot t = \rho \cdot (X_{t-1} - \mu - \delta \cdot (t-1)) + U_t$$

mit $\rho = \phi_1$ gegeben ist.

a) Geben Sie die Testgleichung des Dickey-Fuller-Tests bei Verwendung der t-Statistik des Regressionskoeffizienten von X_{t-1} als Prüfgröße an!

b) Erläutern Sie die Hypothesen über die Regressionskoeffizienten, die sich aufgrund einer OLS-Schätzung der Testgleichung sinnvoll überprüfen lassen?

Aufgabe 4.6

Gegeben ist ein Auszug eines EViews-Outputs über den Augmented Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) für den Verbraucherpreisindex (VPI), bei dem Auslassungen mit schwarzen Kreisen (● ● ● ●) markiert sind:

Null Hypothesis: ● ● ● ●
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=3)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		● ● ● ●	● ● ● ●
Test critical values:	1% level	-5.124875	
	5% level	-3.933364	
	10% level	-3.420030	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Warning: Probabilities and critical values calculated for 20 observations and may not be accurate for a sample size of 11
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(VPI)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1995 2005
Included observations: 11 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VPI(-1)	-0.583180	0.286953	-2.032321	0.0978
D(VPI(-1))	0.715937	0.231515	3.092400	0.0271
D(VPI(-2))	-0.593336	0.209739	-2.828920	0.0367
D(VPI(-3))	0.462335	0.161502	2.862721	0.0353
C	50.52030	24.92494	2.026897	0.0985
@TREND(1991)	0.868772	0.387218	2.243624	0.0749

a) Wie lautet die Nullhypothese des Augmented Dickey-Fuller-Tests (ADF-Tests)?

b) Welchen Wert nimmt die ADF-Teststatistik an?

c) Warum lässt sich die Nullhypothese des ADF-Tests auf einem Signifikanzniveau von 10% nicht verwerfen?

Aufgabe 4.7

Geben Sie die Testgleichung des erweiterten (augmented) Dickey-Fuller-Test für den datenerzeugenden Prozess (AR(3)-Prozess)

$$X_t = \phi_1 \cdot X_{t-1} + \phi_2 \cdot X_{t-2} + \phi_3 \cdot X_{t-3} + U_t$$

an! Formulieren Sie die Nullhypothese einer Einheitswurzel unter Verwendung der autoregressiven Parameter ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3!

Aufgabe 4.8

Die datenerzeugenden Prozesse für (X_t) und (Y_t) lauten

$$X_t + \alpha \cdot Y_t = U_t, \quad U_t = \mu_1 + \rho_1 \cdot U_{t-1} + \varepsilon_{1,t}, \quad 0 \le \rho_1 \le 1$$
$$X_t + \beta \cdot Y_t = V_t, \quad V_t = \mu_2 + \rho_2 \cdot V_{t-1} + \varepsilon_{2,t}, \quad 0 \le \rho_2 \le 1$$

mit $\alpha \neq \beta$, wobei α oder β gleich 0 sein kann. μ_1 und μ_2 sind Konstanten. (ε_1) und (ε_1) sind White-Noise-Prozesse.

Hinweis: Man kann durch adäquate Subtraktion der beiden Gleichungen (1a) und (2a) voneinander nach Einsetzen von (1b) und (2b) zeigen, dass X_t und Y_t im Falle a) und c) I(1)-Variablen sind.

a) Warum können die Variablen X_t und Y_t in dem Fall $\rho_1 = \rho_2 = 1$ nicht kointegriert sein?

b) Interpretieren Sie den Fall $0 \le \rho_1 < 1$ und $0 \le \rho_2 < 1$!

c) Zeigen Sie auf, dass X_t und Y_t unter der Bedingung $\rho_1 = 1$ und $0 \le \rho_2 < 1$ kointegriert sind!

Aufgabe 4.9

Die ungedeckte Zinsparität (uncovered interest parity, UIP) besagt, dass die nationalen Zinsdifferenzen $(i_t - i_t^*)$ den erwarteten Wechselkursveränderungen $(E(\Delta s_t))$ entsprechen (* steht für Ausland). Bei rationalen Erwartungen können die erwarteten Wechselkurveränderungen, $E(\Delta s_t)$, durch die beobachteten Wechselkurveränderungen, Δs_t, operationalisiert werden.

Im Falle einer Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität müssen die $i_t - i_t^*$ und Δs_t kointegriert sein, sofern sie nichtstationär sind. Bei Anwendung des Engle-Granger-Verfahrens zum Test auf Kointegration ist die Regressionsgleichung

(1) $\Delta s_t = \beta \cdot (i_t - i_t^*) + U_t,$

(i_t: deutscher Zinssatz, i_t^*: ausländischer Zinssatz, Δs_t: logarithmierte Wechselkursveränderung))

mit der OLS-Methode zu schätzen. Im Anschluss daran werden die Residuen dieser statistischen Regression (Langfristbeziehung) auf eine Einheitswurzel getestet.

Die beiden folgenden Tabellen geben die Ergebnisse des Engle-Granger-Tests für Deutschland im Vergleich zur OECD (=Ausland) für den Zeitraum con 1974-1998 wieder:

Dependent Variable: DLNEXRATE_GER (=Δs_t)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1974 1998
Included observations: 25 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INTRATEDIFF_GER (=$i_t - i_t^*$)	0.008894	0.002750	3.233745	0.0035

R-squared	0.071890	Mean dependent var	0.021652
Adjusted R-squared	0.071890	S.D. dependent var	0.038323
S.E. of regression	0.036920	Akaike info criterion	-3.720942
Sum squared resid	0.032714	Schwarz criterion	-3.672186
Log likelihood	47.51177	Durbin-Watson stat	1.699642

Null Hypothesis: U has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=5)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-4.398506	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.669359	
	5% level	-1.956406	
	10% level	-1.608495	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.
Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(U)
Method: Least Squares
Sample (adjusted): 1976 1998
Included observations: 23 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
U(-1)	-1.191353	0.270854	-4.398506	0.0003
D(U(-1))	0.368061	0.211583	1.739560	0.0966

R-squared	0.512149	Mean dependent var	0.000962
Adjusted R-squared	0.488918	S.D. dependent var	0.050263
S.E. of regression	0.035933	Akaike info criterion	-3.731393
Sum squared resid	0.027114	Schwarz criterion	-3.632654
Log likelihood	44.91102	Durbin-Watson stat	1.871809

a) Interpretieren Sie die mit der OLS-Methode geschätzte Langfristbeziehung (1)!

b) Beurteilen Sie anhand des Testergebnisses, ob die Zinsdifferenzen (i_t-i_t*) und Wechselkurveränderungen (Δs_t) kointegriert sind (α=0,05)?

Aufgabe 4.10

Gegeben sind die beiden nichtstationären Prozesse

$$X_t = 4 + 2 \cdot Z_t + U_t$$

und

$$Y_t = 2 + 3 \cdot Z_t + V_t$$

mit den I(0)-Variablen U_t und V_t und der I(1)-Variablen Z_t.

a) Zeigen Sie, dass X_t und Y_t kointegriert sind! Geben Sie die Ordnung (d,b) der Kointegration $X_t, Y_t \sim CI(d,b)$ an!

b) Geben Sie die Störvariable ε_t und den normierten Kointegrationsvektor einer Regression von Y auf X an!