2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

2.1 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein Teilgebiet der Mathematik. Es ist üblich, an den Anfang einer mathematischen Theorie einige Axiome zu setzen, aus denen sich dann alle weiteren Sätze dieser Theorie deduktiv ableiten lassen. Die Axiome selbst sind nicht beweisbar. Wir werden auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diese Weise vorgehen und beginnen daher mit dem Axiomensystem, das von Kolmogorov eingeführt wurde. Dieses Axiomensystem stellt die Grundlage der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung dar.

Axiom 1 (Nichtnegativität):

$P(A) \geq 0$

Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse A sind nichtnegative, reelle Zahlen.

Axiom 2 (Normierung):

$P(\Omega) = 1$

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1, womit eine Normierung der Wahrscheinlichkeit erfolgt. Aus den beiden ersten Axiomen ergibt sich, dass Wahrscheinlichkeiten reelle Zahlen sind, die im Intervall [0; 1] liegen.

Axiom 3 (Additivität):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$

Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

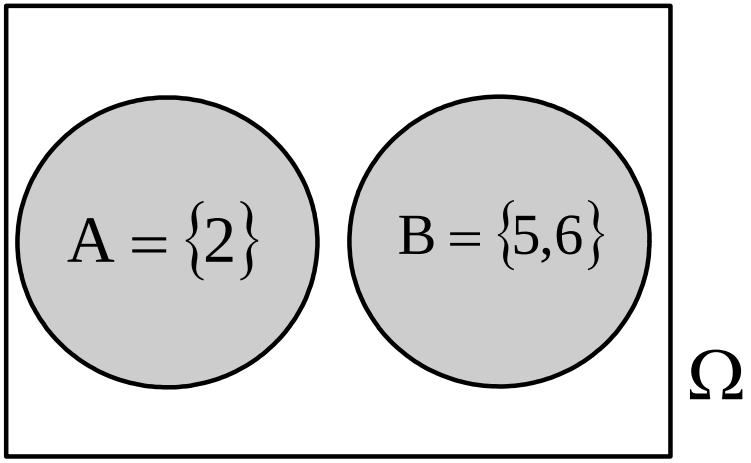
Beispiel:

P(A) sei die Wahrscheinlichkeit, beim Ausspielen eines Würfels eine „2“ (= Ereignis A) zu werfen und P(B) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B = {5, 6}. Da beide Ereignisse disjunkt sind, also nicht gleichzeitig eintreten können, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A oder B eintritt nach Axiom 3 als Summe beider Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$P(A \cup B) = P(\{2, 5, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) + P(B) = P(\{2\}) + P(\{5, 6\})$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$



2.2 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich deduktiv aus dem Axiomensystem herleiten. Man erhält auf diese Weise Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten.

Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses

Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ des Komplementärereignisses eines Ereignisses A berechnet sich durch: $P(\overline{A})=1-P(A)$

Beispiel:

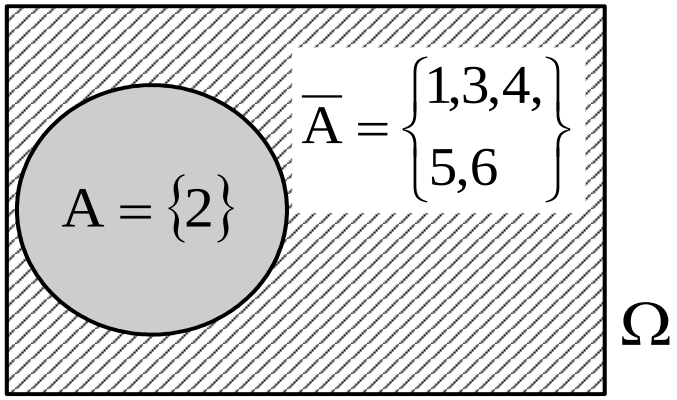
A sei das Ereignis, eine „2“ beim einmaligen Ausspielen eines Würfels zu erhalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Komplementärereignis $\overline{A}$?

1. Lösungsweg:

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\{1, 3, 4, 5, 6\}\right) = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

2. Lösungsweg mit $P\left(A\right) = P\left(\{2\}\right) = \frac{1}{6}$:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833$$



Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses

Die Wahrscheinlichkeit für das unmögliche Ereignis $\varnothing$ ist gleich 0: $P(\varnothing) = 0$

Da $\varnothing$ das Komplementärereignis zu Ω ist, gilt:

$$P(\varnothing \cup \Omega) = P(\Omega) \quad \text{und}$$

$$P(\varnothing) + P(\Omega) = P(\Omega) \quad \text{und}$$

$$P(\varnothing) + 1 = 1, \quad \text{d.h. } P(\varnothing) = 0$$

Wahrscheinlichkeit eines Teilereignisses

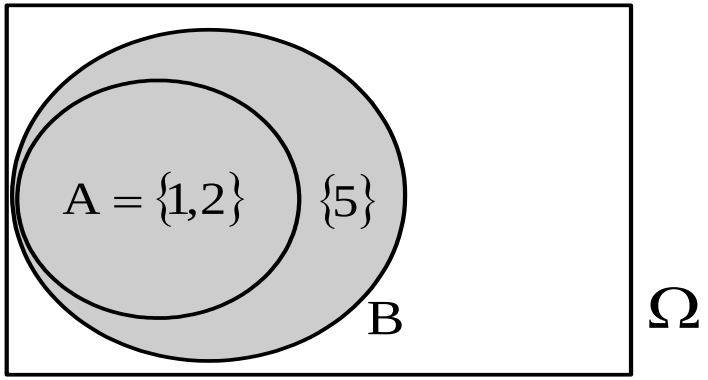
Wenn A ein Teilereignis von B ist, d.h. $A \subset B$, gilt: $P(A) \leq P(B)$

Beispiel:

Wir betrachten beim Würfelwurf die beiden Ereignisse A = {1, 2} und B = {1, 2, 5}

$$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(B) = \frac{3}{6}$$

$P(A) \leq P(B)$, da $A \subset B$



Wahrscheinlichkeit für die Differenz von A und B

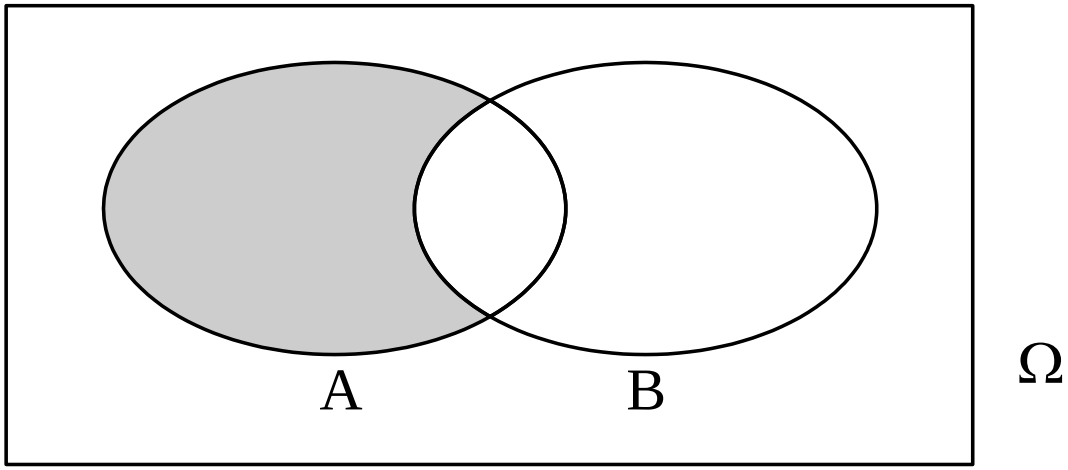
Für die Wahrscheinlichkeit der Differenz von A und B, $P(A \setminus B)$, gilt:
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Beweis:

Es gilt $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A ist gleich $P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$. Da $A \setminus B$ und $A \cap B$ disjunkt sind, kann Axiom 3 angewendet werden, so dass gilt:

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

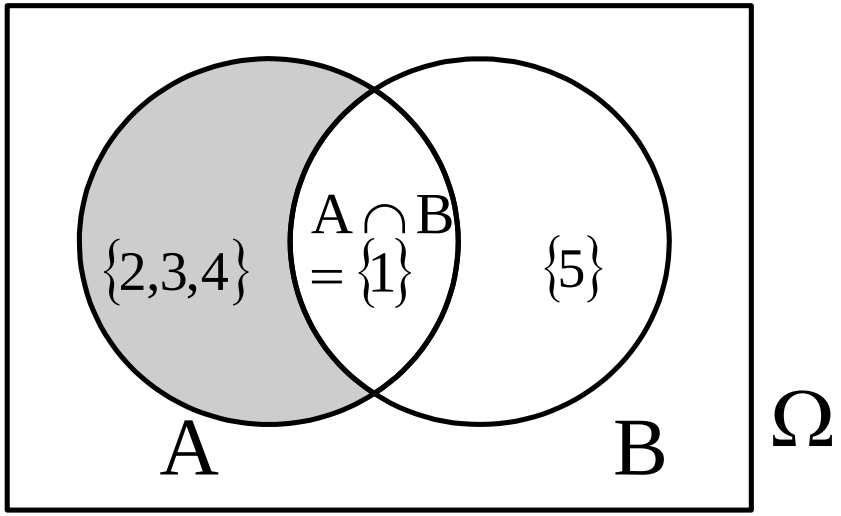
Venn-Diagramm für die Differenz $A \setminus B$



Beispiel:

Es seien A = {1, 2, 3, 4} und B = {1, 5} Ereignisse beim Würfelwurf. Somit ist die Schnittmenge zwischen beiden Ereignissen nicht leer. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für A ohne B?

$$
\begin{aligned}
P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
&= P(\{1, 2, 3, 4\}) - P(\{1\}) \\
&= \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5
\end{aligned}
$$



Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von zwei Ereignissen

Betrachtet wird nun die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung beliebiger Ereignisse. Zu beachten ist dabei, dass Axiom 3 nur für disjunkte Ereignisse gilt.

Additionssatz für zwei Ereignisse:

Die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$, dass das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, ist gleich der Summe beider Einzelwahrscheinlichkeiten, vermindert um die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Beweis:

$A \cup B$ wird als Vereinigung disjunkter Ereignisse geschrieben, um Axiom 3 anwenden zu können. Es gilt $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Da A und $B \setminus A$ disjunkt sind, kann Axiom 3 angewendet werden mit $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$, woraus sich obige Formel ergibt, wenn für $P(B \setminus A)$ die Formel $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ verwendet wird.

Die obige Gleichung gibt den Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse an. Im Fall disjunkter Ereignisse ist $P(A \cap B) = 0$, womit $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ folgt. Damit ergibt sich kein Widerspruch zu Axiom 3. Zu beachten ist, dass zur Berechnung von $P(A \cup B)$ die Kenntnis von $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$ erforderlich ist. Nur wenn A und B disjunkt sind, reicht die Kenntnis von $P(A)$ und $P(B)$ aus, um $P(A \cup B)$ zu berechnen.

Beispiel:

Gegeben sind die beiden Ereignisse A = {1, 2, 3, 4} und B = {1, 5} beim Ausspielen eines Würfels. Um die Schnittmenge $A \cap B = \{1\}$ nicht doppelt zu zählen, muss bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge subtrahiert werden.

1. Lösungsweg:

Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintreten wird, beträgt

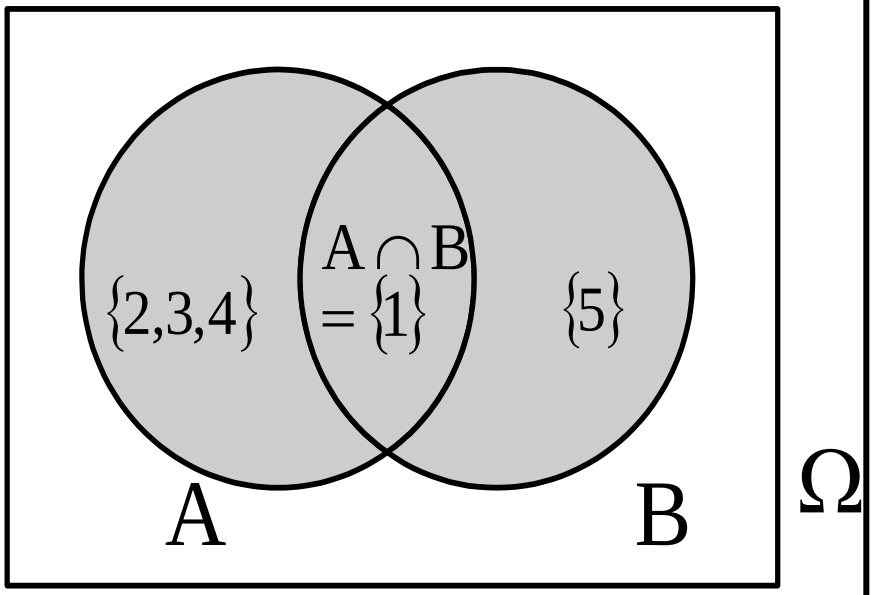
$$P(A \cup B) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6} = 0{,}833$$

2. Lösungsweg (Additionssatz):

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833$$



Beispiel:

Zu berechnen sei die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kartenspiel mit 32 Karten eine rote Karte oder ein Ass gezogen werden. Folgende Ereignisse seien definiert:

A: Die gezogene Karte ist rot
B: Die gezogene Karte ist ein Ass

Daraus folgt:

$$P(A) = 16/32$$

$$P(B) = 4/32$$

$$P(A \cap B) = 2/32$$

Mit dem Additionssatz erhält man:

$$P(A \cup B) = 16/32 + 4/32 - 2/32 = 18/32 = 0{,}563$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Karte oder ein Ass zu ziehen, beträgt somit 0,563.

Additionssatz für drei Ereignisse

Es seien A, B und C Ereignisse und $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ sowie $P(A \cap B \cap C)$ gegeben. Dann ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von A, B und C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Beispiel:

Bei einem Würfelwurf werden die Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ betrachtet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B oder C eintritt?

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten:

$P(A) = 0{,}5 \quad P(B) = 0{,}5 \quad P(C) = 0{,}5$

$A \cap B = \{2, 4\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/3$

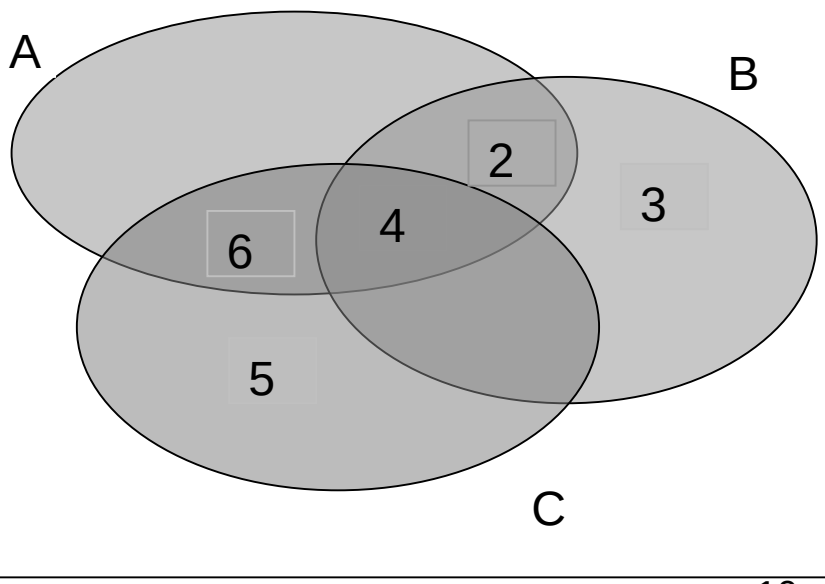
$A \cap C = \{4, 6\} \rightarrow P(A \cap C) = 1/3$

$B \cap C = \{ 4 \} \rightarrow P(B \cap C) = 1/6$

$A \cap B \cap C = \{ 4 \} \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 1/6$

Wahrscheinlichkeit von A oder B oder C:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 - 1/3 - 1/3 - 1/6 + 1/6 = 5/6 = 0{,}833$

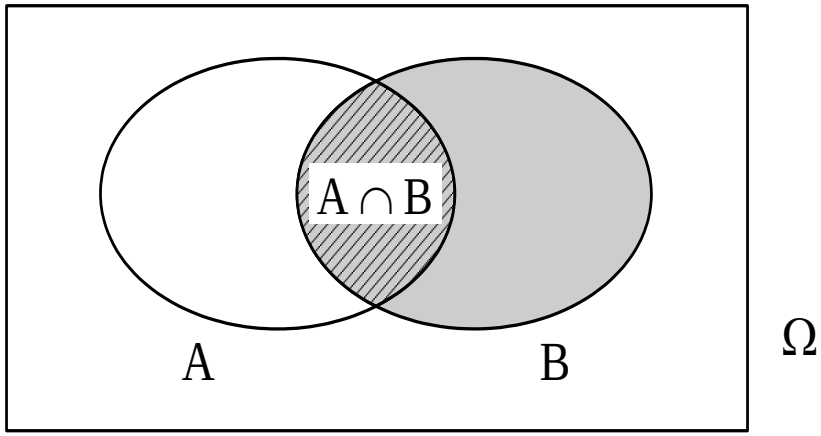


2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bisher wurde die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignissen unabhängig von der Realisation anderer Ereignisse betrachtet. Wir fragen nun, ob sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A ändert, wenn wir die zusätzliche Information haben, dass ein Ereignis B bereits eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeit für A, die sich unter dieser Information ergibt, heißt bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B).

Die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) gibt die Wahrscheinlichkeit für A unter der Bedingung (Vorabinformation) an, dass B bereits eingetreten ist:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) > 0$$



Beispiel:

In einer Stadt sind 52% der 60000 Erwerbspersonen männlich (M) und 48% weiblich (W). 3240 Personen sind arbeitslos (A), worunter 1310 männlich und 1930 weiblich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Erwerbsperson in der Stadt arbeitslos ist?

Gesucht ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit, arbeitslos (A) zu sein, d.h. P(A):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3240}{60000} = 0{,}054$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann arbeitslos ist?

Die Grundgesamtheit der Erwerbspersonen wird jetzt auf die männlichen Erwerbspersonen (M) eingeschränkt. Gesucht ist daher die bedingte Wahrscheinlichkeit, arbeitslos (A) zu sein unter der Bedingung eine männliche Erwerbsperson (M) zu sein:

$$P(A|M) = \frac{|A \cap M|}{|M|} = \frac{1310}{60000 \cdot 0{,}52} = \frac{1310}{31200} = 0{,}042$$

Alternative Berechnung mit P(M) = 0,52 und $P(A \cap M) = |A \cap M|/|\Omega| = 1310/60000 = 0{,}022$:

$$P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}022}{0{,}52} = 0{,}042$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Frau arbeitslos ist?

Die Grundgesamtheit der Erwerbspersonen wird jetzt auf die weiblichen Erwerbspersonen (W) eingeschränkt. Gesucht ist daher die bedingte Wahrscheinlichkeit, arbeitslos (A) zu sein unter der Bedingung eine weibliche Erwerbsperson (W) zu sein:

$$P(A|W) = \frac{|A \cap W|}{|W|} = \frac{1930}{60000 \cdot 0{,}48} = \frac{1930}{28800} = 0{,}067$$

Alternative Berechnung mit P(W) = 0,48 und $P(A \cap W) = |A \cap W|/|\Omega| = 1930/60000 = 0{,}032$:

$$P(A|W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{0{,}032}{0{,}48} = 0{,}067$$

Beispiel:

Bei einer Qualitätskontrolle von Produkten haben von 60 kontrollierten Stücken 15 den Defekt A und 12 den Defekt B. 38 Teile bieten keinen Anlass zur Beanstandung. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stück, das den Defekt A aufweist, auch den Defekt B hat.

Insgesamt sind 22 (= 60 - 38) Stück defekt. Haben 15 Teile den Defekt A und 12 Stück den Defekt B, müssen (15 + 12) - 22 = 5 Teile gleichzeitig den Defekt A und den Defekt B haben. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

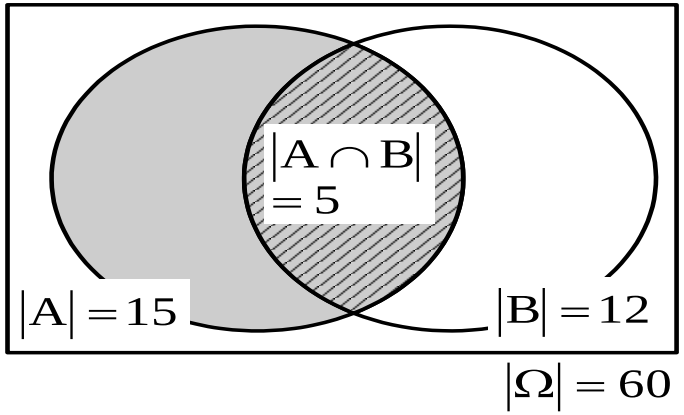
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{60} = 0{,}25 \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{60} = 0{,}20 \qquad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{5}{60} = 0{,}083$$

Wir gehen davon aus, dass das Ereignis A bereits eingetreten ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zusätzlich noch Ereignis B eintritt. Hierbei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung von A, d.h. P(B|A).

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

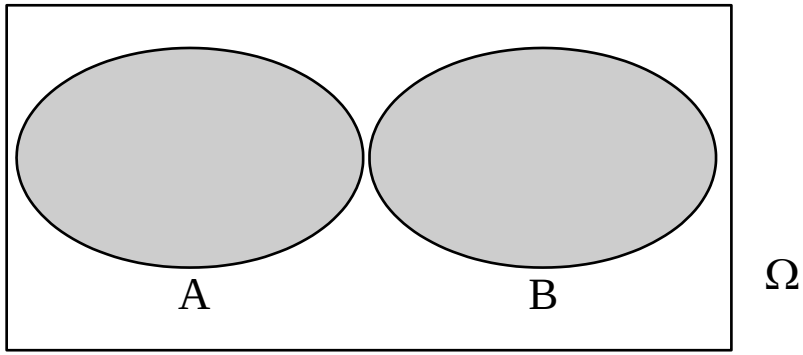
oder

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}083}{0{,}25} = 0{,}333$$

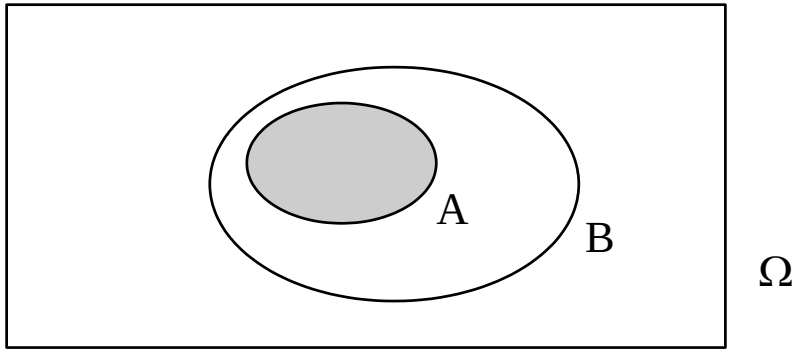


Regeln bei bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Falls A und B disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $P(A|B) = 0$.

Wenn die Ereignisse A und B disjunkt sind, kann A nicht mehr eintreten, wenn B bereits eingetreten ist.	

Falls A ein Teilereignis von B ist, d.h. $A \subset B$, dann ist $P(B|A) = 1$.

Wenn A ein Teilereignis von B ist, tritt B stets ein, sobald A eingetreten ist.	

Multiplikationssatz für zwei Ereignisse:

Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A und B lässt sich folgenderweise berechnen:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ des Durchschnitts $A \cap B$ zweier Ereignisse ist auch zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung von zwei beliebigen Ereignissen und zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(A \backslash B)$ der Differenz $A \backslash B$ zweier beliebiger Ereignisse notwendig.

Beispiel:

In einer Urne befinden sich 12 Kugeln, 4 davon sind weiß und 8 rot. Zwei Kugeln werden gezogen, wobei die entnommenen Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt werden (Ziehen ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei weiße Kugeln zu ziehen?

Wir definieren die Ereignisse:
A_1: Die erste gezogene Kugel ist weiß
A_2: Die zweite gezogene Kugel ist weiß

Da vor der 1. Ziehung unter den 12 Kugeln 4 weiße Kugeln sind, gilt:

$$P(A_1) = 4/12 = 1/3$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei der 2. Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen, ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Wenn bei der 1. Ziehung eine weiße Kugel gezogen wurde, befinden sich vor der 2. Ziehung unter den 11 Kugeln noch 3 weiße Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit, bei der 2. Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen, unter der Bedingung, dass bei der 1. Ziehung eine weiße Kugel gezogen wurde, beträgt deshalb:

$$P(A_2|A_1) = 3/11$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei weiße Kugeln zu ziehen, beträgt dann:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = 1/3 \cdot 3/11 = 3/33 = 1/11 = 0{,}091$$

Zu beachten ist, dass diese Wahrscheinlichkeit abhängig von der Ziehungsmethode ist. Wenn nach der ersten Ziehung die entnommene Kugel in die Urne zurückgelegt (Ziehen mit Zurücklegen), wäre $P(A_2|A_1) = 4/12 = 1/3$ und damit:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 0{,}111$$

Multiplikationssatz für drei Ereignisse:

Die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Eintreten der Ereignisse A, B und C lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)$$

Beweis:

Es sei $D = A \cap B$. Dann gilt $P(C \cap D) = P(C|D) \cdot P(D)$ und nach Einsetzen von $A \cap B$ für D:

$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B)$

Mit $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$ folgt:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)$$

Beispiel:

In einer Schachtel sind 10 Schrauben, 4 davon sind verzinkt. Drei Schrauben werden entnommen, wobei die gezogenen Schrauben nicht in die Schachtel zurückgelegt werden (Ziehen ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei verzinkte Schrauben zu ziehen?

Wir definieren folgende Ereignisse:
A_1 = erste Schraube ist verzinkt
A_2 = zweite Schraube ist verzinkt
A_3 = dritte Schraube ist verzinkt

Für die erste Ziehung gilt:

$$P(A_1) = 4/10 = 2/5$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei der 2. Ziehung eine verzinkte Schraube zu ziehen, falls bei der ersten Ziehung bereits eine verzinkte Schraube gezogen wurde, beträgt:

$$P(A_2 | A_1) = 3/9 = 1/3$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei der 3. Ziehung eine verzinkte Schraube zu ziehen, falls bei den ersten beiden Ziehungen bereits verzinke Schrauben gezogen wurden (d.h. falls $A_1 \cap A_2$), beträgt:

$$P(A_3 | A_2 \cap A_1) = 2/8 = 1/4$$

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, drei verzinkte Schrauben zu ziehen:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 | A_2 \cap A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{30} = 0{,}033$$

Auch hier ist zu erkennen, dass diese Wahrscheinlichkeit von der Ziehungsmethode abhängt. Wenn nach jeder Ziehung die entnommene Schraube in die Schachtel zurückgelegt wird (Ziehen mit Zurücklegen), erhält man:

$$P(A_2 | A_1) = P(A_3 | A_2 \cap A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Damit ergibt sich:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125} = 0{,}064$$

Wenn mit Zurücklegen gezogen wird, spielt es z.B. für das Eintreten des Ereignisses A_2 keine Rolle, was bei der 1. Ziehung (Ereignis A_1) gezogen wurde. Das Ziehen einer verzinkten Schraube bei der 1. Ziehung ändert also nicht die Chance für das Ziehen einer verzinkten Schraube bei der 2. Ziehung. Die Bedingung, dass A_1 eingetreten ist, ist somit irrelevant für die Realisierungschance von A_2.

2.4 Stochastische Unabhängigkeit

Bei vielen Fragestellungen ist es wichtig zu wissen, ob Ereignisse stochastisch unabhängig sind. Man kann die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen auf zwei Arten überprüfen:

- Durch den Vergleich von bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten
- Anhand des Multiplikationssatzes für unabhängige Ereignisse

Überprüfung der stochastischen Unabhängigkeit

Vergleich der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ mit der unbedingten Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von Ereignis A

Vergleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ mit dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ der Ereignisse A und B

Überprüfung der Unabhängigkeit zweier Ereignisse durch den Vergleich der bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn die Tatsache, dass B vorliegt, keinerlei zusätzliche Informationen im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeit P(A) liefert:

P(A|B) = P(A)

Bei stochastischer Unabhängigkeit ist es also unerheblich für das Eintreten des Ereignisses A, ob das Ereignis B eingetreten ist oder nicht:

$$\underbrace{\left[\frac{|A \cap B|}{|B|} =\right] P(A|B)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn B eingetreten ist}}} = \underbrace{P(A)\left[= \frac{|A|}{|\Omega|} =\right]}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn nicht bekannt ist,} \\ \text{ob B eingetreten ist}}} \Rightarrow \quad \text{Unabhängigkeit}$$

Stochastische Abhängigkeit besteht entsprechend dann, wenn das Eintreten von B einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit von A hat:

$$\underbrace{\left[\frac{|A \cap B|}{|B|} =\right] P(A|B)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn B eingetreten ist}}} \neq \underbrace{P(A)\left[= \frac{|A|}{|\Omega|} =\right]}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit für} \\ \text{A, wenn nicht bekannt ist,} \\ \text{ob B eingetreten ist}}} \Rightarrow \quad \text{Abhängigkeit}$$

Wenn die beiden Ereignisse A und B voneinander stochastisch unabhängig sind, muss auch gelten: $P(B|A) = P(B)$

Überprüfung der Unabhängigkeit zweier Ereignisse durch Vergleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

Multiplikationssatz für zwei unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ des Durchschnitts gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ ist:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Beweis:

Durch Auflösen der Berechnungsformel für die bedingten Wahrscheinlichkeiten nach $(A \cap B)$ erhält man:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Da bei Unabhängigkeit von A und B die Beziehung $P(A|B) = P(A)$, gilt, folgt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Überprüfung stochastischer Unabhängigkeit

Beleg für…

Stochastische Unabhängigkeit	**Stochastische Abhängigkeit**
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
$P(A) = P(A \mid B)$	$P(A) \neq P(A \mid B)$
$P(B) = P(B \mid A)$	$P(B) \neq P(B \mid A)$

Beispiel:

Bei dem Zufallsexperiment „Ausspielen zweier Würfel“ werden zwei Ereignisse betrachtet:

A: Gleiche Augenzahl bei beiden Würfeln
B: Ungerade Augenzahl beim zweiten Würfel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gleiche Augenzahl bei beiden Würfeln und gleichzeitig eine ungerade Augenzahl beim zweiten Würfel zu erhalten? Sind beide Ereignisse unabhängig voneinander?

Anhand der folgenden Tabelle lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse bestimmen:

2. Würfel 1. Würfel	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

P(A) = P(„gleiche Augenzahl bei beiden Würfeln“) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

P(B) = P(„ungerade Augenzahl beim zweiten Würfel“) $= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

P(A $\cap$ B) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Überprüfung der Unabhängigkeit durch Vergleich der bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\left[P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = 0{,}50 \right] = \left[P(B) = 0{,}50 \right] \Rightarrow \text{Unabhängigkeit}$$

$$\left[P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \right] = \left[P(A) = \frac{1}{6} \right] \Rightarrow \text{Unabhängigkeit}$$

Überprüfung der Unabhängigkeit durch Vergleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit mit dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$\left[P(A \cap B) = \frac{1}{12}\right] = \left[P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}\right] \Rightarrow \quad \text{Unabhängigkeit}$$

Vollständige stochastische Unabhängigkeit von drei Ereignissen

Die Ereignisse A, B und C sind vollständig voneinander stochastisch unabhängig, wenn sie paarweise stochastisch unabhängig sind mit $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)\cdot P(C)$ und $P(B \cap C) = P(B)\cdot P(C)$ sowie wenn gilt:
$P(A \cap B \cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

Paarweise stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen ist somit eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die vollständige stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen.

Beispiel:

Zwei Würfel werden gleichzeitig ausgespielt. Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: Augenzahl beim 1. Würfel ist gerade
B: Augenzahl beim 2. Würfel ist ungerade
C: Augensumme ist gerade

Es soll die stochastische Unabhängigkeit von A, B und C überprüft werden.

Es gilt:

$$P(A) = 18/36 = 1/2,\ P(B) = 18/36 = 1/2,\ P(C) = 18/36 = 1/2$$

$$P(A \cap B) = 9/36 = 1/4,\ P(A \cap C) = 9/36 = 1/4,\ P(B \cap C) = 9/36 = 1/4$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Damit liegt paarweise stochastische Unabhängigkeit vor:

$$P(A \cap B) = 1/4 = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$P(A \cap C) = 1/4 = P(A) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

$$P(B \cap C) = 1/4 = P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

Jedoch gilt auch:

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Somit sind die Ereignisse A, B und C zwar paarweise stochastisch unabhängig, aber nicht vollständig stochastisch unabhängig.

2.5 Totale Wahrscheinlichkeit und Bayessche Formel

Totale Wahrscheinlichkeit

Der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit geht von einem vollständigen System von Ereignissen aus, für das gilt:

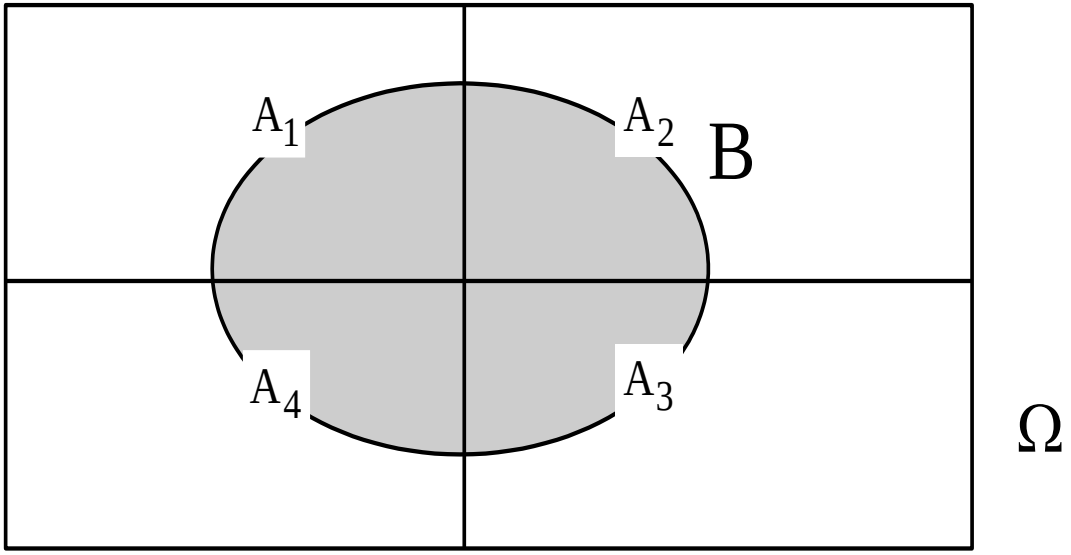
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$

Zerlegung der Ergebnismenge

Das Ereignis B lässt sich als Vereinigung der Durchschnitte $B \cap A_i$ darstellen:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$



Die Durchschnitte $B \cap A_i$ sind disjunkt:

$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset, \quad i \neq j$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)]$ unter Verwendung von Axiom 3:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(B \cap A_i)$ lassen sich bei Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A_i)$ und der unbedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ mit dem Multiplikationssatz berechnen. Daraus ergibt sich die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

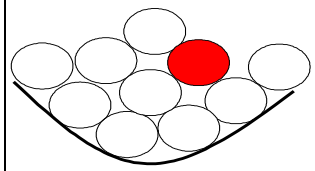
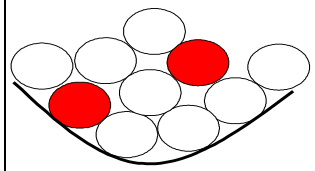
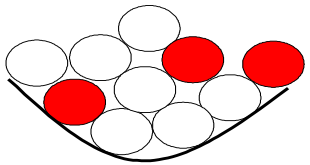
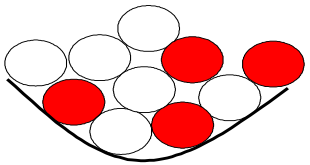
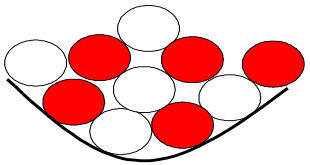
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Beispiel:

Gegeben sind 5 Urnen. Jede Urne enthält 10 Kugeln. In der j-ten Urne mit j = 1, 2, 3, 4, 5 befinden sich j rote Kugeln. Eine Urne wird unter Berücksichtigung der Auswahlwahrscheinlichkeiten 0,4 für Urne 1, 0,3 für Urne 2, 0,1 für Urne 3, 0,2 für Urne 4 und 0 für Urne 5 ausgewählt, aus der dann eine Kugel gezogen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel rot ist?

Es werden folgende Ereignisse definiert:

A_j: Auswahl der j-ten Urne, j = 1, 2, 3, 4, 5
B: Die gezogene Kugel ist rot

Urne 1	Urne 2	Urne 3	Urne 4	Urne 5
				
Auswahlwahrscheinlichkeit für die j-te Urne				
$P(A_1) = 0{,}4$	$P(A_2) = 0{,}3$	$P(A_3) = 0{,}1$	$P(A_4) = 0{,}2$	$P(A_5) = 0$
Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine rote Kugel gezogen wird, wenn die j-te Urne bereits ausgewählt wurde				
$P(B\|A_1) = 1/10 = 0{,}1$	$P(B\|A_2) = 2/10 = 0{,}2$	$P(B\|A_3) = 3/10 = 0{,}3$	$P(B\|A_4) = 4/10 = 0{,}4$	$P(B\|A_5) = 5/10 = 0{,}5$

Die Ereignisse A_j bilden ein vollständiges System von Ereignissen:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5 = \Omega$ (5 Urnen sind verfügbar)
$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$ (keine Kugel ist mehreren Urnen zugeordnet)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit P(B) lässt sich dann mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{5} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) \\ &\quad + P(B|A_3) \cdot P(A_3) + P(B|A_4) \cdot P(A_4) + P(B|A_5) \cdot P(A_5) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0 = 0{,}21$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, beträgt also 0,21.

Bayessche Formel

Angenommen, es wurde eine rote Kugel gezogen, d.h. das Ereignis B ist eingetreten. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel aus der j-ten Urne A_j, j = 1, 2, ..., 5, entnommen wurde, d.h. gesucht ist $P(A_j|B)$. Die Lösung dieses Problems ergibt sich aus dem Satz von Bayes.

Die n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden ein vollständiges System. Weiter ist B ein Ereignis mit P(B)>0. Dann gilt der Satz von Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}, \quad i = 1,\ldots,n$$

$P(A_i)$: Apriori-Wahrscheinlichkeit
$P(A_i|B)$: Aposteriori-Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe der Bayesschen Formel lassen sich die Aposteriori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i|B)$ aus den bekannten Apriori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ bestimmen.

Herleitung der Bayesschen Formel

Für die Durchschnitte $A_i \cap B$ gilt:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i|B) \cdot P(B)$$

$$P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Daraus folgt:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Nach Einsetzen der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man die Bayessche Formel:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Beispiel:

Ausgehend vom vorherigen Urnenbeispiel wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass eine gezogene rote Kugel aus der zweiten Urne stammt?

Die Ereignisse A_i bilden ein vollständiges System von Ereignissen:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5 = \Omega$ (5 Urnen sind verfügbar)
$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$ (keine Kugel ist mehreren Urnen zugeordnet).

Wir wissen, dass eine rote Kugel gezogen wurde, d.h. dass das Ereignis B eingetreten ist. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit von A_2 unter der Bedingung B.

Da hier ein vollständiges System von Ereignissen vorliegt, lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Bayesschen Formel bestimmen:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{n=5} P(B|A_i)\cdot P(A_i)}$$

$$= \frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}1\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}1 + 0{,}4\cdot 0{,}2 + 0{,}5\cdot 0}$$

$$= \frac{0{,}06}{0{,}21} = 0{,}286$$