3. Zufallsvariablen und ihre Verteilung

3.1 Begriff der Zufallsvariablen

Bisher haben wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Sie bestehen aus einem oder mehreren Ergebnissen eines Zufallsvorgangs, die nicht notwendigerweise numerisch sein müssen. So sind z.B. beim Münzwurf die Ergebnisse “Kopf“ oder “Zahl“, während die Augenzahlen als Ergebnisse bei einem Würfelwurf bereits Zahlen darstellen.

Mit Hilfe einer durch eine Zufallsvariable X definierten Funktionsvorschrift lassen sich alle Ergebnisse eines Zufallsvorgangs quantifizieren. Durch die Funktionsvorschrift werden den Ergebnissen eines Zufallsvorgangs reelle Zahlen zugeordnet.

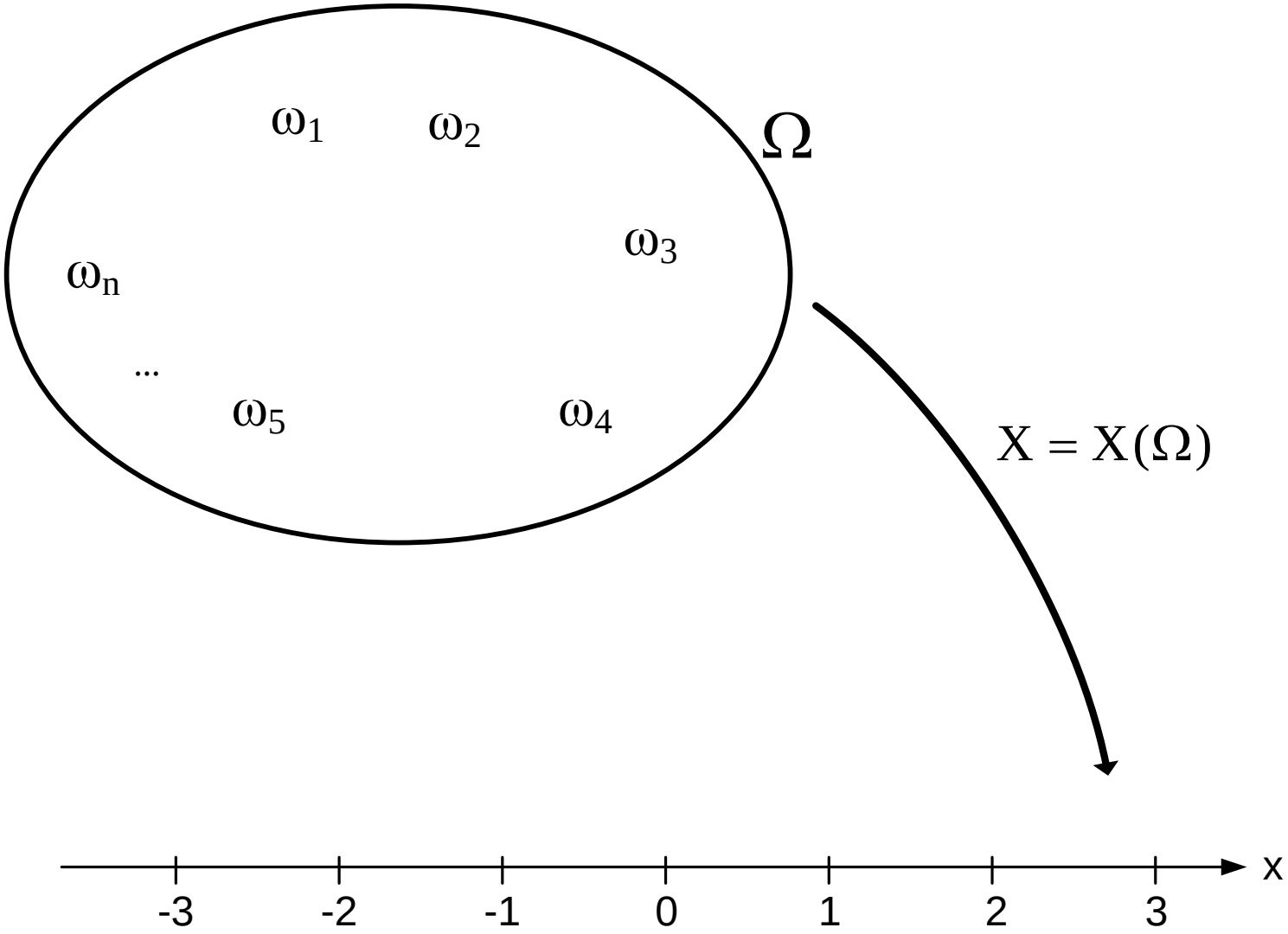
Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion (Abbildung), die den Ergebnissen ω der Ergebnismenge Ω reelle Zahlen zuordnet:

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Bei einem endlichen Stichprobenraum Ω ist die Zuordnung folgendermaßen gegeben (sofern die Abbildung umkehrbar eindeutig ist):

$$X(\omega) = \begin{cases} x_1 & \text{für} \quad \omega=\omega_1 \\ x_2 & \text{für} \quad \omega=\omega_2 \\ \vdots & \\ x_n & \text{für} \quad \omega=\omega_n \end{cases}$$

Konzept der Zufallsvariablen



Beispiel:

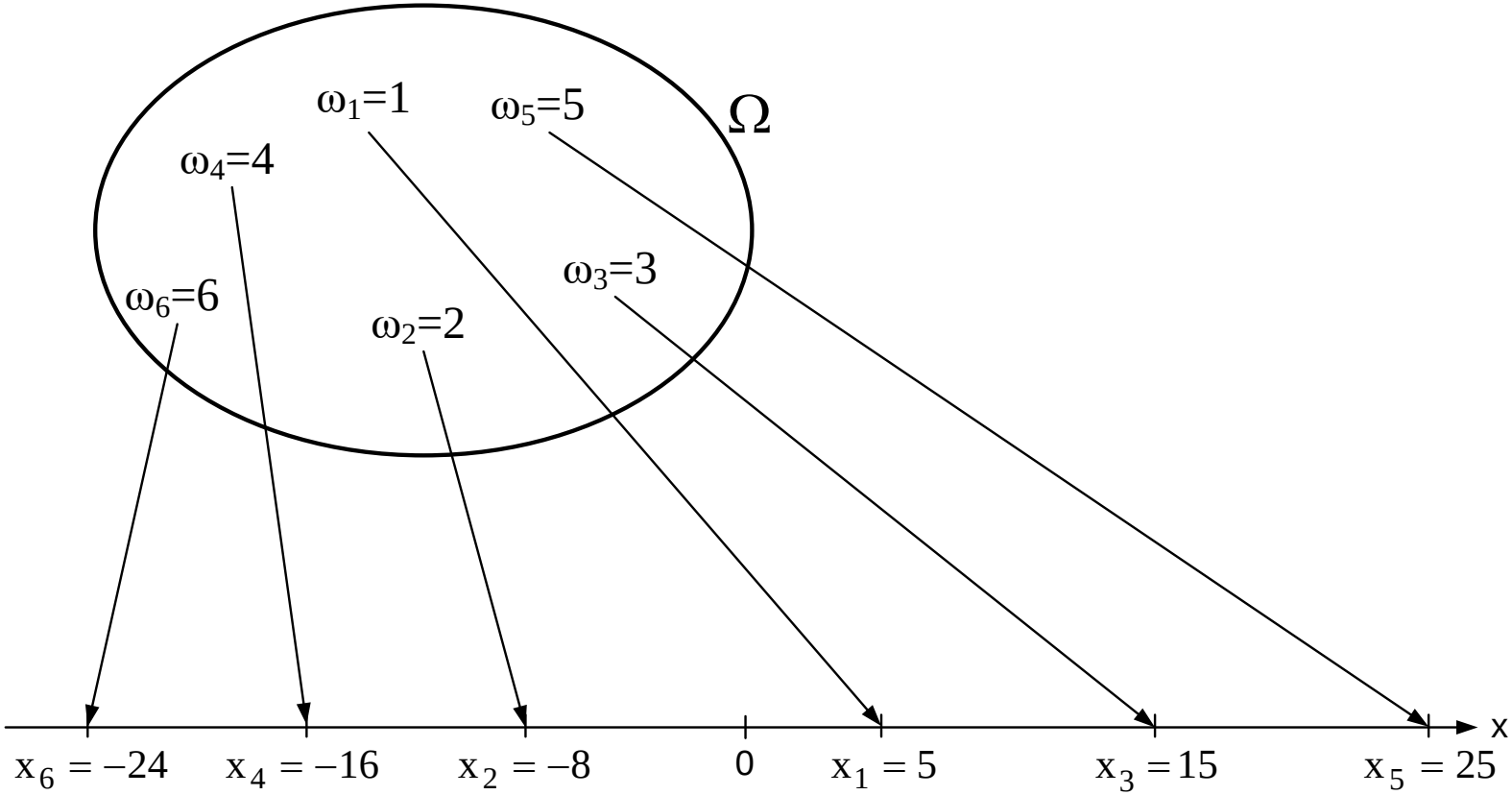
Es wird erneut das Ausspielen eines Würfels betrachtet. Bei einem Glücksspiel gewinnt ein Spieler das Fünffache der gewürfelten ungeraden und verliert das Vierfache der gewürfelten geraden Augenzahl in Euro.

Betrachtet wird die Zufallsvariable X “Gewinn“. Falls eine “1“ gewürfelt wird, gewinnt man 5 · 1 € = 5 €. Bei der Augenzahl “2" beträgt der Verlust 4 · 2 € = 8 €.

Die Zufallsvariable X ordnet jeder Augenzahl einen bestimmten Gewinn zu:

$$X(\omega) = \begin{cases} -24 & \text{für} \quad \omega=6 \\ -16 & \text{für} \quad \omega=4 \\ -8 & \text{für} \quad \omega=2 \\ +5 & \text{für} \quad \omega=1 \\ +15 & \text{für} \quad \omega=3 \\ +25 & \text{für} \quad \omega=5 \end{cases}$$

Grafisch ist die Zuordnung des Gewinns zu den ausgespielten Augenzahlen in der folgenden Abbildung wiedergegeben:


Ω
ω1=1
ω5=5
ω4=4
ω3=3
ω6=6
ω2=2
x
x6 = −24
x4 = −16
x2 = −8
0
x1 = 5
x3 = 15
x5 = 25

Beispiel:

Bei einer Qualitätskontrolle werden drei Teile aus einem Produktionsprozess entnommen. Dabei wird untersucht, ob das Teil defekt ist (D) oder nicht ($\bar{D}$).

Die Ergebnismenge ist hier folgendermaßen gegeben:

$$\Omega = \left\{ (DDD), (DD\bar{D}), (D\bar{D}D), (\bar{D}DD), (D\bar{D}\bar{D}), (\bar{D}D\bar{D}), (\bar{D}\bar{D}D), (\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \right\}$$

Gefragt ist nach der Anzahl der defekten Teile in der Stichprobe. Damit ist zugleich die Zufallsvariable X inhaltlich festgelegt und folgendermaßen definiert:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \omega = (\bar{D}\bar{D}\bar{D}) \\ 1 & \text{für} \quad \omega = (\bar{D}\bar{D}D), \omega = (\bar{D}D\bar{D}), \omega = (D\bar{D}\bar{D}) \\ 2 & \text{für} \quad \omega = (\bar{D}DD), \omega = (D\bar{D}D), \omega = (DD\bar{D}) \\ 3 & \text{für} \quad \omega = (DDD) \end{cases}$$

Diskrete und stetige Zufallsvariablen

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen kann aus den Wahrscheinlichkeiten der aus einem Zufallsvorgang hervorgehenden Elementarereignisse gewonnen werden. Häufig lässt sich jedoch die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X direkt ohne diesen Rückgriff auf die zugrunde liegende Ergebnismenge angeben.

In jedem Fall ist die Unterscheidung zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariablen bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen relevant. Die Wahrscheinlichkeiten für stetige Zufallsvariablen werden nämlich anders berechnet als für diskrete Zufallsvariablen.

Wertebereich diskreter Zufallsvariablen: Endlich oder abzählbar unendlich
Wertebereich stetiger Zufallsvariablen: Überabzählbar unendlich

Beispiele für diskrete Zufallsvariablen:

- Eine Zufallsvariable X bezeichne die Augenzahl beim einmaligen Ausspielen eines Würfels. Der Wertebereich der Zufallsvariablen X ist endlich, da X nur die Werte $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_6 = 6$ annehmen kann. X ist deshalb eine diskrete Zufallsvariable.
- Die Anzahl der Personen in einem Kaufhaus sei durch eine Zufallsvariable X wiedergegeben. X hat abzählbar unendlich viele Ausprägungen, wenn keine Obergrenze angegeben werden kann. Die Zufallsvariable X ist daher diskret.
- X bezeichne die Anzahl der Werkstücke, die eine Qualitätsnorm nicht erfüllen. Sofern die Produktion in einem vorgegebenen Zeitraum betrachtet wird, hat die Zufallsvariable endlich viele Ausprägungen, deren Obergrenze sich aus der Produktionsplanung ergibt. Auch hier liegt eine diskrete Zufallsvariable vor.

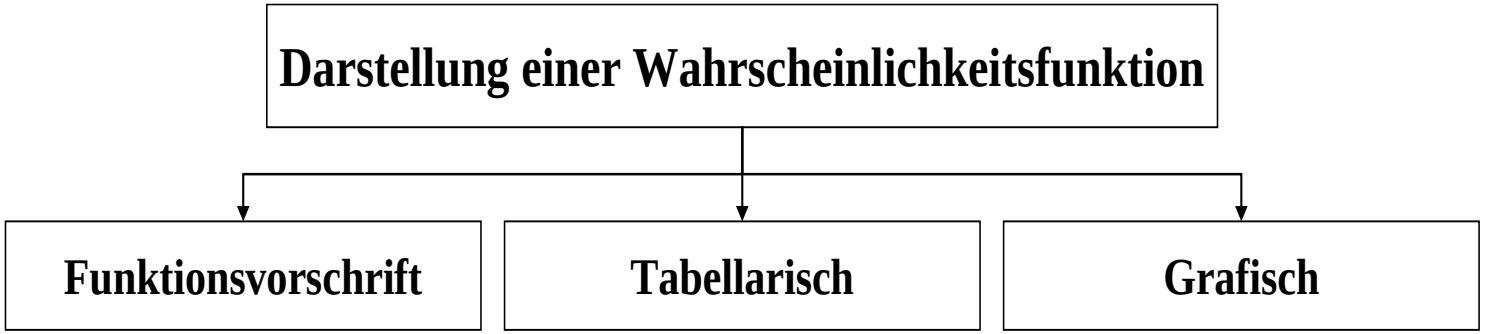
Beispiele für stetige Zufallsvariablen:

- X sei die Wartezeit vor einem Postschalter. Die Zufallsvariable X hat überabzählbar viele Ausprägungen, die im Intervall [0, T] liegen, wobei T die Öffnungsdauer des Schalters ist. Die Zufallsvariable X ist somit stetig.
- Die Zufallsvariable X bezeichne die Dauer von Telefongesprächen. Da X überabzählbar viele Ausprägungen hat, liegt eine stetige Zufallsvariable vor.

3.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Ordnet man den Ausprägungen x_j einer diskreten Zufallsvariablen X Wahrscheinlichkeiten zu, dann erhält man eine Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x). $P(X = x_j)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable X den Wert x_j annimmt. Für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_j)$ verwenden wir oft die Kurzschreibweise p_j.

Für ein besseres Verständnis wird bei der Erörterung der Wahrscheinlichkeitsfunktion von einer endlichen Zufallsvariablen X mit m Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ausgegangen. Die Verallgemeinerung auf unendlich viele Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots$ wird später aufgegriffen.



Formale (funktionale) Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion von X:

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{für } x = x_1 \\ p_2 & \text{für } x = x_2 \\ \vdots & \\ p_m & \text{für } x = x_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei gilt: $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen X gibt die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte dieser Zufallsvariablen an. Sie wird mit f(x) bezeichnet.

Eigenschaften:

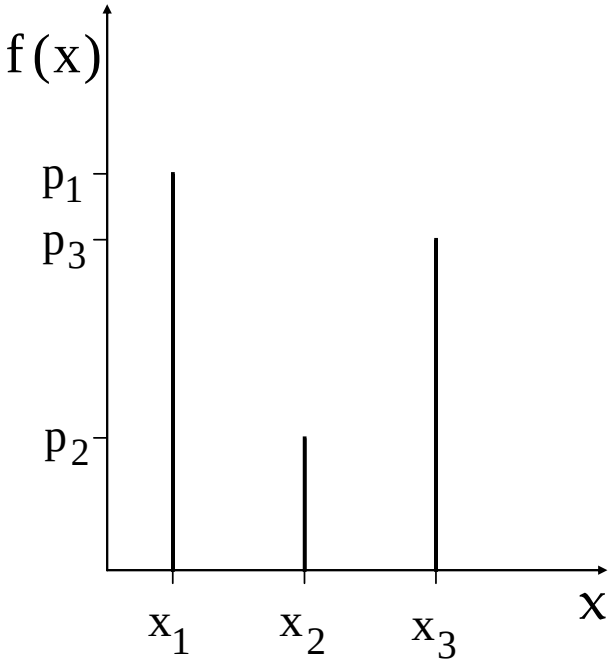
$$0 \leq \left[p_j = f\left(x_j\right)\right] \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} f\left(x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

Tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion von X:

x_j	$f(x)$
x_1	$f(x_1) = p_1$
x_2	$f(x_2) = p_2$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m) = p_m$

Grafische Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion von X mit einem Stabdiagramm:



Beispiel:

Betrachtet wird ein Produktionsprozess, bei dem zwei Teile entnommen werden. Jedes Teil kann defekt (D) oder nicht defekt ($\overline{D}$) sein. Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, ein defektes Teil zu entnehmen, gleich p ist:

P(D) = p, und somit $P\left(\overline{D}\right) = 1 - p$

Die Ergebnismenge des Zufallsexperiments enthält als Elemente alle möglichen Kombinationen von D und $\overline{D}$:

$$\Omega = \{(D,D),(D,\overline{D}),(\overline{D},D),(\overline{D},\overline{D})\}$$

Dabei ist z.B. (D,D) das Ergebnis, dass beide Teile defekt sind. Die Zufalls-variable X bezeichne die Anzahl der defekten Teile in der Stichprobe, so dass X die Ausprägungen 0,1 und 2 hat. Wir nehmen an, dass beide Entnahmen unabhängig voneinander erfolgen. Daher kann der Multiplikationssatz für stochastisch unabhängige Ereignisse angewendet werden.

Damit lautet die Wahrscheinlichkeit, dass kein Teil defekt ist (X = 0):

$f(0) = P(X = 0) = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Teile defekt sind (X = 2), lautet:

$f(2) = P(X = 2) = p \cdot p = p^2$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Teil defekt ist (X = 1), ergibt sich, wenn das 1. Teil defekt ist und das 2. Teil nicht defekt (D, $\overline{D}$) oder das 1. Teil nicht defekt und das 2. Teil defekt ($\overline{D}$, D). Da sich beide Versuchsausgänge gegenseitig ausschließen, gilt:

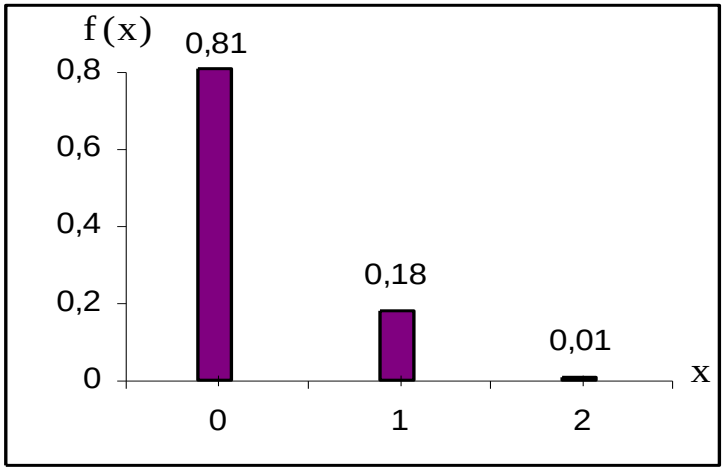
$f(1) = P(X = 1) = P(D, \overline{D}) + P(\overline{D}, D) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).$

Formale Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X:

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{für } x = 0 \\ 2p(1-p) & \text{für } x = 1 \\ p^2 & \text{für } x = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Tabellarische und grafische Darstellung für p = 0,1:

X=x	0	1	2
f(x)	0,81	0,18	0,01

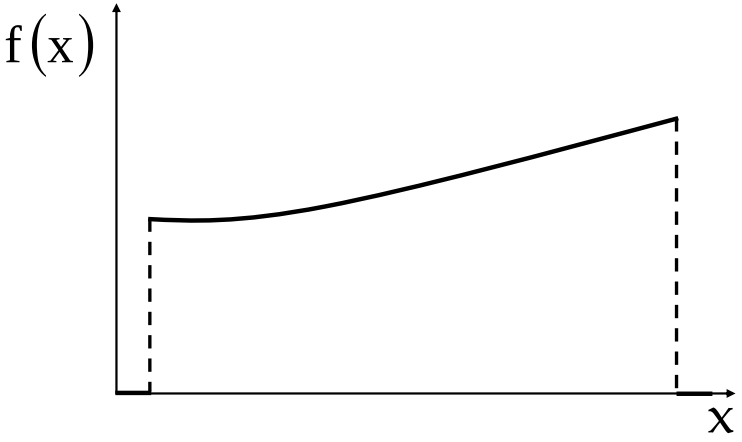


3.3 Dichtefunktion

Das Äquivalent zur Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Zufallsvariablen heißt bei stetigen Zufallsvariablen Dichtefunktion.

Erinnern wir uns nun an das Stabdiagramm, das im diskreten Fall die Wahrscheinlichkeitsfunktion grafisch darstellt. Wenn eine Zufallsvariable X überabzählbar viele Werte annehmen kann, dann grenzen die Stäbe beliebig dicht aneinander an, d.h. der Abstand zwischen den Stäben ist gleich 0. Wenn wir die oberen Punkte der überabzählbar vielen Stäbe miteinander verbinden, erhalten wir eine stetige Kurve, die die Dichtefunktion f(x) der Zufallsvariablen X wiedergibt.

Dichtefunktion von X



Eigenschaften:

$f(x) \geq 0$ für alle x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Intervallwahrscheinlichkeit

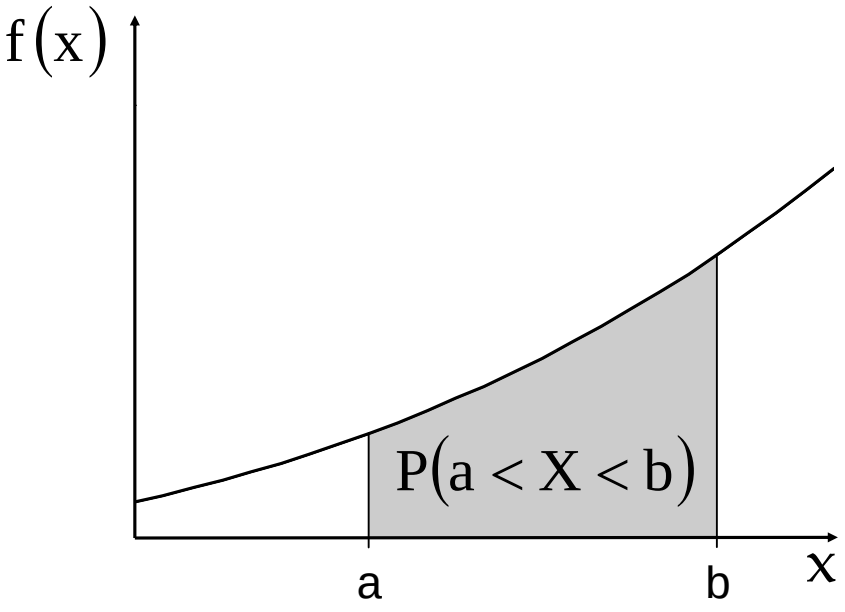
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable in das Intervall (a < X < b) fällt, ist der Flächeninhalt unterhalb der Dichtefunktion, die in diesem Intervall liegt:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Da Punktwahrscheinlichkeiten 0 sind, d.h. P(X = a) = 0, ist es unerheblich, ob die beiden Grenzen a und b in das Intervall einbezogen werden oder nicht:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$$

$$= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$



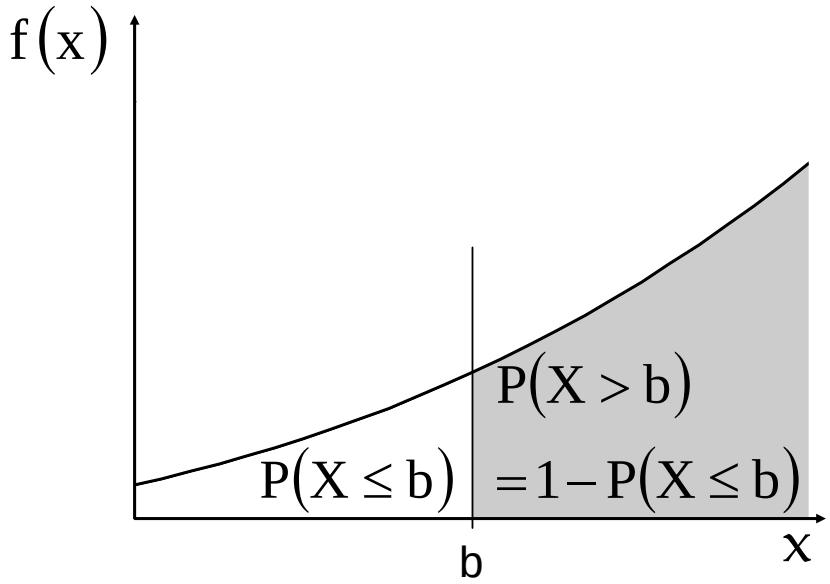
Wahrscheinlichkeit kleiner als ein Wert b:

$$P(X < b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Wahrscheinlichkeit größer als ein Wert b:

$$P(X > b) = P(X \geq b) = \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - P(X \leq b) = 1 - \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Komplementärwahrscheinlichkeit:



Wichtige Regeln der Integralrechnung

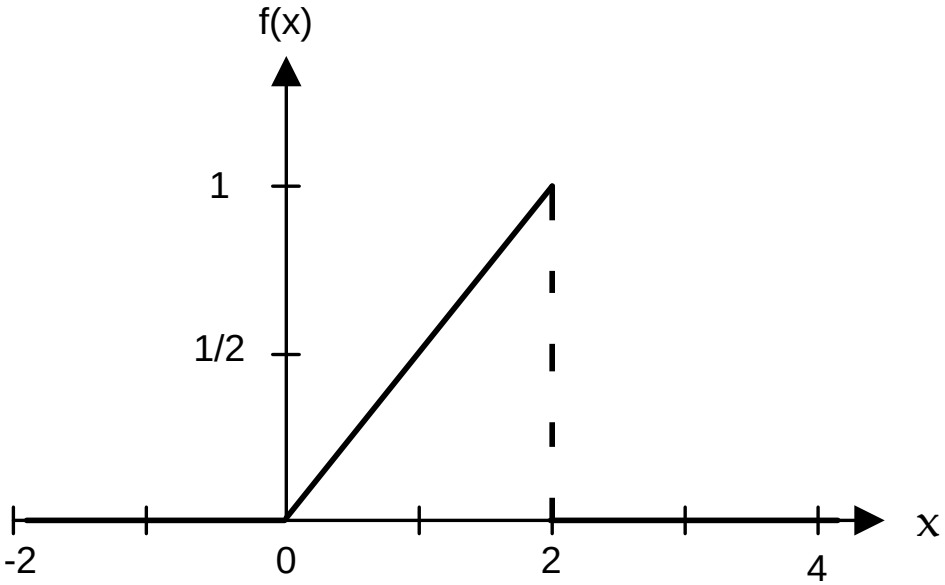
Regel	Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
Potenzregel	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
Spezialfall: n = -1	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e-Funktion	$e^{-a \cdot x}$	$(-1/a) \cdot e^{-a \cdot x}$
Faktorregel	$a \cdot g(x)$	$a \cdot \int g(x) \cdot dx$
Spezialfall: g(x) = 1	a	$a \cdot x$

Summenregel	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
Partielle Integration	$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$

Beispiel:

Besitzt folgende Funktion die Eigenschaften einer Dichtefunktion?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$



Die Funktion f(x) ist eine Dichtefunktion, wenn sie die zuvor erläuterten Eigenschaften erfüllt:

$f(x) \geq 0$ für alle x

Außerhalb des Intervalls (0, 2] ist die Funktion f(x) gleich 0. Im Intervall (0, 2] nimmt f(x) stets positive Werte an. Die Funktion f(x) erfüllt damit die Nichtnegativitätsbedingung.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Zu prüfen ist also, ob der Flächeninhalt unterhalb der Dichtefunktion gleich 1 ist:

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1} x^{1+1}\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} x^{2}\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} x^{2}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{4} 2^{2} - \frac{1}{4} 0^{2} = 1$$

Da die Funktion f(x) die beiden Bedingungen erfüllt, kann sie als Dichtefunktion zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X sei durch die im vorhergehenden Beispiel gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte zwischen 0,5 und 1,5 annimmt?

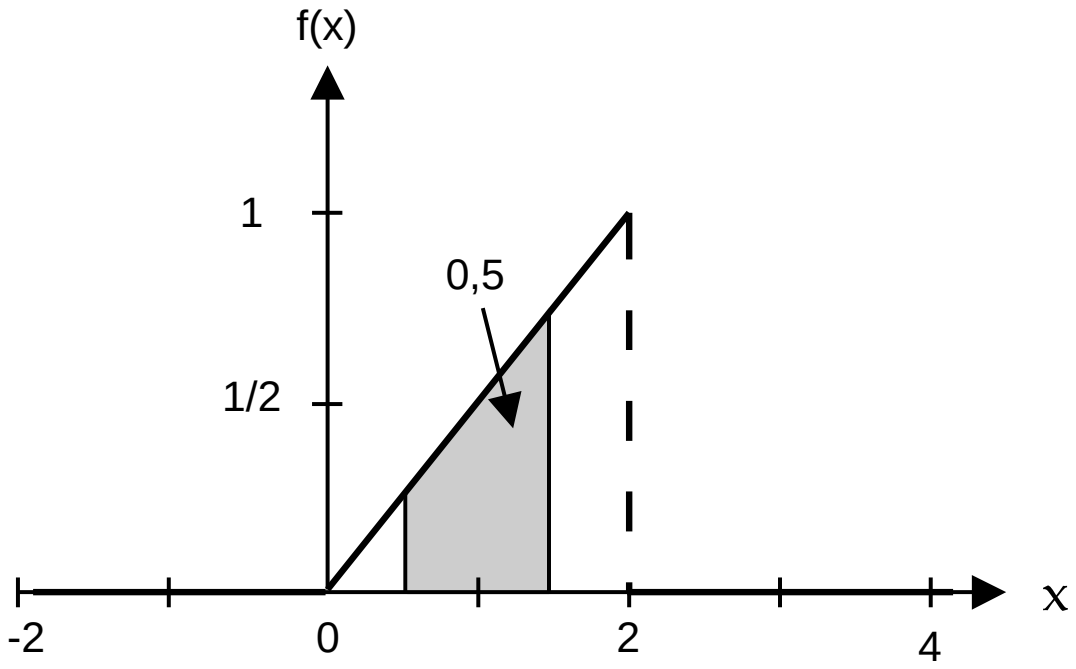
Um diese Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, ist der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion im Intervall [0,5; 1,5] zu ermitteln:

$$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = \int_{0,5}^{1,5} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right)\Bigg|_{0,5}^{1,5} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{0,5}^{1,5}$$

$$= \frac{1}{4}x^2\Bigg|_{0,5}^{1,5} = \frac{1}{4}1{,}5^2 - \frac{1}{4}0{,}5^2 = \frac{1}{4}(2{,}25 - 0{,}25)$$

$$= \frac{1}{4}2 = 0{,}5$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit dem Flächeninhalt unter der Dichtefunktion im Bereich zwischen 0,5 und 1,5 auf der x-Achse geht aus der folgenden Grafik hervor:



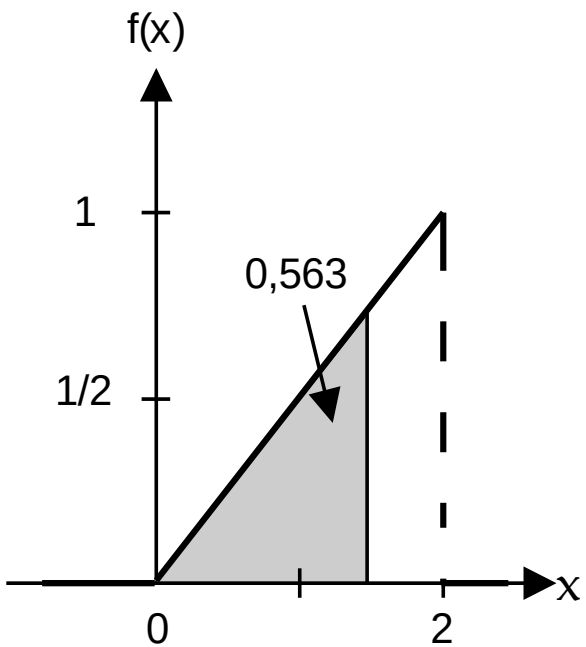
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X kleiner als 1,5 ist?

Für X < 0 ist die Dichtefunktion für alle Funktionswerte f(x) null. Die untere Integrationsgrenze ist deshalb null.

$$P(X < 1{,}5) = \int_0^{1{,}5} \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^{1{,}5}$$

$$= \frac{1}{4} 1{,}5^2 - \frac{1}{4} 0^2 = \frac{1}{4} 2{,}25$$

$$= 0{,}563$$



3.4 Verteilungsfunktion

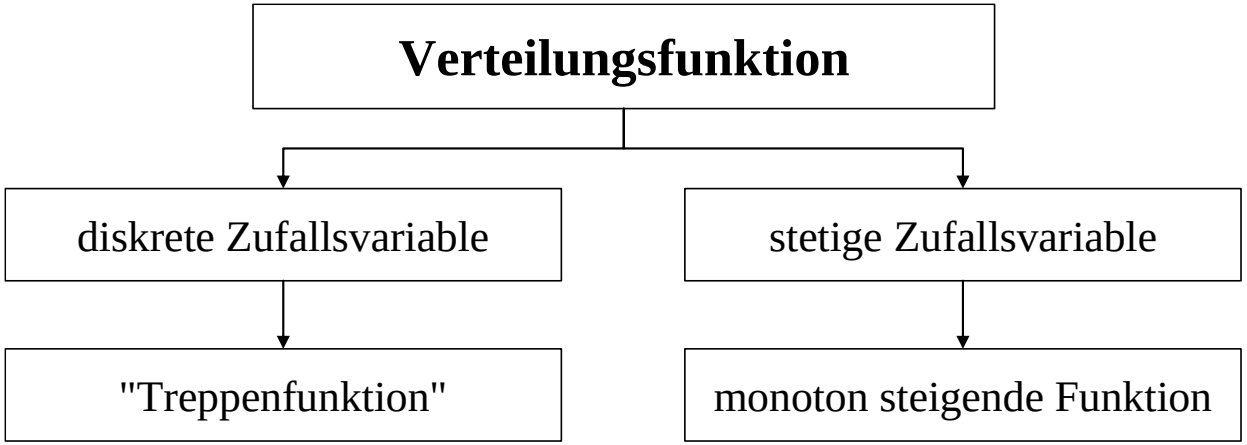
Die Verteilungsfunktion gibt an, welche Wahrscheinlichkeit sich bis zu einem bestimmten Wert x der Zufallsvariablen X kumuliert.

Die Verteilungsfunktion F(x) gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist:

$F(x) = P(X \leq x)$

Bei diskreten Zufallsvariablen erhält man die Verteilungsfunktion durch Aufsummieren von Wahrscheinlichkeiten, bei stetigen Zufallsvariablen durch Integration.

Form der Verteilungsfunktion bei diskreten und stetigen Zufallsvariablen



Diskrete Zufallsvariablen

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann ist ihre Verteilungsfunktion F(x) folgendermaßen gegeben:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} f(x_j) = \sum_{x_j \leq x} p_j$$

Die Summation erstreckt sich über alle Ausprägungen x_j, die kleiner oder gleich x sind.

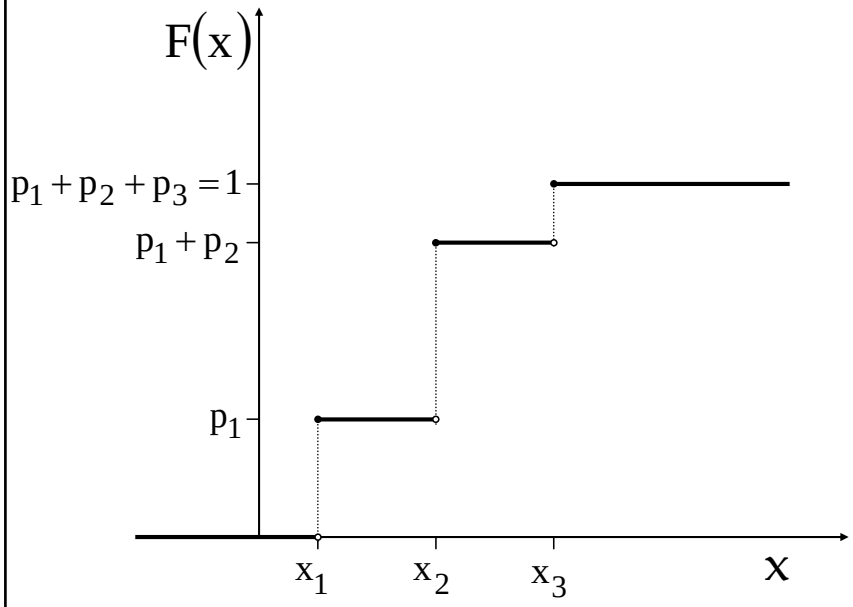
Bei einer endlichen Zufallsvariablen X mit m möglichen Realisationen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lässt sich die Verteilungsfunktion formal folgendermaßen darstellen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ p_1 & \text{für } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{für } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ 1 & \text{für } x \geq x_m \end{cases}$$

Tabellarische Darstellung:

x_j	$F(x_j)$
x_1	p_1
x_2	$p_1 + p_2$
$\vdots$	$\vdots$
x_m	1

Grafische Darstellung: Treppenfunktion

Erläuterung	Treppenfunktion
Der Punkt bei der Sprungstelle gibt an, dass der x-Wert jeweils den Funktionswert (= kumulierte Wahrscheinlichkeit) der oberen Sprunggrenze annimmt. An jeder Sprungstelle nimmt die Verteilungsfunktion F(x) um die entsprechende Wahrscheinlichkeit p_j zu.	

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten bei einer diskreten Zufallsvariablen X

Wahrscheinlichkeit für	Formaler Ausdruck
höchstens a	$P(X \leq a) = F(a)$
weniger als a	$P(X < a) = F(a) - P(X = a)$
mindestens a	$P(X \geq a) = 1 - F(a) + P(X = a)$
mehr als a	$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X im Beispiel des Produktionsprozesses, bei dem zwei Teile entnommen werden, ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} (1-p)^2 & \text{für } x = 0 \\ 2p(1-p) & \text{für } x = 1 \\ p^2 & \text{für } x = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Verteilungsfunktion von X ergibt sich daraus für ausgewählte x-Werte:

$$F(-1) = P(X \le -1) = 0$$

$$F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = (1-p)^2$$

$$F(0{,}2) = P(X \le 0{,}2) = P(X = 0) = (1-p)^2$$

$$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 = 1 - p^2$$

$$F(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = (1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = 1 - p^2 + p^2 = 1$$

Die Verteilungsfunktion von X lässt sich damit folgendermaßen darstellen:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ (1-p)^2 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1-p^2 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

Sie hat Sprungstellen in den Punkten x = 0, x = 1 und x = 2. Die Höhen der Sprungstellen addieren sich insgesamt zu 1.

Stetige Zufallsvariablen

Die Verteilungsfunktion F(x) entspricht bei einer stetigen Zufallsvariablen X dem Flächeninhalt unterhalb der Dichtefunktion f(u), die sich bis zum Wert x kumuliert hat. Man erhält sie durch Integration:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

Die Größe u wird hierbei als Integrationsvariable verwendet.

Mit der Verteilungsfunktion F(x) lassen sich ebenso wie mit der Dichtefunktion f(x) Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Bei stetigen Zufallsvariablen ist es unerheblich, ob die Intervallgrenze zum Intervall gezählt wird oder nicht, da Punktwahrscheinlichkeiten gleich null sind.

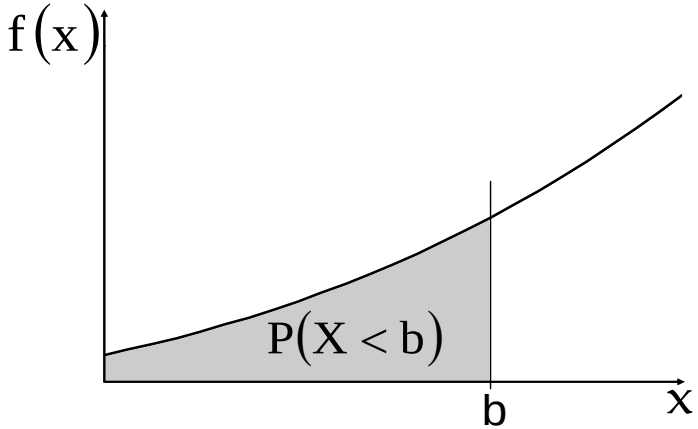
Kumulierte Wahrscheinlichkeiten bei einer stetigen Zufallsvariablen X

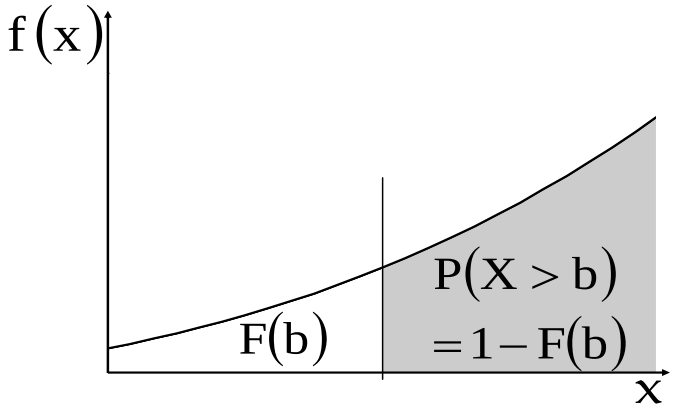
Wahrscheinlichkeit für	Formaler Ausdruck
höchstens a	$P(X \leq a) = F(a)$
weniger als a	$P(X < a) = F(a)$
mindestens a	$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
mehr als a	$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

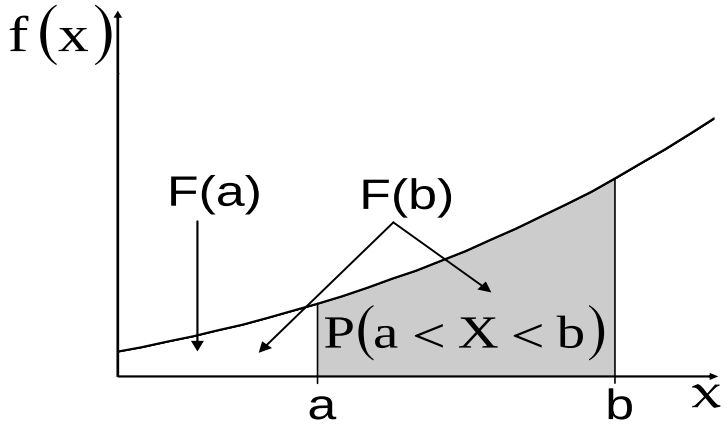
Wahrscheinlichkeiten für geschlossene und offene Intervalle bei einer stetigen Zufallsvariablen X:

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Intervallwahrscheinlichkeiten:







Beispiel:

Wir betrachten die zuvor verwendete Dichtefunktion von X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Welche Verteilungsfunktion hat die Zufallsvariable X?

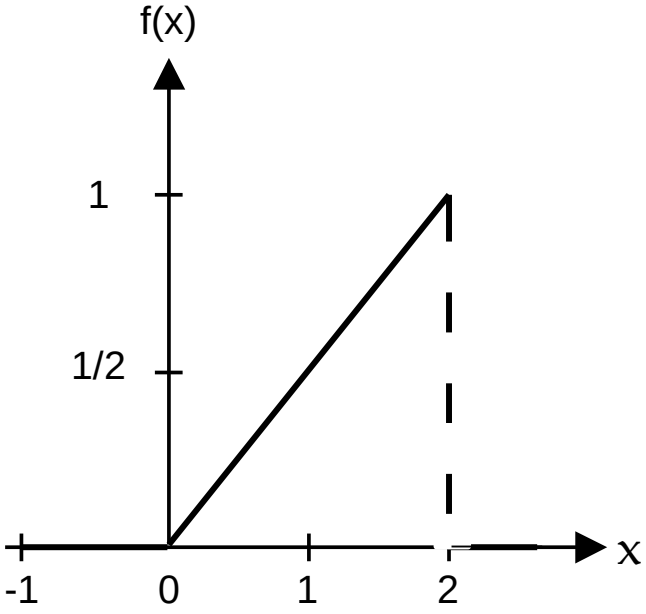
1. Schritt: Bildung des Integrals im Intervall $0 \le x \le 2$

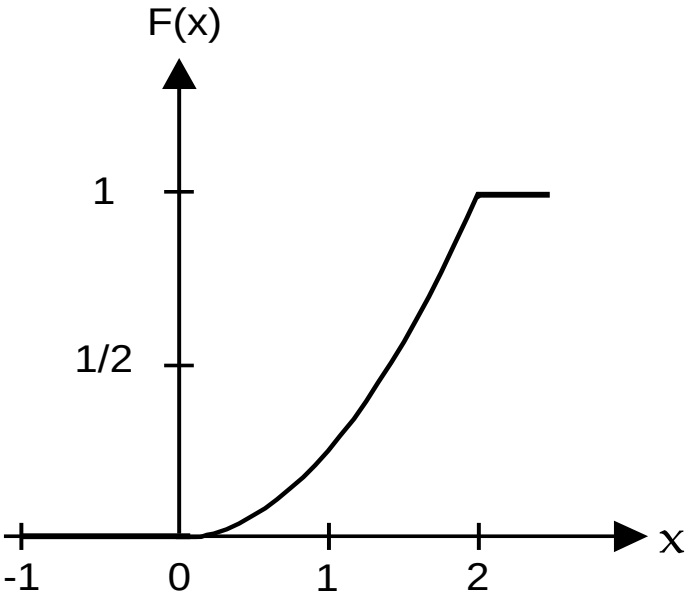
$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}u\,du = \frac{1}{4}u^2\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}0^2 = \frac{1}{4}x^2$$

2. Schritt: Ausweisen der Verteilungsfunkton

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Grafische Darstellung der Dichte- und Verteilungsfunktion von X:





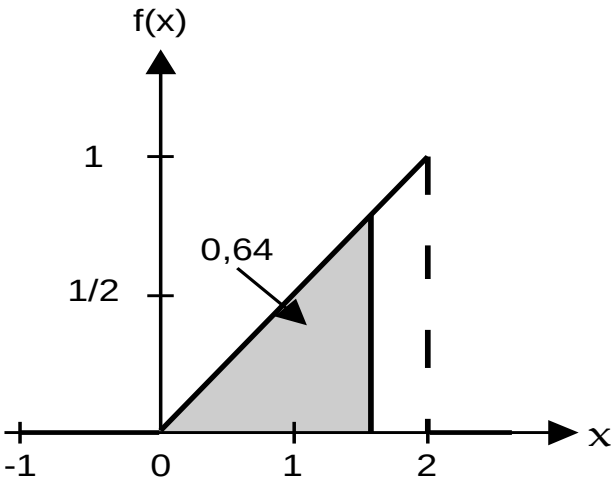
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte annimmt, die kleiner oder gleich 1,6 sind?

Berechnung mit Hilfe der Dichtefunktion f(x):

$$P(X \le 1{,}6) = \int_{-\infty}^{1{,}6} f(x)\,dx = \int_{0}^{1{,}6} \frac{1}{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^{1{,}6} = \frac{1}{4} 1{,}6^2 - \frac{1}{4} 0^2$$

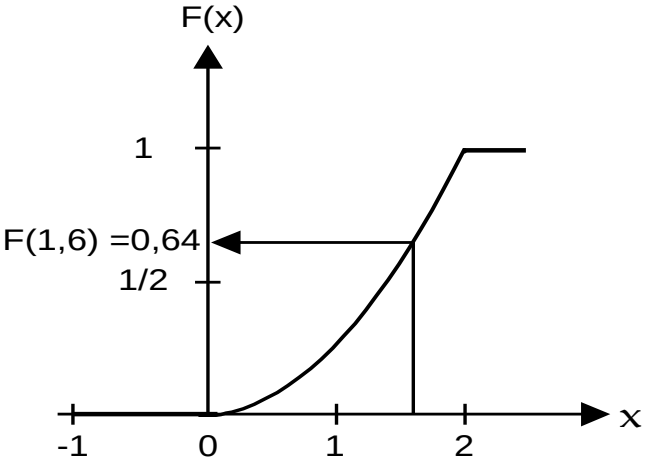
$$= 0{,}64$$



Berechnung mit Hilfe der Verteilungsfunktion F(x):

$$P(X \le 1{,}6) = F(1{,}6) = \frac{1}{4} 1{,}6^2$$

$$= \frac{1}{4} 2{,}56 = 0{,}64$$



Der Punkt x = 1,6 heißt 0,64-Quantil der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Welchen Wert nimmt die Wahrscheinlichkeit für 0,6 < X < 1,2 an?

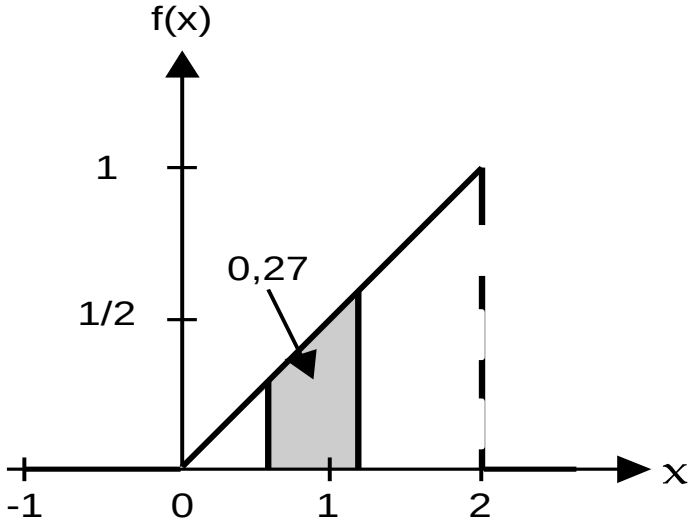
Berechnung mit Hilfe der Dichtefunktion f(x):

$$P(0{,}6 < X < 1{,}2) = \int_{0,6}^{1,2} f(x)\,dx = \int_{0,6}^{1,2} \frac{1}{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} x^2 \Big|_{0,6}^{1,2}$$

$$= \frac{1}{4} 1{,}2^2 - \frac{1}{4} 0{,}6^2$$

$$= 0{,}270$$



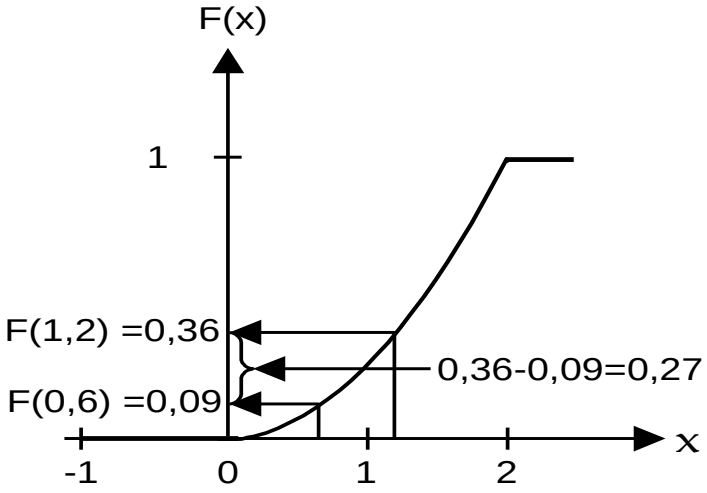
Berechnung mit Hilfe der Verteilungsfunktion F(x):

$$P(0{,}6 < X < 1{,}2) = F(1{,}2) - F(0{,}6)$$

$$= \frac{1}{4} 1{,}2^2 - \frac{1}{4} 0{,}6^2$$

$$= 0{,}36 - 0{,}09$$

$$= 0{,}270$$



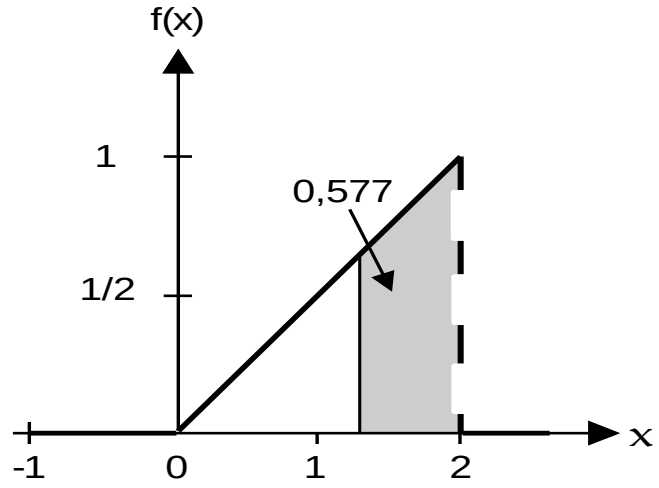
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X größer als 1,3 ist?

Berechnung mit Hilfe der Dichtefunktion f(x):

$$P(X > 1{,}3) = \int_{1{,}3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1{,}3}^{2} \frac{1}{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{4} x^2 \Big|_{1{,}3}^{2} = \frac{1}{4} 2^2 - \frac{1}{4} 1{,}3^2$$

$$= 0{,}577$$

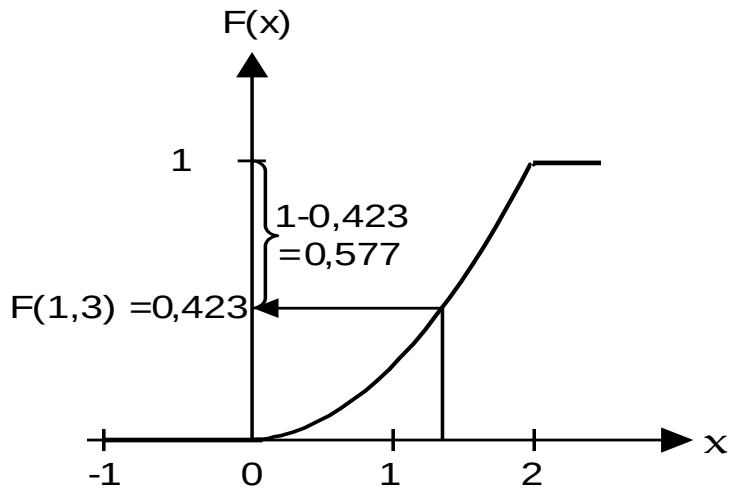


Berechnung mit Hilfe der Verteilungsfunktion F(x):

$$P(X > 1{,}3) = 1 - F(1{,}3)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} 1{,}3^2 = 1 - 0{,}423$$

$$= 0{,}577$$



3.5 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen sind Maßzahlen (Kenngrößen), mit denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen genauer beschrieben werden kann.

Maßzahlen einer Zufallsvariablen

Erwartungswert
Durchschnittswert aus einer Vielzahl von Zufallsexperimenten

Varianz
Durchschnittliche quadratische Abweichung vom Erwartungswert

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsvariablen X gibt an, welchen Wert sie bei einer unbegrenzten Wiederholung des Zufallsexperiments im Durchschnitt annehmen würde. Praktisch lässt er sich als Durchschnittswert bei einer großen Anzahl von Wiederholungen des Zufallsvorgangs interpretieren. Der Erwartungswert E(X) von X wird auch als arithmetisches Mittel μ der Grundgesamtheit bezeichnet.

Erwartungswert bei diskreten Zufallsvariablen X (bei m möglichen Realisationen):

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j p_j = \sum_{j=1}^{m} x_j f(x_j)$$

Erwartungswert bei stetigen Zufallsvariablen X:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Beispiel:

Beim Ausspielen eines Würfels gewinnt man das Fünffache der gewürfelten ungeraden Augenzahl und verliert das Vierfache der geraden Augenzahl. Die Gewinn- und Verlustbeträge werden in Euro gemessen. Wie hoch ist der Erwartungswert des Gewinns, wenn Sie an diesem Glücksspiel teilnehmen?

In einem ersten Schritt wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Zufallsvariable X erstellt:

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 \text{ für } x = -24 \\ 1/6 \text{ für } x = -16 \\ 1/6 \text{ für } x = -8 \\ 1/6 \text{ für } x = 5 \\ 1/6 \text{ für } x = 15 \\ 1/6 \text{ für } x = 25 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Damit lässt sich der Erwartungswert von X bestimmen:

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{6} x_j p_j$$

$$= (-24)\frac{1}{6} + (-16)\frac{1}{6} + (-8)\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 15\frac{1}{6} + 25\frac{1}{6}$$

$$= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Es ist also im Durchschnitt mit einem Verlust von einem halben Euro pro Spiel zu rechnen.

Beispiel:

Wir betrachten die bereits bekannte Dichtefunktion der Zufallsvariablen X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Wie groß ist der Erwartungswert von X?

Da die Zufallsvariable X stetig ist, integrieren wir über das Intervall zwischen 0 und 2, da die Dichtefunktion nur in diesem Bereich Werte ungleich 0 annimmt:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x\, \tfrac{1}{2} x\, dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3}$$

Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen

Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen X sind Streuungsmaße, die angeben, wie stark ihre Realisationen um den Erwartungswert streuen.

Die Varianz Var(X) gibt die durchschnittliche quadrierte Abweichung wieder. Sie wird auch durch das Symbol σ^2 gekennzeichnet.

Varianz bei diskreten Zufallsvariablen X (bei m möglichen Realisationen):

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left(X - \mu\right)^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \mu\right)^2 p_j = \sum_{j=1}^{m}\left(x_j - \mu\right)^2 f\left(x_j\right)$$

Varianz bei stetigen Zufallsvariablen X:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left(X - \mu\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \mu\right)^2 f\left(x\right)\, dx$$

Die Standardabweichung σ gibt als Wurzel aus der Varianz an, wie stark die Werte der Zufallsvariablen X durchschnittlich von ihrem Erwartungswert E(X) abweichen.

Standardabweichung von X:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

Beispiel:

Wie groß sind Varianz und Standardabweichung der geworfenen Augenzahl X beim einmaligen Ausspielen eines fairen Würfels?

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } x = 1, 2, \ldots, 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich folgender Erwartungswert von X:

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^{6} x_j p_j = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6}21 = 3{,}5$$

Für die Varianz von X gilt dann:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{6} \left(x_j - \mu\right)^2 p_j$$

$$= \left(1 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6} + \left(2 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6} + \left(3 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6} + \left(4 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$+ \left(5 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6} + \left(6 - 3{,}5\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25\right) = \frac{1}{6} 17{,}5 = 2{,}917$$

Die Ausspielungen der Würfel weichen damit durchschnittlich um

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} = 1{,}708$$

vom Erwartungswert 3,5 ab.

Beispiel:

Betrachtet wird wieder folgende Dichtefunktion von X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Mit dem bereits bestimmten Erwartungswert von 4/3 lassen sich Varianz und Standardabweichung von X berechnen:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2} x\, dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right)\frac{1}{2} x\, dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{9}x\right) dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{8} - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2\right|_0^2 = 2 - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = \frac{2}{9} = 0{,}222$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0{,}471$$

3.6 Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz

Varianzverschiebungssatz

Der Varianzverschiebungssatz ist eine vereinfachte Berechnungsformel zur Varianzermittlung. Hier werden nur der Erwartungswert von der quadrierten Zufallsvariablen sowie der einfache Erwartungswert benötigt:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

Beweis (Bildung von Erwartungswerten bei linearen Funktionen siehe später):

$$\sigma^2 = E\left\{\left[X - E(X)\right]^2\right\} = E\left\{\left[X - E(X)\right]\left[X - E(X)\right]\right\}$$

$$= E\left\{X^2 - 2XE(X) + \left[E(X)\right]^2\right\}$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left[E(X)\right]^2$$

$$= E(X^2) - 2\left[E(X)\right]^2 + \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

Berechnung des Erwartungswertes von X^2:

Diskrete Zufallsvariable X	Stetige Zufallsvariable X
$E\left(X^2\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_j = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 f\left(x_j\right)$	$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$

Beispiel:

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der geworfenen Augenzahl X beim einmaligen Ausspielen eines Würfels ermitteln wir zunächst den Erwartungswert von X^2:

$$E\left(X^2\right) = \sum_{j=1}^{6} x_j^2 p_j$$

$$= 1^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} + 4^2 \frac{1}{6} + 5^2 \frac{1}{6} + 6^2 \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36\right) = \frac{91}{6} = 15{,}167$$

Mit dem Varianzverschiebungssatz erhält man für X das mit der originären Varianzformel berechnete Ergebnis:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = 15{,}167 - 3{,}5^2 = 15{,}167 - 12{,}25 = 2{,}917$$

Beispiel:

Betrachtet wird wieder die folgende Dichtefunktion von X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

Damit nimmt der Erwartungswert von X^2 folgenden Wert an:

$$E\left(X^2\right) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 \tfrac{1}{2} x\,dx = \int_0^2 \tfrac{1}{2} x^3\,dx = \frac{1}{8} x^4 \Big|_0^2$$

$$= \frac{16}{8} - 0 = 2$$

Unter Verwendung des bereits ermittelten Erwartungswertes von X erhält man denselben Wert für die Varianz der Zufallsvariablen X:

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{18}{9} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} = 0{,}222$$

Lineartransformation

In verschiedenen Anwendungen wird von einer Lineartransformation Gebrauch gemacht, indem eine Zufallsvariable X um einen konstanten Betrag a und einen multiplikativen Faktor b verändert wird:

$$Y = a + bX$$

Man erhält den Erwartungswert E(Y) der neuen Zufallsvariablen Y, indem man die Lineartransformation in gleicher Form auf den ursprünglichen Erwartungswert E(X) anwendet:

$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$$

Beweis (für eine stetige Zufallsvariable Y):

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} bxf(x)\, dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = E(X)$$

Daraus folgt:

$$E(Y) = a + bE(X)$$

Wie sich gezeigt hat, lässt sich der neue Erwartungswert durch eine lineare Transformation E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) aus dem ursprünglichen Erwartungswert E(X) ableiten. Aufgrund der in dieser Gleichung wiedergegebenen Transformationseigenschaften bezeichnet man den Erwartungswert auch als linearen Operator.

Daraus folgt, dass der Erwartungswert einer Konstanten gleich der Konstanten ist:

E(a) = a

Beispiel:

Im vorhergehenden Beispiel hatten wir die Zufallsvariable Gewinn bei einem Ausspielen eines Würfels betrachtet. Die Spielerin gewinnt das Fünffache der gewürfelten ungeraden Augenzahl und verliert das Vierfache der geraden Augenzahl. Die Gewinn- und Verlustbeträge werden in Euro gemessen.

Angenommen, die Glücksspielerin möchte ihren Gewinn, der in Euro ausgezahlt wird, in Dollar [$] umtauschen. Für einen Euro erhält sie 1,30 Dollar. Zusätzlich fallen Umtauschgebühren unabhängig von der Höhe des Gewinns von 2 Dollar an. Alle Gewinne werden also um 2 Dollar vermindert. Wie hoch ist der erwartete Gewinn in Dollar?

Die Formel für die Lineartransformation lautet:

$$Y[\text{in } \$] = -2\,\$ + 1{,}30\,\frac{\$}{€}\,X[\text{in } €]$$

Zu berechnen ist der erwartete Dollar-Gewinn durch:

Anwendung der Lineartransformation auf die in Euro ausgezahlten Einzelgewinne sowie Anwendung der Lineartransformation auf den Erwartungswert des Gewinns in Euro.

Berechnung des erwarteten Dollar-Gewinns aus den Einzelgewinnen

Gewinne in Dollar:

$y_1 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_1 = -24) = -33{,}20$ $\quad$ $y_2 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_2 = -16) = -22{,}80$

$y_3 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_3 = -8) = -12{,}40$ $\quad$ $y_4 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_4 = 5) = 4{,}50$

$y_5 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_5 = 15) = 17{,}50$ $\quad$ $y_6 = -2 + 1{,}30 \cdot (x_6 = 25) = 30{,}5$

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Dollar-Gewinne Y

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } y = -33{,}20 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = -22{,}80 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = -12{,}40 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 4{,}50 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 17{,}50 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 30{,}50 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwarteter Dollar-Gewinn

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{6} y_j p_j \\ &= (-33{,}20)\frac{1}{6} + (-22{,}80)\frac{1}{6} \\ &\quad + (-12{,}40)\frac{1}{6} + 4{,}50\frac{1}{6} \\ &\quad + 17{,}50\frac{1}{6} + 30{,}50\frac{1}{6} \\ &= -2{,}65\,[\$] \end{aligned}$$

Berechnung des erwarteten Dollar-Gewinns aus dem erwarteten Euro-Gewinn

Erwarteter Euro-Gewinn:

$$E(X) = -\frac{1}{2}$$

Erwarteter Dollar-Gewinn:

$$\begin{aligned} E(Y) &= a + bE(X) \\ &= -2 + 1{,}30(-0{,}5) \\ &= -2{,}65 \end{aligned}$$

Im Falle einer linearen Transformation Y = a + bX einer Zufallsvariablen X werden bei der Varianzbildung multiplikative Konstanten quadriert. Die Varianz ändert sich dagegen nicht, wenn zu der Zufallsvariablen eine Konstante addiert wird. Daraus folgt, dass die Varianz einer Konstanten stets gleich 0 ist.

Man erhält damit die neue Varianz Var(Y) aus der ursprünglichen Varianz Var(X) mit:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a + bX) = b^2\mathrm{Var}(X)$$

Beweis:

Die Varianz ist definiert als quadrierte Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert:

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left[Y - E(Y)\right]^2 = E\left[(a + bX) - E(a + bX)\right]^2$$

$$= E\left[a + bX - E(a + bX)\right]^2$$

Damit erhält man:

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left[a + bX - a - bE(X)\right]^2 = E\left[bX - bE(X)\right]^2$$

Daraus folgt schließlich:

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left\{b\left[X - E(X)\right]\right\}^2 = b^2 E\left[X - E(X)\right]^2 = b^2 \mathrm{Var}(X)$$

Beispiel:

Wie hoch ist die Varianz des Dollar-Gewinns? Gerechnet wird wiederum auf zwei Arten:

Anwendung der Lineartransformation auf die in Euro ausgezahlten Einzelgewinne sowie Anwendung der Lineartransformation auf die Varianz des Gewinns in Euro

Berechnung der Varianz des Dollar-Gewinns aus den Einzelgewinnen

Wahrscheinlichkeitsfunktion des Dollar-Gewinns Y

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } y = -33{,}20 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = -22{,}80 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = -12{,}40 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 4{,}50 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 17{,}50 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y = 30{,}50 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwarteter Dollar-Gewinn:

$$E(Y) = -2{,}65$$

Daraus ergibt sich die Varianz des Dollar-Gewinns:

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= \sum_{j=1}^{6}\left[y_j - E(Y)\right]^2 p_j = \sum_{j=1}^{6}\left[y_j - (-2{,}65)\right]^2 p_j \\
&= \left[-33{,}2 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 + \left[-22{,}8 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 \\
&\quad + \left[-12{,}4 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 + \left[4{,}5 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 \\
&\quad + \left[17{,}5 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 + \left[30{,}5 - (-2{,}65)\right]^2 1/6 \\
&= 155{,}550 + 67{,}670 + 15{,}844 + 8{,}520 + 67{,}670 + 183{,}154 \\
&= 498{,}408
\end{aligned}$$

Berechnung der Varianz des Dollar-Gewinns aus der Varianz des Euro-Gewinns

Der Erwartungswert des Euro-Gewinns beträgt:

$$E(X) = -0{,}5$$

Der Varianz des Euro-Gewinns beträgt:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{6}\left[x_j - E(X)\right]^2 p_j = \sum_{j=1}^{6}\left[x_j - (-0{,}5)\right]^2 p_j$$

$$= \left[-24 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6 + \left[-16 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6$$

$$+ \left[-8 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6 + \left[5 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6$$

$$+ \left[15 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6 + \left[25 - \left(-0{,}5\right)\right]^2 1/6$$

$$= 92{,}042 + 40{,}042 + 9{,}375 + 5{,}042 + 40{,}042 + 108{,}375$$

$$= 294{,}918$$

Mit Hilfe der Transformationsformel kann damit die Varianz des Dollar-Gewinns berechnet werden (Abweichung durch Rundungsungenauigkeiten):

$$\mathrm{Var}\left(Y\right) = b^2\mathrm{Var}\left(X\right)$$

$$= 1{,}3^2 \cdot 294{,}917$$

$$= 498{,}410$$

3.7 Zwei- und mehrdimensionale Zufallsvariablen

Betrachtet wird jetzt der Fall, dass mehrere Zufallsvariablen gleichzeitig analysiert werden. Allgemein ist eine n-dimensionale Zufallsvariable durch das n-Tupel $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ gegeben. Wir beschränken uns aber auf den Fall der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y), da die Konzepte mehrdimensionaler Verteilungen anhand von bivariaten Verteilungen anschaulich illustriert werden können.

Zwei- und mehrdimensionalen Verteilungen können diskrete oder stetige Zufallsvariablen zugrunde liegen. Unterschieden werden hier gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilungen (gemeinsame Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktionen) sowie Randverteilungen (Randwahrscheinlichkeits- bzw. Randdichtefunktionen).

Wie bei den eindimensionalen Verteilungen sind der Erwartungswert und die Varianz Parameter der Randverteilungen. Parameter der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient.

Beispiel:

Ein Würfel wird zweimal hintereinander ausgespielt. Die Zufallsvariable X bezeichne die Augenzahl beim ersten Wurf, die Zufallsvariable Y die Augenzahl beim zweiten Wurf. Dann ist (X,Y) eine zweidimensionale Zufallsvariable, deren Wertebereich aus allen geordneten Paaren (x_j,y_k) besteht, die sich aus den natürlichen Zahlen 1 bis 6 zusammensetzen.

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion und Randwahrscheinlichkeitsfunktionen

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion f(x,y) der zweidimensionalen diskreten Zufallsvariablen (X,Y) ordnet den geordneten Paaren (x_j,y_k) Wahrscheinlichkeiten p_{jk} zu:

$$f(x, y) = \begin{cases} P\left(X = x_j, Y = y_k\right) = p_{jk} & \text{für} \quad x = x_j, y = y_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Randwahrscheinlichkeitsfunktionen geben die eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen der beiden Zufallsvariablen X und Y an.

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{k=1}^{c} f(x, y_k)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{j=1}^{r} f(x_j, y)$$

Die Randwahrscheinlichkeitsfunktion $f_x(x)$ von X wird durch Summation über alle c Spalten ermittelt. Die Randwahrscheinlichkeitsfunktion $f_y(y)$ von Y wird durch Summation über alle r Zeilen bestimmt.

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten und Randwahrscheinlichkeiten

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_c	$\sum_{k=1}^{c}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1c}	$p_{1\bullet} = \sum_{k=1}^{c} p_{1k}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2c}	$p_{2\bullet} = \sum_{k=1}^{c} p_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\cdots$	p_{rc}	$p_{r\bullet} = \sum_{k=1}^{c} p_{rk}$
$\sum_{j=1}^{r}$	$p_{\bullet 1} = \sum_{j=1}^{r} p_{j1}$	$p_{\bullet 2} = \sum_{j=1}^{r} p_{j2}$	$\cdots$	$p_{\bullet c} = \sum_{j=1}^{r} p_{jc}$	$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{c} p_{jk} = \sum_{j=1}^{r} p_{j\bullet} = \sum_{k=1}^{c} p_{\bullet k} = 1$

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten: $f(x_j,y_k) = p_{jk} = P(X = x_j, Y = y_k)$

Randwahrscheinlichkeiten von X: $f_X\left(x_j\right) = p_{j\bullet} = \sum_{k=1}^{c} p_{jk}$

Randwahrscheinlichkeiten von Y: $f_Y\left(y_k\right) = p_{\bullet k} = \sum_{j=1}^{r} p_{jk}$

Stochastische Unabhängigkeit

Die beiden diskreten Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch voneinander unabhängig, wenn sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion als Produkt der Randwahrscheinlichkeitsfunktionen darstellen lässt:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Bei stochastischer Unabhängigkeit lassen sich alle gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten p_{jk} aus dem Produkt der Randwahrscheinlichkeiten $p_{j\bullet}$ und $p_{\bullet k}$ darstellen:

$$p_{jk} = p_{j\bullet} p_{\bullet k} \qquad \text{für alle } j = 1, 2, \ldots, r \text{ und } k = 1, 2, \ldots, c$$

Gemeinsame Dichtefunktionen und Randdichtefunktionen

Die beiden Zufallsvariablen X und Y sind gemeinsam stetig verteilt, wenn es eine gemeinsame Dichtefunktion f(x,y) mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Gemeinsame Intervallwahrscheinlichkeiten $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ sind dann folgendermaßen gegeben:

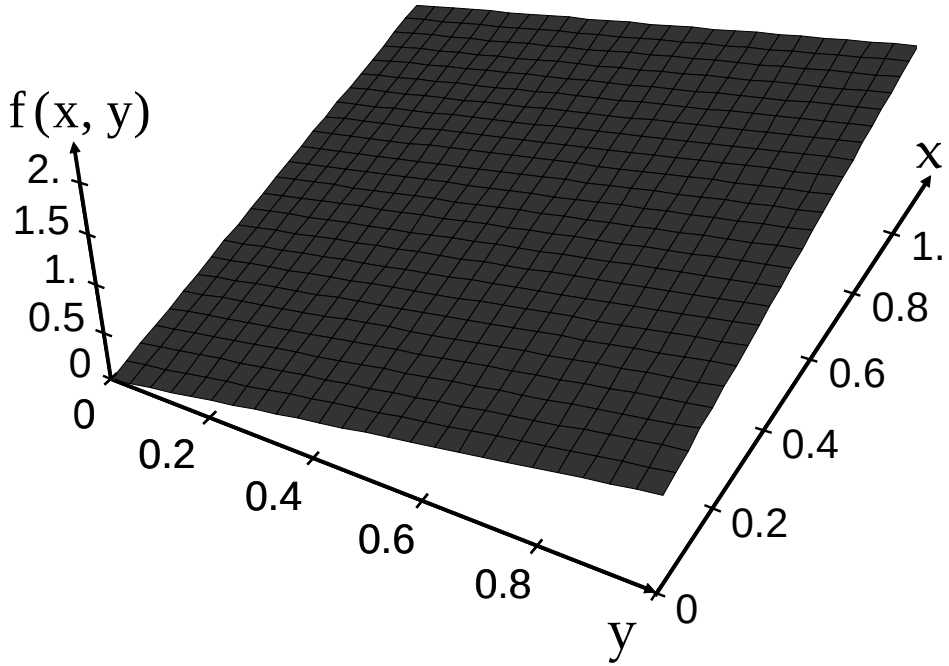
$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

Beispiel:

Gegeben ist die gemeinsame Dichtefunktion der zweidimensionalen stetigen Zufallsvariablen (X,Y):

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{für} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Dichtefunktion lässt sich in einem dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen:



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X im Intervall zwischen 0,5 und 1 und die Zufallsvariable Y gleichzeitig im Intervall zwischen 0,4 und 0,6 liegt.

Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(0{,}5 \le X \le 1;\ 0{,}4 \le Y \le 0{,}6)$ zu berechnen, ist ein Doppelintegral zu lösen:

$$P(0{,}5 \le X \le 1;\ 0{,}4 \le Y \le 0{,}6) = \int_{0{,}4}^{0{,}6} \int_{0{,}5}^{1} (x + y)\, dx\, dy$$

Hierzu wird zuerst über x integriert:

$$P(0{,}5 \le X \le 1;\ 0{,}4 \le Y \le 0{,}6) = \int_{0{,}4}^{0{,}6} \left(\int_{0{,}5}^{1} (x + y)\, dx \right) dy = \int_{0{,}4}^{0{,}6} \left(\frac{1}{2} x^2 + xy \Big|_{0{,}5}^{1} \right) dy$$

$$= \int_{0{,}4}^{0{,}6} \left[0{,}5 \cdot 1^2 + 1y - \left(0{,}5 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5y \right) \right] dy$$

$$= \int_{0{,}4}^{0{,}6} \left(0{,}5 + y - 0{,}125 - 0{,}5y \right) dy = \int_{0{,}4}^{0{,}6} \left(0{,}5y + 0{,}375 \right) dy$$

Danach wird über y integriert:

$$P(0{,}5 \le X \le 1; 0{,}4 \le Y \le 0{,}6) = \int_{0,4}^{0,6} \int_{0,5}^{1} (x + y)\, dx\, dy = \int_{0,4}^{0,6} (0{,}5y + 0{,}375)\, dy$$

$$= (0{,}5 \cdot 0{,}5y^2 + 0{,}375y)\Big|_{0,4}^{0,6} = (0{,}25y^2 + 0{,}375y)\Big|_{0,4}^{0,6}$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}375 \cdot 0{,}6 - \left(0{,}25 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}375 \cdot 0{,}4\right)$$

$$= 0{,}090 + 0{,}225 - 0{,}190 = 0{,}125$$

Aus der gemeinsamen Dichtefunktion f(x,y) lassen sich die Randdichtefunktionen durch Integration bestimmen:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

Bei stochastischer Unabhängigkeit der beiden stetigen Zufallsvariablen X und Y ist die gemeinsame Dichtefunktion f(x,y) durch das Produkt der Randdichte-funktionen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ gegeben:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Beispiel:

Wie lauten die Randdichtefunktionen der Zufallsvariablen X und Y, deren gemeinsame Dichtefunktion folgendermaßen lautet:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{für} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randdichtefunktion von X:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x + y)\, dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 = x \cdot 1 + \frac{1}{2}1^2 - 0 = x + 0{,}5$$

Randdichtefunktion von Y:

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x + y)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + xy \Big|_0^1 = \frac{1}{2}1^2 + y \cdot 1 - 0 = 0{,}5 + y$$

Parameter der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y)

Kovarianz

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist ein Maß der Verbundstreuung:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$

Sie misst die Richtung eines linearen Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y.

Berechnung der Kovarianz bei diskreten Zufallsvariablen X und Y:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{c}\left[x_j - E(X)\right]\left[y_k - E(Y)\right]f(x_j,y_k)$$

Berechnung der Kovarianz bei stetigen Zufallsvariablen X und Y:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x - E(X)\right]\left[y - E(Y)\right]f(x,y)\,dx\,dy$$

Verschiebungssatz:

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$

Beispiel:

Für die zukünftigen Konjunkturaussichten wird von einem Wirtschaftsforschungsinstitut folgendes Szenario entwickelt:

Zustand	Beschreibung	Eintrittswahrscheinlichkeit
1	Keine wesentliche Änderung des ökonomischen Umfelds	0,5
2	Rezession	0,3
3	Hochkonjunktur	0,2

Die möglichen Rahmenbedingungen beeinflussen die Ertragssituation von Unternehmen und damit die Kursentwicklung ihrer Aktien. Abhängig von der Rahmenbedingung erwarten die Investoren folgende Renditen X und Y für zwei Aktien:

Zustand	Rendite X	Rendite Y
1	3,5%	5,0%
2	4,0%	-1,0%
3	2,0%	7,0%

Aus den angegebenen Größen lässt sich folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitstabelle für X und Y erstellen:

Y (Rendite Y) / X Rendite X)	y_1 $(-1\,\%)$	y_2 $(5\,\%)$	y_3 $(7\,\%)$	$p_{j\bullet} = \sum_{k=1}^{3} p_{jk}$
x_1 $(2\,\%)$	$p_{11} = 0$	$p_{12} = 0$	$p_{13} = 0{,}2$	$p_{1\bullet} = 0 + 0 + 0{,}2 = 0{,}2$
x_2 $(3{,}5\,\%)$	$p_{21} = 0$	$p_{22} = 0{,}5$	$p_{23} = 0$	$p_{2\bullet} = 0 + 0{,}5 + 0 = 0{,}5$
x_3 $(4\,\%)$	$p_{31} = 0{,}3$	$p_{32} = 0$	$p_{33} = 0$	$p_{3\bullet} = 0{,}3 + 0 + 0 = 0{,}3$
$p_{\bullet k} = \sum_{j=1}^{3} p_{jk}$	$p_{\bullet 1} = 0 + 0 + 0{,}3 = 0{,}3$	$p_{\bullet 2} = 0 + 0{,}5 + 0 = 0{,}5$	$p_{\bullet 3} = 0{,}2 + 0 + 0 = 0{,}2$	$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_{jk} = 0 + 0 + 0{,}2 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0{,}3 + 0 + 0 = 1$

Zur Bestimmung der Kovarianz von X und Y werden zunächst die erwarteten Renditen berechnet:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{3} x_j p_{j\bullet} = 0{,}02 \cdot 0{,}2 + 0{,}035 \cdot 0{,}5 + 0{,}04 \cdot 0{,}3 = 0{,}0335$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{3} y_k p_{\bullet k} = (-0{,}01)0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}5 + 0{,}07 \cdot 0{,}2 = 0{,}0360$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) = \sigma_{xy} &= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left[x_j - E(X)\right]\left[y_k - E(Y)\right]p_{jk} \\ &= 0 + 0 + (0{,}02 - 0{,}0335)(0{,}07 - 0{,}036)0{,}2 \\ &\quad + 0 + (0{,}035 - 0{,}0335)(0{,}05 - 0{,}036)0{,}5 + 0 \\ &\quad + (0{,}04 - 0{,}0335)(-0{,}01 - 0{,}036)0{,}3 + 0 + 0 \\ &= -0{,}000171 \end{aligned}$$

Da die Kovarianz negativ ist, besteht zwischen den (zufälligen) Renditen der beiden Aktien, also zwischen X und Y, ein negativer linearer Zusammenhang. Mit einer höheren Rendite der einen Aktie geht also tendenziell eine niedrigere Rendite der anderen Aktie einher.

Korrelationskoeffizient

Die Kovarianz gibt keine Auskunft über die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y, weil sie unbeschränkt ist. Aus diesem Grund wird der Korrelationskoeffizient zur Messung der Stärke eines bivariaten Zusammenhangs verwendet:

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\left[-1 \leq \rho_{xy} \leq 1\right]$$

Das Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten ρ_{xy} wird nur von der Kovarianz bestimmt, da der Nenner stets positiv ist. Der Korrelationskoeffizient gibt wie die Kovarianz die Richtung einer linearen Abhängigkeit an.

Zusätzlich misst der Korrelationskoeffizient ρ_{xy} die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen den Zufallsvariablen X und Y, da er im Unterschied zur Kovarianz σ_{xy} auf das Intervall zwischen -1 und +1 normiert ist. Je näher der Korrelationskoeffizient an den Extremwerten -1 oder +1 liegt, desto stärker ist der lineare Zusammenhang ausgeprägt.

Beispiel:

Es soll nun die Stärke des Zusammenhangs zwischen den Renditen X und Y der beiden Aktien gemessen werden, die eine Kovarianz von -0,000171 aufweisen.

Hierzu sind die Varianzen der beiden Zufallsvariablen X und Y zu berechnen, aus denen sich ihre Standardabweichungen ergeben.

$$\sigma_x^2 = E\left[X - E(X)\right]^2 = \sum_{j=1}^{3}\left(x_j - \mu_x\right)^2 p_{j\bullet}$$

$$= (0{,}02 - 0{,}0335)^2\, 0{,}2 + (0{,}035 - 0{,}0335)^2\, 0{,}5 + (0{,}04 - 0{,}0335)^2\, 0{,}3$$

$$= 0{,}00005025$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}00005025} = 0{,}0071$$

$$\sigma_y^2 = E\left[Y - E(Y)\right]^2 = \sum_{k=1}^{3}\left(y_k - \mu_y\right)^2 p_{\bullet k}$$

$$= (-0{,}01 - 0{,}036)^2\, 0{,}3 + (0{,}05 - 0{,}036)^2\, 0{,}5 + (0{,}07 - 0{,}036)^2\, 0{,}2$$

$$= 0{,}000964$$

$$\sigma_y = \sqrt{0{,}000964} = 0{,}0310$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-0{,}000171}{0{,}0071 \cdot 0{,}0310} = -0{,}7769$$

Erwartungswert und Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

Gegeben: n Zufallsvariablen: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Linearkombination der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

Erwartungswert einer Linearkombination von Zufallsvariablen

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)\right)$$

$$= a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \ldots + a_n E(X_n)$$

Varianz einer Linearkombination von Zufallsvariablen

Bei stochastischer Unabhängigkeit der Zufallsvariablen:

$$Var(Z) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)\right)$$

$$= a_1^2 Var(X_1) + a_2^2 Var(X_2) + \ldots + a_n^2 Var(X_n)$$

Bei stochastischer Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X und Y:

$$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab Cov(X,Y)$$

Beispiel:

Die Portfoliotheorie zeigt auf, wie optimale Wertpapierportfolios strukturiert sein müssen. Für den Anleger ist es im Allgemeinen vorteilhaft, gleichzeitig unterschiedliche risikobehaftete Wertpapiere zu halten. Hierbei kommt es nicht nur auf die erwartete Rendite, sondern auch auf eine günstige Korrelationsstruktur an, die das Risiko der Wertpapieranlage verringert.

Ausgangspunkt sind die zuvor betrachteten Beispiele, in denen die erwarteten Renditen und die Varianzen der Renditen X und Y berechnet wurden:

$E(X) = \mu_x = 0{,}0335$

$E(Y) = \mu_y = 0{,}0360$

$Var(X) = \sigma_x^2 = 0{,}00005025$

$Var(Y) = \sigma_y^2 = 0{,}000964$

Für die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten wurden folgende Werte ermittelt:

$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = -0{,}000171$

$Corr(X,Y) = \rho_{xy} = -0{,}7769$

Es soll nun die Ertrags-Risiko-Struktur von zwei Aktienportfolios betrachtet werden.

Aktienportfolio 1: 100% Aktie 1 (mit Rendite X), 0% Aktie 2 (mit Rendite Y)
Aktienportfolio 2: 80% Aktie 1 (mit Rendite X), 20% Aktie 2 (mit Rendite Y)

Ertrags-Risiko-Struktur von Aktienportfolio 1

Erwartete Rendite von Aktienportfolio 1:

$$E(Z) = aE(X) + bE(Y) \quad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = 0$$

$$E(Z) = 1 \cdot E(X) + 0 \cdot E(Y) = 1 \cdot 0{,}0335 + 0 \cdot 0{,}0360 = 0{,}0335$$

Risiko von Aktienportfolio 1:

$$Var(Z) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X,Y) \quad \text{mit } a = 1 \text{ und } b = 0$$

$$Var(Z) = 1^2 Var(X) + 0^2 Var(Y) + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot Cov(X, Y)$$

$$= 1 \cdot 0{,}00005025 = 0{,}00005025$$

$$\sigma_Z = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{0{,}00005025} = 0{,}0071$$

Ertrags-Risiko-Struktur von Aktienportfolio 2

Erwartete Rendite von Aktienportfolio 2:

$E(Z) = aE(X) + bE(Y)$ mit $a = 0{,}8$ und $b = 0{,}2$

$$E(Z) = 0{,}8 \cdot E(X) + 0{,}2 \cdot E(Y) = 0{,}8 \cdot 0{,}0335 + 0{,}2 \cdot 0{,}0360 = 0{,}034$$

Risiko von Aktienportfolio 2:

$Var(Z) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)$ mit $a = 0{,}8$ und $b = 0{,}2$

$$\begin{aligned} Var(Z) &= 0{,}8^2Var(X) + 0{,}2^2Var(Y) + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot Cov(X,Y) \\ &= 0{,}64 \cdot 0{,}00005025 + 0{,}04 \cdot 0{,}000964 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot (-0{,}000171) \\ &= 0{,}00003216 + 0{,}00003856 - 0{,}00005472 = 0{,}000016 \end{aligned}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{0{,}000016} = 0{,}004$$

Aktienportfolio 2, das aus einer Mischung der beiden Aktien im Verhältnis 4:1 (80% : 20%) besteht, hat eine bessere Ertrags-Risiko-Struktur als Aktienportfolio 1, das allein aus der ersten Aktie besteht.