9. StatistischeTests

9.1 Konzeption

Statistische Tests dienen zur Überprüfung von Hypothesen über einen Parameter der Grundgesamtheit (bei einem Ein-Stichproben-Test) oder über die Verteilung einer Zufallsvariablen auf der Basis der vorliegenden Beobachtungen einer Stichprobe.

Parametrische Tests: Überprüfung einer Hypothese über einen Parameter (z.B. μ) der Grundgesamtheit

Nichtparametrische Tests: Überprüfung einer Hypothese über die Verteilung einer Zufallsvariablen

Null- und Alternativhypothese

Bei einem statistischen Test wird eine Nullhypothese H_0 einer Alternativhypothese H_1 gegenübergestellt. Aufgrund einer Stichprobe kann die Nullhypothese abgelehnt werden oder nicht.

Nullhypothese H_0:
Sie gibt den Status quo z.B. in Form einer Herstellerangabe oder den bisherigen Kenntnisstand wieder

Alternativhypothese H_1:
Die Hypothese, an deren Nachweis man interessiert ist, wird als Alternativhypothese formuliert

Beispiel:

Ein Automobilhersteller gibt an, dass ein von ihm gefertigter Pkw-Typ A einen durchschnittlichen Benzinverbrauch von höchstens 7,6 l pro 100 km hat. Die Überprüfung einer Testzeitschrift anhand von 40 zufällig ausgewählten Autos ergab einen Durchschnittsverbrauch von 7,8 l pro 100 km.

Die Nullhypothese bezieht sich auf die Herstellerangabe, die in Frage gestellt wird. Die Testzeitschrift vermutet, dass die Herstellerangabe falsch ist, und möchte dies aufgrund ihres Stichprobenergebnisses nachweisen. Die Stichprobe hat zwar einen gegenüber der Herstellerangabe höheren Benzinverbrauch ergeben, jedoch muss dies aufgrund des Stichprobenfehlers nicht unbedingt für die Grundgesamtheit aller gefertigten Pkw des Typs A gelten. Hierüber soll ein statistischer Test Auskunft geben.

In diesem parametrischen Test stehen sich zwei Hypothesen über den Parameter μ, d.h. den Durchschnittsverbrauch in der Grundgesamtheit, gegenüber:

Nullhypothese nach Angabe des Automobilherstellers, die angezweifelt wird und daher überprüft werden soll:

H_0: $\mu \leq 7{,}6$

Alternativhypothese, die die Vermutung der Testzeitschrift widerspiegelt:

H_1: $\mu > 7{,}6$

Allgemein wird bei einem parametrischen (Ein-Stichproben-) Test eine Hypothese über einen Parameter θ aufgrund einer Stichprobe überprüft. Dabei kann die Überprüfung durch einen einseitigen oder zweiseitigen Test erfolgen.

Einseitige Tests

Rechtsseitiger Test

H_0: $\theta \leq \theta_0$

H_1: $\theta > \theta_0$

Linksseitiger Test

H_0: $\theta \geq \theta_0$

H_1: $\theta < \theta_0$

θ_0 bezeichnet den Parameter der Grundgesamtheit, über den Aussagen überprüft werden sollen. Rechtsseitiger (linksseitiger) Test bedeutet, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn das Stichprobenergebnis auf einen höheren (niedrigeren) Wert des Parameters θ schließen lässt.

Die Nullhypothese wird bei einseitigen Tests meist als Bereichshypothese formuliert, wodurch der gesamte reelle Zahlenbereich für den Parameter θ abgedeckt ist. Teilweise wird die Nullhypothese aber auch bei einseitigen Tests als Punkthypothese formuliert mit H_0: $\theta = \theta_0$.

Bei einem zweiseitigen Test mit H_0: $\theta = \theta_0$ und H_1: $\theta \neq \theta_0$ wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn das Stichprobenergebnis entweder auf einen höheren oder auf einen niedrigeren Wert des Parameters θ schließen lässt.

Beispiel:

Im vorherigen Beispiel ist bereits ein einseitiger Test in Form eines rechtsseitigen Tests erörtert worden. Das folgende Beispiel veranschaulicht die Fragestellung eines zweiseitigen Tests.

Psychologische Studien haben einen durchschnittlichen Intelligenzquotienten (IQ) von 100 Punkten bei einer Standardabweichung von 15 Punkten ergeben. Eine Versicherung möchte überprüfen, ob der IQ ihrer Außendienstmitarbeiter*innen im Durchschnitt dem der Bevölkerung entspricht. Hierzu soll eine Stichprobe von Außendienstmitarbeiter*innen für einen Intelligenztest gezogen werden. Welche Nullhypothese und Alternativhypothese liegen hier dem Test zugrunde? Da die Versicherung nicht ausschließen kann, dass die Außendienstmitarbeiter*innen intelligenter oder weniger intelligent sind als der Durchschnitt der Bevölkerung, ist der statistische Test zweiseitig durchzuführen.

Der für die Gesamtbevölkerung bekannte Durchschnittswert des IQ von 100 ist die Grundlage für die Nullhypothese:

H_0: $\mu = 100$

Die Versicherung ist am Nachweis der Alternativhypothese interessiert, die einen Unterschied des IQ der Außendienstmitarbeiter*innen gegenüber dem IQ der Gesamtbevölkerung postuliert:

H_1: $\mu \neq 100$

Testprozedur

Nachdem in einem ersten Schritt die zu testende Nullhypothese H_0 und abhängig davon die Alternativhypothese H_1 festgelegt wurde, ist nun ein Test zu entwerfen, mit dem auf der Grundlage der vorliegenden Stichprobeninformation zwischen H_0 und H_1 entschieden werden kann. Im Rahmen der statistischen Testtheorie ist dabei der Begriff der Prüfgröße (bzw. Teststatistik) von zentraler Bedeutung:

$$Z_0 = Z_0\left(X_1, ..., X_n \mid H_0\right)$$

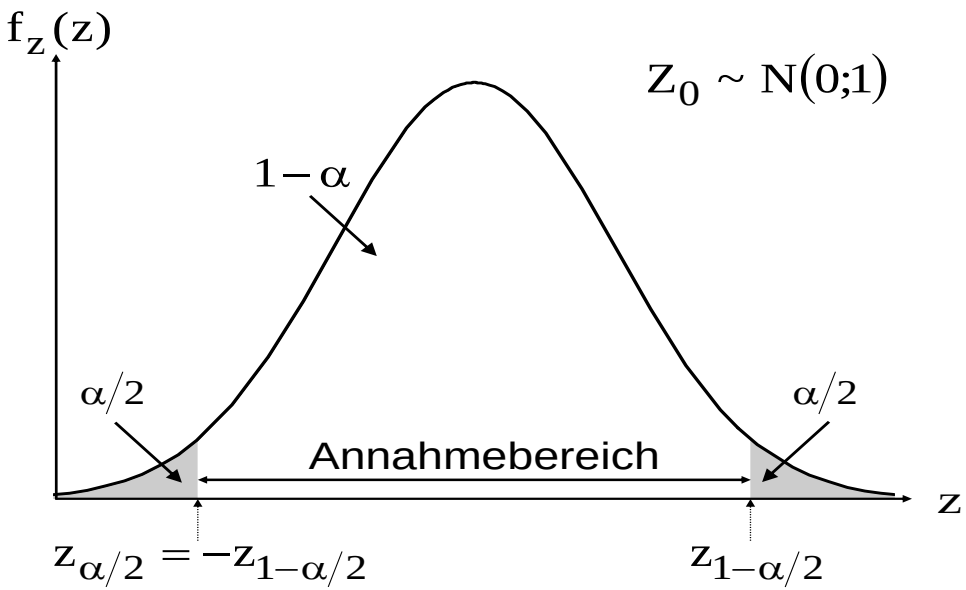
Eine solche Prüfgröße ist eine spezielle Stichprobenfunktion, die von den Stichprobenvariablen X_i und zusätzlich von der zu testenden Nullhypothese H_0 abhängt. Somit ist die Prüfgröße Z_0 eine Zufallsvariable, deren Verteilung nur unter der Annahme gilt, dass H_0 richtig ist. Deshalb enthält die Prüfgröße den Index 0.

Wir bezeichnen die Prüfgröße hier mit Z, da wir die Testprozedur für eine (bei Gültigkeit der Nullhypothese) standardnormalverteilte Prüfgröße illustrieren (siehe später die Durchführung von Gauß-Tests und approximativen Binomialtests). Allgemein können die Prüfgrößen (bei Gültigkeit von H_0) aber auch andere Verteilungen aufweisen wie z.B. die t-Verteilung oder die χ^2-Verteilung (siehe später die Durchführung von t-Tests und χ^2-Tests).

Gültigkeit der Nullhypothese:

Der Punktschätzer $\hat{\theta}$ wird sich in diesem Fall (bei einem zweiseitigen Test) nur geringfügig vom Parameter θ_0 unterscheiden. Die Differenz zwischen $\hat{\theta}$ und θ_0 ist aber jeweils unter Berücksichtigung der Standardabweichung $\sigma_{\hat{\theta}}$ zu interpretieren. Die sich daraus ergebende Prüfgröße wird dann in der Regel nur zufällig von null abweichen. Die Prüfgröße fällt dann mit großer Wahrscheinlichkeit in den sogenannten Annahme- bzw. Nichtablehnungsbereich für die Nullhypothese. Befindet sich die Prüfgröße außerhalb des Annahmebereichs, dann ist die Gültigkeit der Nullhypothese unwahrscheinlich.

Annahmebereich bei zweiseitigen Tests und bei Gültigkeit von H_0 standard-normalverteilten Prüfgrößen



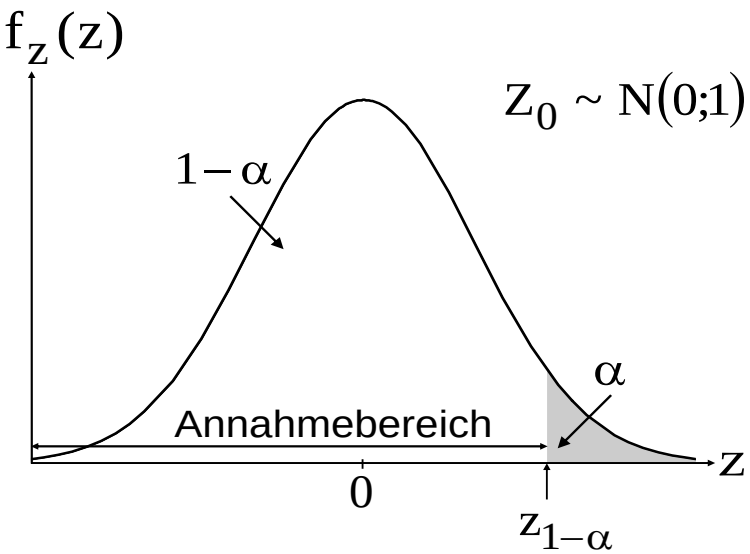
Testentscheidungen bei zweiseitigen Tests und unter H_0 standardnormalverteilten Prüfgrößen:

$|z_0| > z_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ ablehnen

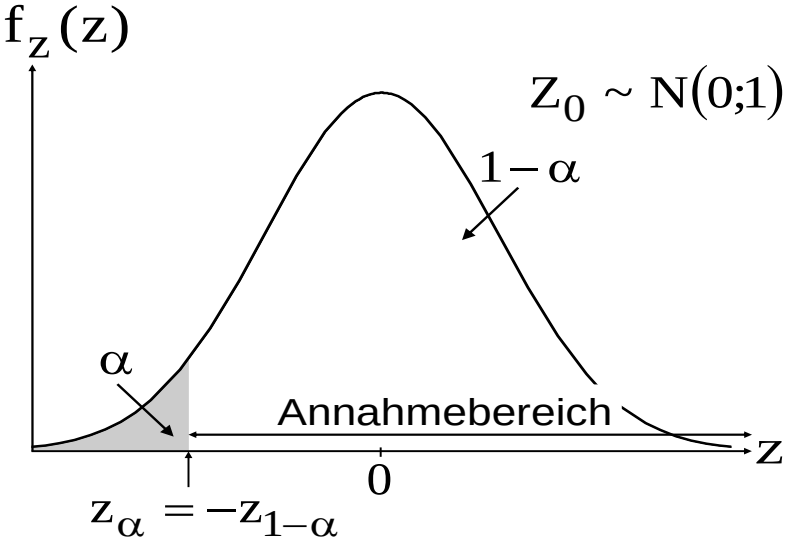
$|z_0| \leq z_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Falls die Prüfgröße nicht in den Annahmebereich fällt, liegt die Wahrscheinlichkeit für ein fälschliches Verwerfen von H_0 höchstens bei α.

Annahme- bzw. Nichtablehnungsbereich bei einseitigen Tests und (bei Gültigkeit von H_0) standardnormalverteilten Prüfgrößen



rechtsseitiger Test



linksseitiger Test

Testentscheidungen bei einseitigen Tests und bei Gültigkeit von H_0 standard-normalverteilten Prüfgrößen:

rechtsseitiger Test

$z_0 > z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

$z_0 \leq z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

linksseitiger Test

$z_0 < -z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

$z_0 \geq -z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Fehlerarten und Signifikanzniveau bei statistischen Tests

Wie wir gesehen haben, basieren Entscheidungen im Rahmen eines Tests auf den Ergebnissen einer Stichprobe. Die Testentscheidung ist damit immer mit einer gewissen Unsicherheit verbunden. Je nachdem, welcher Parameterwert in der Grundgesamtheit vorliegt, d.h. welche der Hypothesen H_0 oder H_1 in Wirklichkeit richtig ist, kann man zwischen zwei Fehlerarten unterscheiden:

H_0 wird fälschlicherweise abgelehnt: Dieser Fehler heißt Fehler 1. Art (α-Fehler)

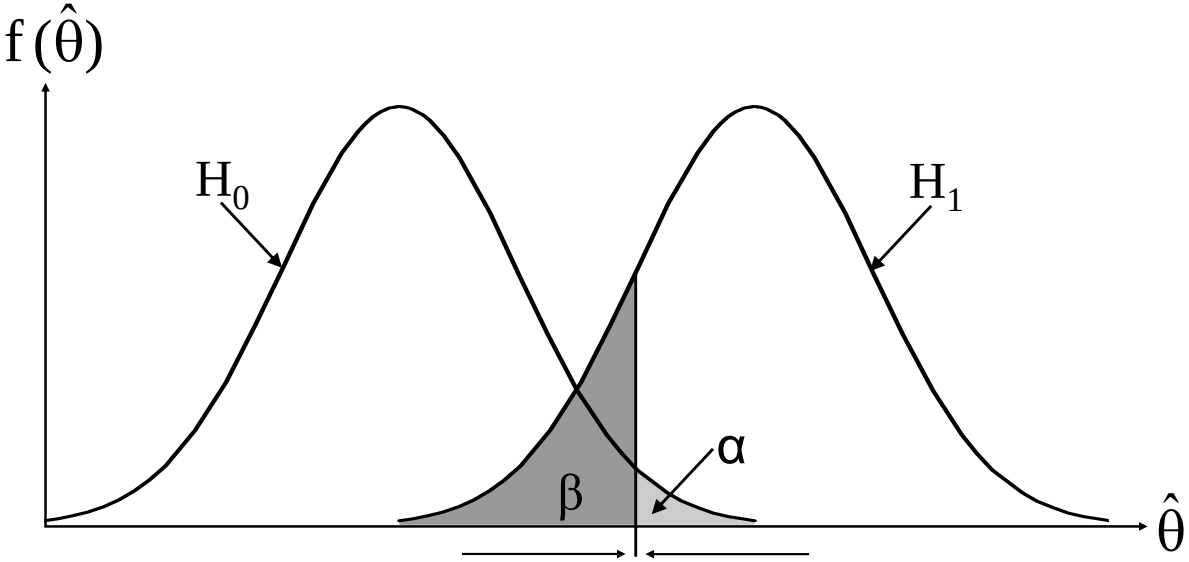
H_0 wird fälschlicherweise beibehalten: Diesen Fehler bezeichnet man als Fehler 2. Art (β-Fehler)

Testentscheidung und Realität

Realität / Test-entscheidung	Nullhypothese H_0 richtig	Nullhypothese H_0 falsch
Nullhypothese H_0 nicht ablehnen	Richtige Entscheidung $P(H_0\|H_0) = 1-\alpha$	Falsche Entscheidung (Fehler 2. Art) $P(H_0\|H_1) = \beta$
Nullhypothese H_0 ablehnen	Falsche Entscheidung (Fehler 1. Art) $P(H_1\|H_0) = \alpha$	Richtige Entscheidung $P(H_1\|H_1) = 1-\beta$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, die maximal toleriert werden soll und vorgegeben wird, heißt Signifikanzniveau oder Irrtumswahrscheinlichkeit und wird mit α bezeichnet.

Wahrscheinlichkeit für einen α- und β-Fehler



Zielkonflikt zwischen dem α- und β-Fehler:

Bei einem festen Stichprobenumfang können der α- und β-Fehler nicht gleichzeitig gesenkt werden. Wird der α-Fehler verringert, muss sich der β-Fehler erhöhen und umgekehrt.

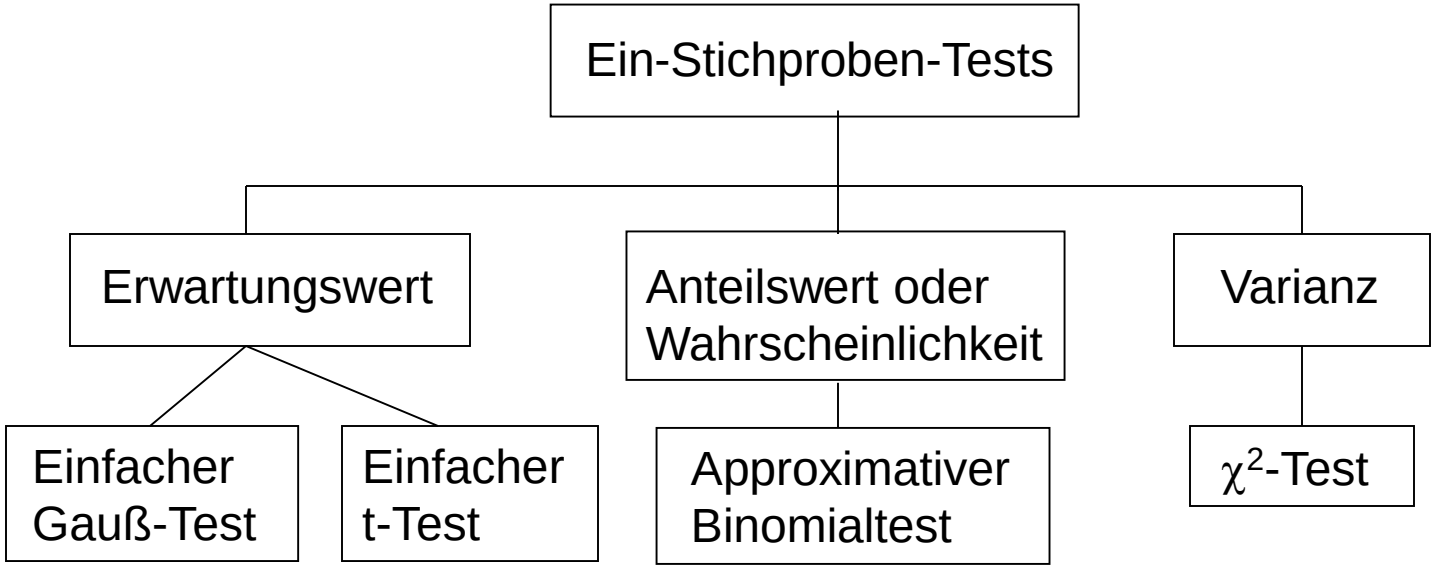
Asymmetrie der beiden Fehlerarten

Während sich der α-Fehler kontrollieren lässt, gilt dies für den β-Fehler nicht. Da der α-Fehler dem Signifikanzniveau entspricht, wird er vorgegeben. Der β-Fehler hängt dann vom konkreten Parameterwert unter der Alternativhypothese ab.

Die Nullhypothese wird fälschlicherweise nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit abgelehnt, da α klein gewählt wird. Bei einer Ablehnung von H_0 ist man sich also relativ sicher, mit der Annahme der Alternativhypothese die richtige Entscheidung getroffen zu haben. Gleiches lässt sich aber bei einer Nichtablehnung von H_0 nicht behaupten. Vielmehr kann die Fehlerwahrscheinlichkeit β (= fälschliches Annehmen der Nullhypothese) relativ hoch sein. Dies wird darin zum Ausdruck gebracht, dass man die Nichtablehnung von H_0 dahingehend interpretiert, dass „die Nullhypothese aufgrund des Stichprobenergebnisses nicht abgelehnt werden kann“. Das heißt, H_0 kann in diesem Fall nicht „angenommen“ werden.

9.2 Ein-Stichproben-Tests

Es werden Tests über den Erwartungswert, den Anteilswert oder die Wahrscheinlichkeit und die Varianz betrachtet. Der einfache Gauß-Test über den Erwartungswert bei bekannter Varianz ist bereits zuvor implizit bei der Erörterung der Konzeption statistischer Tests betrachtet worden.



Einfacher Gauß-Test über den Erwartungswert

1. Schritt	Hypothesenformulierung: Zweiseitiger Test: H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$ Einseitige Tests: H_0: $\mu \leq \mu_0$, H_1: $\mu > \mu_0$ bzw. H_0: $\mu \geq \mu_0$, H_1: $\mu < \mu_0$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α
3. Schritt	Prüfgrößen und ihre Verteilung (bei Gültigkeit von H_0: $\mu = \mu_0$): Bekannte Varianz σ^2 und normalverteilte Stichprobenvariablen oder großer Stichprobenumfang ($n > 30$) $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{(appr)}{\sim} N(0; 1)$ Unbekannte Varianz und großer Stichprobenumfang ($n > 30$) $Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \overset{appr}{\sim} N(0; 1)$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung der Schrankenwerte: Zweiseitiger Test: $z_{1-\alpha/2}$, einseitiger Test: $z_{1-\alpha}$
5. Schritt	Testentscheidungen: Zweiseitiger Test: $\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ ablehnen Rechtsseitiger Test: $z_0 > z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen Linksseitiger Test: $z_0 < -z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

Beispiel:

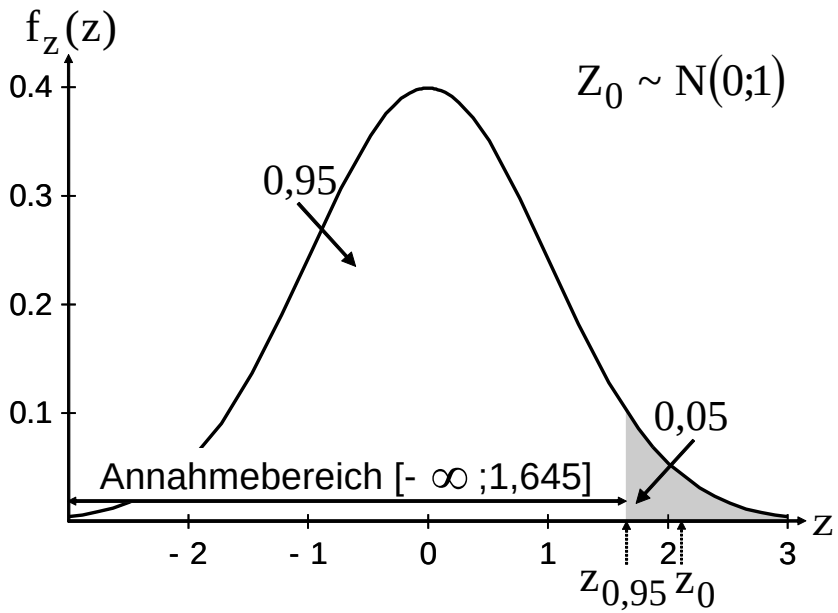
Es soll nun anhand der zuvor geschilderten Fragestellung über die Herstellerangabe zum durchschnittlichen Benzinverbrauch von Pkw-Typ A ein statistischer Test bei standardnormalverteilter Prüfgröße betrachtet werden. Die Standardabweichung des Benzinverbrauchs ist vom Hersteller mit 0,6 angegeben, so dass sie nicht aus der Stichprobe geschätzt werden muss.

Eine Stichprobe von 40 zufällig ausgewählten Pkw hat einen durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,8 l pro 100 km ergeben. Über die Verteilung des Benzinverbrauchs ist nichts bekannt. Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatz ($n = 40 > 30$) kann jedoch eine approximative Normalverteilung des Stichprobenmittels des Benzinverbrauchs begründet werden. Wir betrachten somit also den einfachen Gauß-Test.

Zu testen ist, ob bei einem Signifikanzniveau α von 0,05 davon ausgegangen werden kann, dass die Herstellerangabe eines durchschnittlichen Benzinverbrauchs des Pkw-Typs A von höchstens 7,6 l pro 100 km korrekt ist.

1. Schritt	Hypothesenformulierung (rechtsseitiger Test): Nullhypothese H_0: $\mu \leq 7{,}6$ Alternativhypothese H_1: $\mu > 7{,}6$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α: Das Signifikanzniveau α beträgt 0,05

3. Schritt	Wahl und Berechnung der Prüfgröße: Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatzes (n = 40 > 30) ist hier die Prüfgröße des einfachen Gauß-Testes zu wählen: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7{,}8 - 7{,}6}{0{,}6/\sqrt{40}} = \frac{0{,}2}{0{,}095} = 2{,}105$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung des Schrankenwertes: Bei dem rechtsseitigen Test ist das (1-α)-Quantil der Standardnormalverteilung zu bestimmen: $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1{,}645$
5. Schritt	Testentscheidung: $(z_0 = 2{,}105) > (z_{0,95} = 1{,}645) \Rightarrow H_0$ ablehnen



Interpretation:

Da der Wert der Prüfgröße den Schrankenwert übersteigt, wird die Nullhypothese bei einem 5%-Signifikanzniveau abgelehnt. Der in der Stichprobe ermittelte erhöhte durchschnittliche Benzinverbrauch weicht damit signifikant von der Herstellerangabe ab. Die Herstellerangabe wird daher als falsch verworfen.

Beispiel:

Bei der Überprüfung der ausgeschenkten Biermenge in 64 0,2 l-Gläsern bei einem Kölner Gastwirt ergab sich eine durchschnittliche Füllung von 0,194 l bei einer Standardabweichung von 0,1. Schenkt der Gastwirt systematisch zu wenig Bier aus, d.h. weniger als 0,2 Liter?

Diese Vermutung soll bei einem Signifikanzniveau von 5% nachgewiesen werden. Dabei ist ein einseitiger Test durchzuführen. Weil $n > 30$ ist, wird nun der einfache Gauß-Test bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit angewendet.

1. Schritt	Hypothesenformulierung (linksseitiger Test): H_0: $\mu \geq 0{,}2$ H_1: $\mu < 0{,}2$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α: Das Signifikanzniveau α beträgt 0,05

3. Schritt	Wahl und Berechnung der Prüfgröße Da n > 30 ist, wird der einfache Gauß-Test bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit angewendet. Wert der Prüfgröße: $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0{,}194 - 0{,}2}{0{,}1/\sqrt{64}} = \frac{-0{,}006}{0{,}013} = -0{,}462$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung des Schrankenwertes: Bei dem linksseitigen Test ist das 0,05-Quantil der Standardnormal-verteilung zu bestimmen: $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1{,}645$
5. Schritt	Testentscheidung: $(z_0 = -0{,}462) > (z_{0,05} = -1{,}645) \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Interpretation:

Der Unterschied zwischen $\bar{x} = 0{,}194$ und $\mu_0 = 0{,}2$ kann also nicht als substanziell (= signifikant) angesehen werden. Dem Gastwirt kann bei einem Signifikanzniveau von 5% mit Hilfe der Stichprobenergebnisse nicht nachgewiesen werden, dass er systematisch zu wenig ausschenkt.

Einfacher t-Test über den Erwartungswert

1. Schritt	Hypothesenformulierung: Zweiseitiger Test: H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$ Einseitige Tests: H_0: $\mu \leq \mu_0$, H_1: $\mu > \mu_0$ bzw. H_0: $\mu \geq \mu_0$, H_1: $\mu < \mu_0$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α
3. Schritt	Prüfgröße und ihre Verteilung (bei Gültigkeit von H_0: $\mu = \mu_0$): Unbekannte Varianz σ^2, normalverteilte Stichprobenvariablen, kleiner Stichprobenumfang ($n \leq 30$) $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung der Schrankenwerte: Zweiseitiger Test: $t_{n-1;1-\alpha/2}$, einseitiger Test: $t_{n-1;1-\alpha}$
5. Schritt	Testentscheidungen: Zweiseitiger Test: $\lvert t_0 \rvert > t_{n-1;1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ ablehnen Rechtsseitiger Test: $t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen Linksseitiger Test: $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

Beispiel:

Ein Pharmaunternehmen behauptet, dass seine Tabletten durchschnittlich 60 mg eines Spurenelements enthalten. Eine Stichprobenuntersuchung von n = 20 ergibt einen Gehalt von durchschnittlich 60,02 mg bei einer Varianz von 0,002 mg^2.

Während eine zu hohe Dosis zu gesundheitlichen Beeinträchtigungen führt, verliert die Tablette bei einer zu geringen Dosis ihre Wirkung. Bei Annahme von normalverteilten Stichprobenvariablen soll bei einem Signifikanzniveau von 10% getestet werden, ob die Angabe des Pharmaunternehmers korrekt ist.

1. Schritt	Hypothesenformulierung (zweiseitiger Test): H_0: $\mu = 60$ H_1: $\mu \neq 60$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α: Das Signifikanzniveau α beträgt 0,10
3. Schritt	Wahl und Berechnung der Prüfgröße: Da die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit unbekannt und der Stichprobenumfang klein ist (n = 20 < 30), kommt der einfache t-Test über den Erwartungswert zur Anwendung. Wert der Prüfgröße: $t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{60{,}02 - 60}{\sqrt{0{,}002/20}} = \frac{0{,}02}{0{,}01} = 2$

4. Schritt	Tabellarische Ermittlung des Schrankenwertes: Bei dem zweiseitigen Test ist bei $\alpha = 0{,}10$ und $n = 20$ das 0,95-Quantil der t-Verteilung mit $n-1 = 19$ Freiheitsgraden zu bestimmen: $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{19;0,95} = 1{,}73$
5. Schritt	Testentscheidung: $(\lvert t_0 \rvert = 2) > (t_{19;0,95} = 1{,}73) \Rightarrow H_0$ ablehnen

Interpretation:

Die Angabe des Pharmaunternehmens über die Dosis des Spurenelements von durchschnittlich 60 mg wird also zurückgewiesen, da der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 60{,}02$ hiervon bei einem Signifikanzniveau von 10% substanziell (= signifikant) abweicht.

Approximativer Binomialtest

Bei großen Stichproben kann ein Test über den Anteilswert oder die Wahrscheinlichkeit p unter Verwendung der Normalverteilung durchgeführt werden. Die Varianz des Stichprobenanteilswerts braucht hier nicht aus der Stichprobe geschätzt zu werden, da sie unter Gültigkeit der Nullhypothese stets bekannt ist.

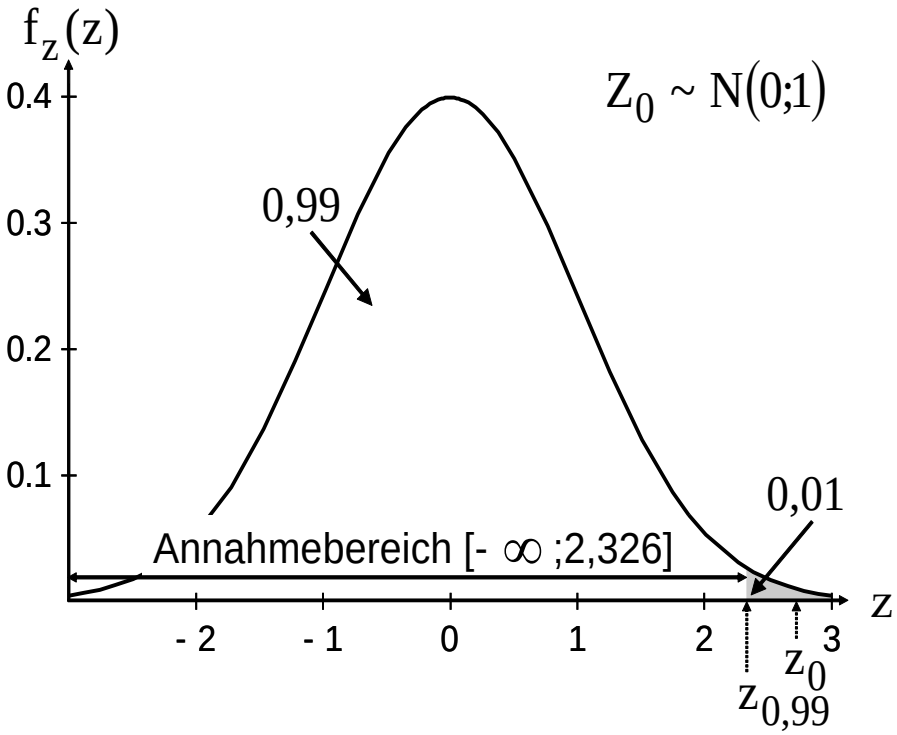
1. Schritt	Hypothesenformulierung: Zweiseitiger Test: H_0: $p = p_0$, H_1: $p \neq p_0$ Einseitige Tests: H_0: $p \leq p_0$, H_1: $p > p_0$ bzw. H_0: $p \geq p_0$, H_1: $p < p_0$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α
3. Schritt	Prüfgröße und ihre Verteilung (großer Stichprobenumfang) (bei Gültigkeit von H_0: $p = p_0$): $Z_0 = \frac{\overline{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{appr}{\sim} N(0;\,1)$ Faustregel: $n > \frac{9}{p_0(1-p_0)}$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung der Schrankenwerte: Zweiseitiger Test: $z_{1-\alpha/2}$, einseitiger Test: $z_{1-\alpha}$
5. Schritt	Testentscheidungen: Zweiseitiger Test: $\lvert z_0 \rvert > z_{1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ ablehnen Rechtsseitiger Test: $z_0 > z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen Linksseitiger Test: $z_0 < -z_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

Beispiel:

Ein Hersteller von Werkzeugmaschinen behauptet, dass seine Produkte nur zu höchstens 10% Mängel aufweisen. Eine Stichprobe vom Umfang n = 120 ergab 21 defekte Maschinen. Lässt sich die Behauptung des Herstellers bei einem Signifikanzniveau von 1% widerlegen?

1. Schritt	Hypothesenformulierung (rechtsseitiger Test): H_0: $p \leq 0{,}10$ H_1: $p > 0{,}10$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α: Das Signifikanzniveau α beträgt 0,01
3. Schritt	Wahl und Berechnung der Prüfgröße: Stichprobenanteilswert: $\bar{p} = \frac{21}{120} = 0{,}175$ $n = 120 > \frac{9}{p_0(1-p_0)} = \frac{9}{0{,}10 \cdot 0{,}90} = 100$ ($\rightarrow$ approximativer Binomialtest) $z_0 = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0{,}175 - 0{,}10}{\sqrt{0{,}10 \cdot 0{,}90/120}} = \frac{0{,}075}{0{,}027} = 2{,}778$

4. Schritt	Tabellarische Ermittlung des Schrankenwertes: Bei dem rechtsseitigen Test ist das 0,99-Quantil der Standardnormal-verteilung zu bestimmen: $z_{0,99} \approx 2{,}325$
5. Schritt	Testentscheidung: $(z_0 = 2{,}778) > (z_{0,99} \approx 2{,}325) \Rightarrow H_0$ ablehnen



Interpretation:

Der Unterschied zwischen $\bar{p} = 0{,}175$ und $p_0 = 0{,}1$ ist bei einem Signifikanzniveau von 1% als substanziell anzusehen. Damit gilt die Behauptung des Werkzeugmaschinenherstellers als widerlegt. Es ist also davon auszugehen, dass der Mängelanteil bei seinen Produkten über 10% liegt.

χ^2-Test über die Varianz

Bei der Anwendung des χ^2-Tests über die Varianz werden normalverteilte Stichprobenvariablen unterstellt.

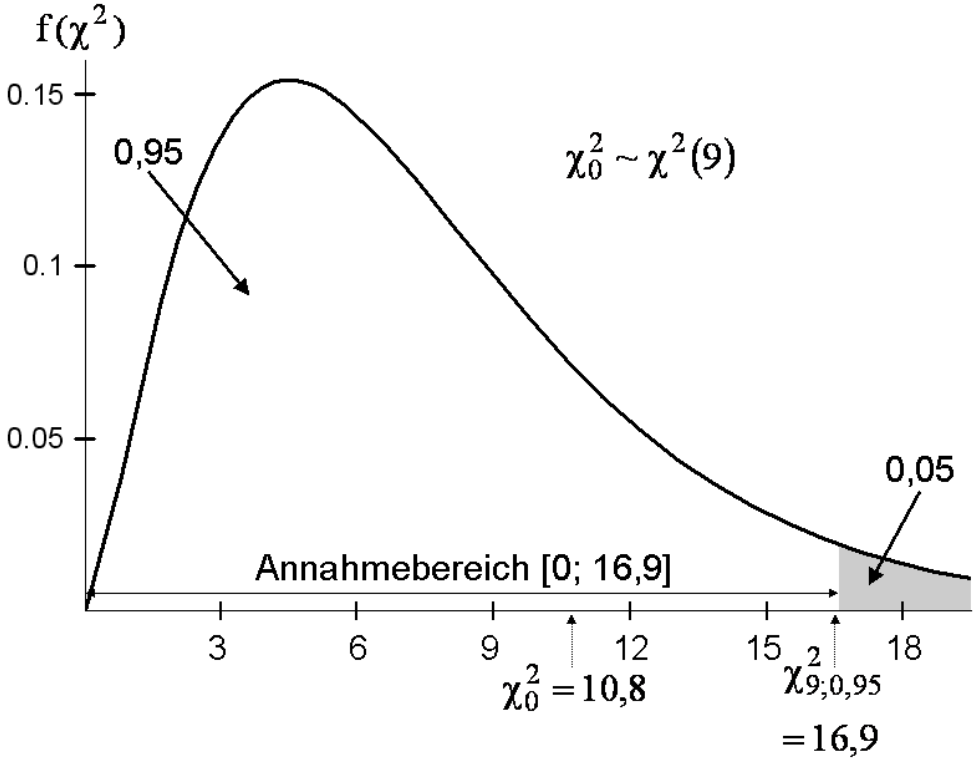
1. Schritt	Hypothesenformulierung: Zweiseitiger Test: H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$, H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$ Einseitige Tests: H_0: $\sigma^2 \leq \sigma^2_0$, H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$ bzw. H_0: $\sigma^2 \geq \sigma^2_0$, H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α
3. Schritt	Prüfgröße und ihre Verteilung (bei Gültigkeit von H_0: $\sigma^2 = \sigma^2_0$): $\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ mit $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung der Schrankenwerte: Zweiseitiger Test: $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ und $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ Rechtsseitiger Test: $\chi^2_{n-1;1-\alpha}$, linksseitiger Test: $\chi^2_{n-1;\alpha}$
5. Schritt	Testentscheidungen: Zweiseitiger Test: $\chi^2_0 < \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ oder $\chi^2_0 > \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \Rightarrow H_0$ ablehnen Rechtsseitiger Test: $\chi^2_0 > \chi^2_{n-1;1-\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen Linksseitiger Test: $\chi^2_0 < \chi^2_{n-1;\alpha} \Rightarrow H_0$ ablehnen

Beispiel:

Das Risiko auf Kapitalmärkten wird häufig über die Streuung von Renditen gemessen. Je stärker die Renditen streuen, desto höher die Unsicherheit und damit das Risiko. Ein Aktienhändler behauptet, dass die Varianz von Renditen bei höchstens 10 [%²] liegt. Eine Stichprobenuntersuchung vom Umfang n = 10 ergibt eine Varianz von 12 [%²]. Ein risikoaverser Anleger möchte wissen, ob er der Aussage des Aktienhändlers im Hinblick auf das geringe Risiko trotzdem vertrauen kann. Testen Sie bei Annahme von normalverteilten Stichprobenvariablen die Behauptung des Aktienhändlers bei einem Signifikanzniveau von 5%.

1. Schritt	Hypothesenformulierung (rechtsseitiger Test): H_0: $\sigma^2 \leq 10$ H_1: $\sigma^2 > 10$
2. Schritt	Festlegung des Signifikanzniveaus α: Das Signifikanzniveau α beträgt 0,05
3. Schritt	Wahl und Berechnung der Prüfgröße: $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\cdot 12}{10} = 10{,}8$
4. Schritt	Tabellarische Ermittlung des Schrankenwertes: $\chi^2_{n-1;1-\alpha} = \chi^2_{9;0,95} = 16{,}92$

5. Schritt	Testentscheidung: $\chi^2_0 = 10{,}8 < \chi^2_{9;0,95} = 16{,}92 \Rightarrow H_0$ nicht ablehnen



Interpretation:

Da die Nullhypothese nicht verworfen werden kann, lässt sich die Angabe des Aktienhändlers bei einem Signifikanzniveau von 5% nicht widerlegen. Der Unterschied zwischen der Stichprobenvarianz s = 12 und $\sigma^2_0 = 10$ kann also nicht als substantiell angesehen werden.