7. Stichproben und Punktschätzung

7.1 Grundgesamtheit und Stichprobe

Ausgangspunkt der induktiven Statistik (beurteilenden Statistik) sind Stichprobendaten. Speziell stammen die Daten aus Zufallsstichproben. Die Stichprobenergebnisse sollen auf die Grundgesamtheit übertragen werden. Im Folgenden beschränken wir den Begriff der Stichprobe stets auf das Konzept der Zufallsstichprobe.

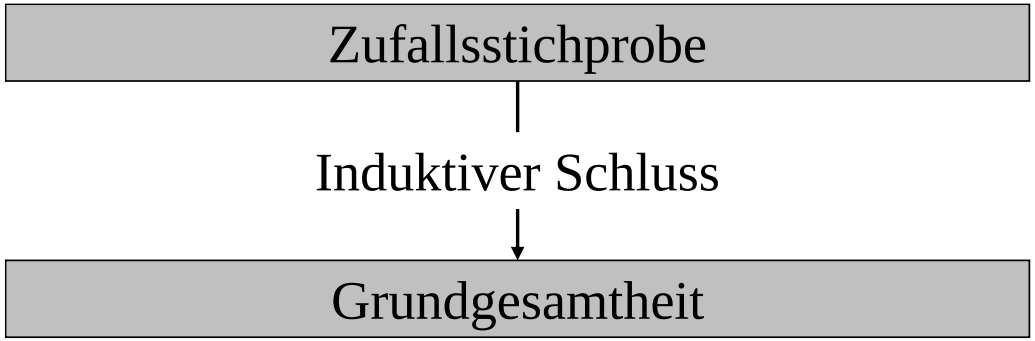
Eine Grundgesamtheit enthält alle interessierenden statistischen Einheiten (Personen, Unternehmen etc.), während eine Stichprobe nur zufällig ausgewählte Einheiten aus der Grundgesamtheit umfasst.

Aus einer Vollerhebung lassen sich Kenngrößen (Parameter) wie z.B. Mittelwerte, Streuungsmaße oder Anteilswerte der Grundgesamtheit prinzipiell exakt bestimmen. Eine Stichprobe enthält dagegen Informationen, die mit Zufallsschwankungen behaftet sind. Die Verallgemeinerung von Stichprobenergebnissen auf die Grundgesamtheit ist aufgrund unvollständiger Informationen daher stets mit Ungenauigkeiten verbunden. Dieser Rückschluss von den Beobachtungen in der Stichprobe auf bestimmte Charakteristika der Grundgesamtheit wird als induktiver Schluss bezeichnet.

Gründe für Stichprobenerhebungen:

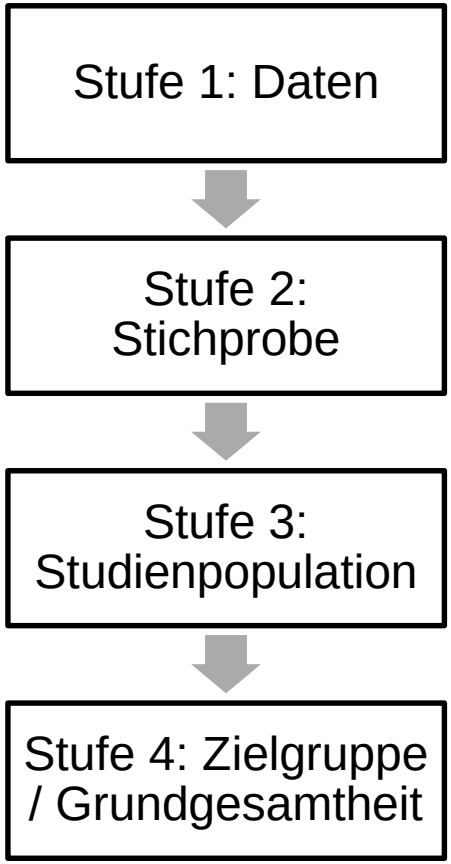
- Kostenersparnis
- Zeitgewinn (Aktualität)
- Gründlichere Durchführung
- Praktische Unmöglichkeit von Vollerhebungen (zerstörende Tests von Produkten)

Unter einem induktiven Schluss versteht man die Verallgemeinerung von Stichprobenergebnissen auf die Grundgesamtheit.



Stichprobenfehler:
Zufällige Abweichung eines Stichprobenergebnisses von einem Parameter der Grundgesamtheit

Detaillierter Prozess des induktiven Schlusses (vgl. Spiegelhalter, 2020):



Ausgewählte mögliche Probleme:

- Stufe 1 → Stufe 2: (Systematisch) fehlerhafte Messung
- Stufe 2 → Stufe 3: Unzureichende Abbildung der Studienpopulation
- Stufe 3 → Stufe 4: Keine externe Validität

Quelle: Spiegelhalter, D. (2020), The Art of Statistics – Learning from Data, Penguin Random House, UK.

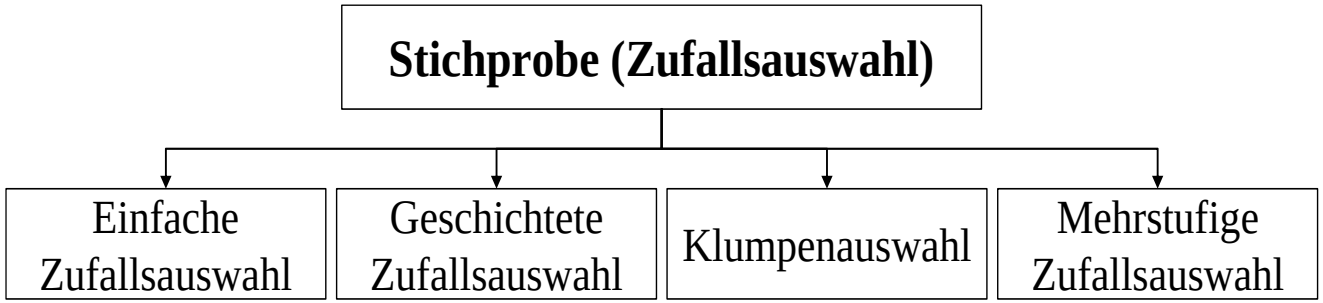
7.2 Zufallsauswahl

Bei einer Zufallsauswahl gelangt jede statistische Einheit der Grundgesamtheit mit einer berechenbaren Wahrscheinlichkeit in die Stichprobe. Über den Zufallsmechanismus wird die Repräsentativität sichergestellt.

Unter Anwendung des Wahrscheinlichkeitskalküls bei der Auswahl der statistischen Einheiten können bei einer Zufallsauswahl Aussagen über die Genauigkeit der Ergebnisse gemacht werden. Der induktive Schluss ist daher stets mit einem bestimmten Grad an (Un-)Sicherheit verbunden.

Stichprobenfehler und Sicherheitsgrad lassen sich bei Zufallsstichproben mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung quantifizieren.

Verfahren der Zufallsauswahl:



Einfache Zufallsauswahl

Bei der einfachen Zufallsauswahl gelangt jede statistische Einheit der Grundgesamtheit mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die Stichprobe.

Die Durchführung der einfachen Zufallsauswahl setzt im Allgemeinen voraus, dass alle N Elemente der Grundgesamtheit nummeriert in Form einer Liste oder Datei vorliegen. Zu unterscheiden sind verschiedene Techniken zur Auswahl der n Stichprobenelemente.

Bei einer Auswahl mit (Pseudo-)Zufallszahlen werden z.B. die Elemente der Grundgesamtheit durchnummeriert. Die zu ziehenden Untersuchungseinheiten entnimmt man einer Zufallszahlentabelle oder einem Zufallszahlengenerator, der beispielsweise in ein Computerprogramm integriert ist.

Die Zufallszahlen werden in beiden Fällen über einen Algorithmus erzeugt. Aus diesem Grund spricht man auch von Pseudo-Zufallszahlen. Obwohl Pseudo-Zufallszahlen durch eine Rechenvorschrift ermittelt werden, lassen sie sich kaum von „echten“ Zufallszahlen (z.B. Urnenauswahl) unterscheiden.

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei einer Zufallsauswahl, ist dann besonders einfach, wenn eine einfache Zufallsauswahl vorliegt. Eine einfache Zufallsstichprobe liegt unter folgenden Voraussetzungen vor:

- Alle Elemente der Grundgesamtheit haben die gleiche Chance (Wahrscheinlichkeit), in die Stichprobe zu gelangen (= uneingeschränkte Zufallsstichprobe)
- Die Ziehungen erfolgen unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden, ist dann bei jeder Ziehung gleich (Ziehung mit Zurücklegen oder Ziehung aus einer unendlichen Grundgesamtheit).

Approximativ liegen unabhängige Ziehungen vor, wenn aus einer endlichen Grundgesamtheit ohne Zurücklegen gezogen wird, der Auswahlsatz n/N jedoch klein ist (Faustregel: $n/N \leq 0{,}05$).

Beispiel:

Ein Meinungsforschungsinstitut besitzt eine Datei mit allen Telefonnummern einer Region. Der Computer wählt zufällig eine Telefonnummer aus, der Haushalt mit dieser Telefonnummer wird anschließend befragt. Um zu gewährleisten, dass Haushalte nicht mehrmals befragt werden, wird jede Telefonnummer höchstens einmal gezogen. Da der Auswahlsatz geringer als 5% ist (aus 20 Millionen Telefonnummern werden 1000 ausgewählt, so dass $1000/20000000 < 0{,}05$) sind die Bedingungen einer einfachen Zufallsstichprobe approximativ erfüllt.

7.3 Stichprobenvariablen und -funktionen

Stichprobenvariablen

Vor der Erhebung ist nicht bekannt, welche n Merkmalsträger in die Stichprobe gelangen. Damit liegen keine Informationen über die Ausprägungen bei einer Zufallsvariablen X vor. Somit sind n Zufallsvariablen vorhanden, die mit X_i (i = 1, 2, …, n) symbolisiert werden und als Stichprobenvariablen bezeichnet werden. Die Stichprobenvariable X_i bezeichnet also die potenzielle Beobachtung der Zufallsvariablen X, die bei der i-ten Durchführung des Zufallsvorgangs gemacht wird.

Nach der Erhebung liegen konkrete Realisationen der Stichprobenvariable X_i vor, die mit x_i bezeichet werden.

Zufallsstichprobe: n-dimensionale Zufallsvariable $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Konkrete Stichprobe: Realisation der n-dimensionalen Zufallsvariablen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Beispiel:

Es sollen zehn Studierende nach ihrem Einkommen (Merkmal X) befragt werden (n = 10). Damit liegen vor der Erhebung 10 Zufallsvariablen (= Stichprobenvariablen) vor, d.h. $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$. Nach der Erhebung sind konkrete Realisationen vorhanden. Gibt der erste Student ein Einkommen von 449€ an, gilt $x_1 = 449$. Insgesamt haben sich bei der Befragung der 10 Studierenden folgende Stichprobenrealisationen ergeben haben:

$x_1 = 449, x_2 = 662, x_3 = 389, x_4 = 802, x_5 = 523,$

$x_6 = 339, x_7 = 540, x_8 = 603, x_9 = 744, x_{10} = 459$

Die bei einer einfachen Zufallsstichprobe geltende Unabhängigkeit (bzw. approximative Unabhängigkeit) der Ziehungen bedeutet stets, dass die Stichprobenvariablen X_i unabhängig (bzw. approximativ unabhängig) voneinander sind.

Eine identische Verteilung bedeutet insbesondere, dass die Stichprobenvariablen X_i (i = 1, …, n) den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz haben:

$$E(X_i) = \mu$$

$$Var(X_i) = \sigma^2$$

Beispiel:

Das Durchschnittseinkommen aller Kasseler Studierenden (= Grundgesamtheit) betrage 604€ bei einer Varianz von 6400€^{2}. Wird eine Stichprobe von n = 100 Kasseler Studierenden gezogen, dann beträgt der Erwartungswert des Einkommens bei jedem der befragten Studierenden 604€ und die Varianz 6400€^{2}. Die Göttinger oder Marburger Studierenden bilden dagegen andere Grundgesamtheiten, die durch völlig unterschiedliche Parameter μ und σ^2 gekennzeichnet sein können.

Stichprobenfunktionen

Aus einer realisierten Stichprobe (x_1, x_2, ... ,x_n) lassen sich nun empirische Kennzahlen berechnen, die als Schätzwerte für die unbekannten Parameter der Grundgesamtheit oder Teststatistiken verwendet werden können. Sie werden allgemein als Stichprobenfunktionen bezeichnet, die die in der Stichprobe enthaltenen Informationen mit Hilfe geeigneter Funktionen g verdichten.

Vor dem Ziehen der Stichprobe sind die Stichprobenfunktionen $g(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ selbst Zufallsvariablen. Nach dem Ziehen der Stichprobe liegt eine Realisation, d.h. ein konkreter Wert einer Stichprobenfunktion vor: $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Beispiel:

Stichprobenfunktionen sind z.B. das arithmetische Mittel und unterschiedliche Streuungsmaße

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ bzw. } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \text{ bzw. } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \text{ bzw. } s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

7.4 Schätzfunktionen und ihre Eigenschaften

Eine Stichprobenfunktion, die zur Schätzung eines unbekannten Parameters in der Grundgesamtheit eingesetzt wird, heißt Schätzfunktion. Sie liefert einen Punktschätzer für den unbekannten Parameter der Grundgesamtheit.

Unbekannter Parameter der Grundgesamtheit: θ

Schätzfunktion für θ: $\hat{\theta} = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Schätzwert: $\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Die Stichprobenfunktion $\hat{\theta}$ wird als Schätzfunktion bezeichnet, weil ihre Realisationen konkrete Schätzwerte $\hat{\theta}$ für den unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit liefern. Zu beachten ist, dass mit $\hat{\theta}$ sowohl eine Zufallsvariable als auch deren Realisation bezeichnet wird. Aus dem jeweiligen Kontext geht hervor, welche Interpretation gerade vorliegt.

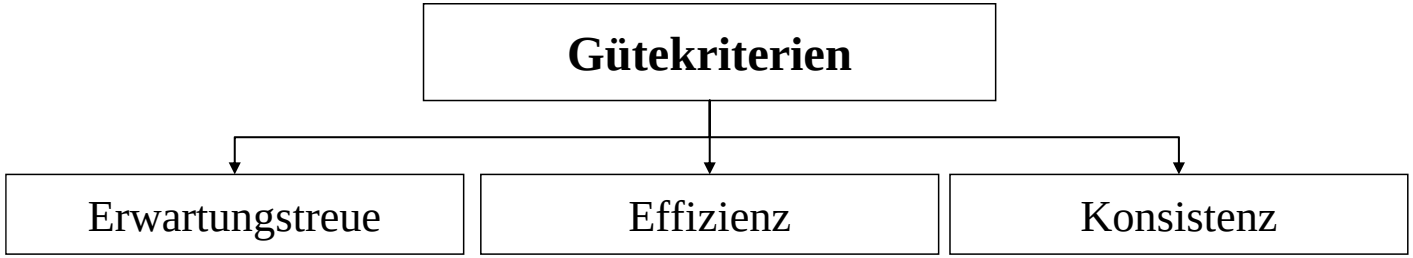
In Abhängigkeit davon, welche Untersuchungseinheiten der Grundgesamtheit in die Stichprobe gelangen, erhält man unterschiedliche Punktschätzer. Ein Punktschätzer ist also immer mit einer Unsicherheit behaftet. In der Regel wird er nicht exakt mit dem unbekannten Parameter der Grundgesamtheit übereinstimmen.

Häufig stehen mehrere Schätzfunktionen zur Punktschätzung eines unbekannten Parameters zu Verfügung. Welche Schätzfunktion soll dann verwendet werden?

Beispiele:

- Bei symmetrischen Verteilungen kann ein unbekannter Erwartungswert μ durch den Stichprobenmittelwert und durch den Stichprobenmedian geschätzt werden. Soll dann $\overline{X}$ oder $\widetilde{X}$ als Schätzfunktion zur Schätzung von μ verwendet werden?
- Bei einer Poisson-Verteilung stimmen Erwartungswert E(X) und Varianz Var(X) überein. Sie werden durch den Parameter λ wiedergegeben. Soll dann λ durch das Stichprobenmittel $\overline{X}$ oder die Stichprobenvarianz S^2 geschätzt werden?
- Warum sollte die unbekannte Varianz σ^2 einer Verteilung durch die Stichprobenvarianz mit dem Faktor 1/(n-1) statt mit dem Faktor 1/n geschätzt werden?

Um die Frage zu beantworten, welcher Punktschätzer bei Schätzungen eines unbekannten Parameters einer Grundgesamtheit vorzuziehen ist, benötigt man Kriterien, nach denen die Güte von Schätzfunktionen beurteilt werden kann. Drei wichtige Gütekriterien werden im Folgenden betrachtet:



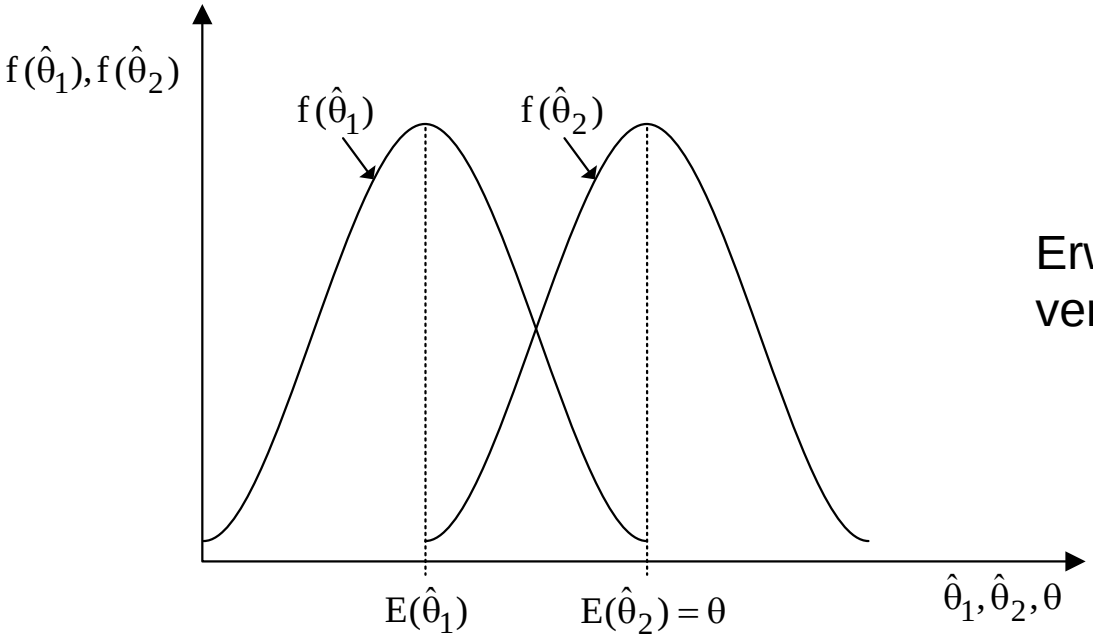
Erwartungstreue

Aufgrund des Stichprobenfehlers wird ein Punktschätzer $\hat{\theta}$ den unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit nicht genau treffen. Der Punktschätzer sollte aber im Durchschnitt mit dem unbekannten Parameter übereinstimmen. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Erwartungstreue.

Eine Schätzfunktion $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ für den unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit ist erwartungstreu (unverzerrt), falls gilt:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Falls dies nicht gilt, ist die Schätzfunktion verzerrt. Das Ausmaß der Verzerrung wird auch als Bias bezeichnet.



Erwartungstreuer und verzerrter Schätzer

Beispiel:

Gegeben ist eine beliebige Zufallsvariable X. Der Erwartungswert μ von X ist unbekannt. Betrachtet wird das arithmetische Mittel von $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Das arithmetische Mittel soll als Schätzer für den unbekannten Parameter μ verwendet werden. Die Frage ist, ob diese Schätzfunktion erwartungstreu ist.

$$E\left(\bar{X}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

Damit ist gezeigt, dass $\bar{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für μ ist.

Die Erwartungstreue für einen unbekannten Anteilswert p gilt auch für den Stichprobenanteilswert bei Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen X_i (die den Wert 1 annehmen, falls ein Ereignis A vorliegt):

$$\bar{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\bar{P}) = p$$

Aufwändiger ist der Nachweis der Erwartungstreue für folgende Schätzfunktion:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Die Stichprobenvarianz ist also dann ein erwartungstreuer Schätzer für die unbekannte Varianz σ^2, wenn die Summe der Abweichungsquadrate mit dem Faktor 1/(n-1) multipliziert wird.

Nicht erwartungstreu ist dagegen die Stichprobenvarianz mit dem Faktor 1/n:

$$S^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

Der Bias beträgt:

$$E\left(S^{*2}\right) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Effizienz

Die Erwartungstreue bezieht sich auf den Durchschnitt aller Stichproben eines bestimmten Umfangs. Werden mehrere Stichproben gezogen, dann werden sich die einzelnen Schätzwerte mehr oder weniger voneinander unterscheiden. Die Effizienz einer Schätzfunktion bezieht sich auf die Streuung eines Schätzers. Je geringer die Varianz der Schätzfunktion ist, desto präziser ist die Schätzung.

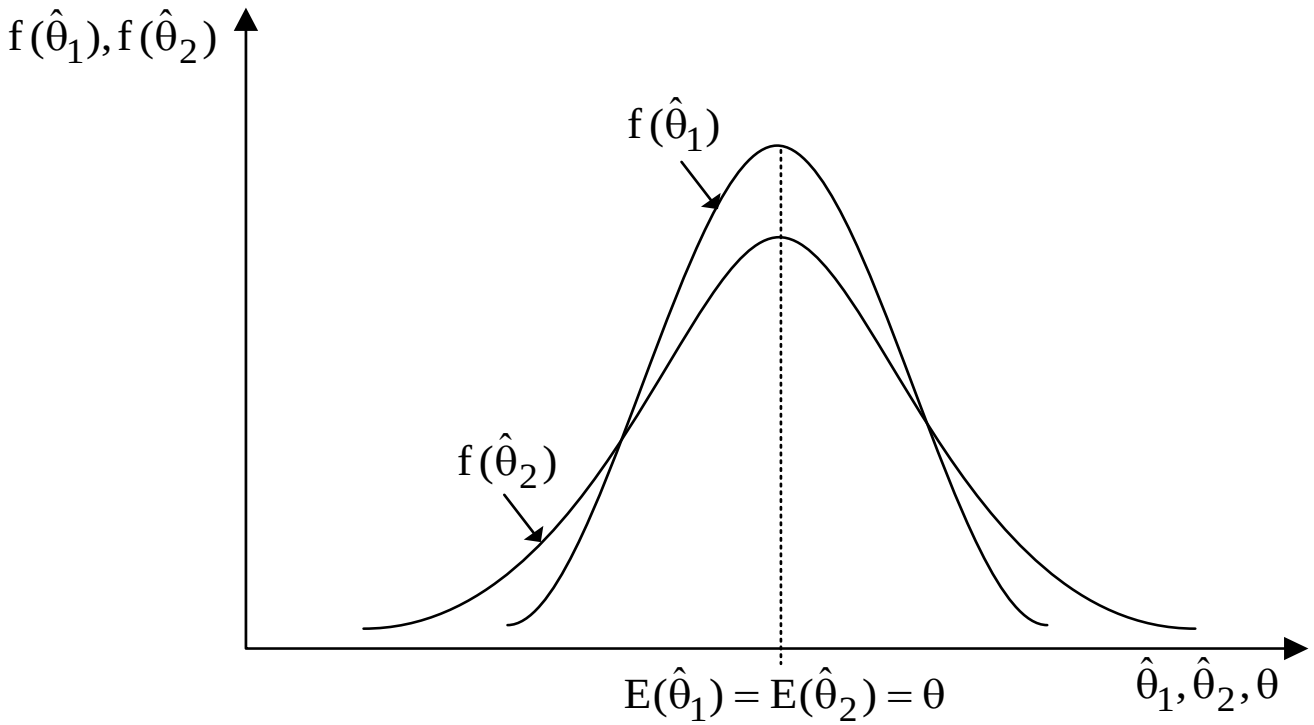
Die erwartungstreue Schätzfunktion mit der geringsten Varianz heißt effizient.

Aufschluss über die relative Effizienz zweier Schätzfunktionen erhält man durch den Vergleich ihrer Varianzen. Es seien $\hat{\theta}_1 = g_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ und $\hat{\theta}_2 = g_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ zwei erwartungstreue Schätzfunktionen für den unbekannten Parameter der Grundgesamtheit. Die Schätzfunktion $\hat{\theta}_1$ ist relativ effizient zu $\hat{\theta}_2$, wenn für jeden Stichprobenumfang n gilt:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_1\right) \leq \mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)$$

Das Gütekriterium der Effizienz besagt also, dass von zwei alternativen erwartungstreuen Schätzfunktionen diejenige zu wählen ist, die bei festem Stichprobenumfang n die kleinere Varianz aufweist.

Relative Effizienz eines Schätzers



$$E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

Damit ist $\hat{\theta}_1$ relativ effizient zu $\hat{\theta}_2$.

Beispiel:

Zur Schätzung des unbekannten Erwartungswertes μ werden folgende Schätzfunktionen betrachtet:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\left(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\right)$$

$$\text{mit } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$$

Beide Schätzfunktionen sind erwartungstreu. Die Erwartungstreue von $\hat{\mu}_1$ ist bereits gezeigt worden, da es sich hierbei um das arithmetische Mittel $\overline{X}$ handelt. Die Erwartungstreue von $\hat{\mu}_2$ ergibt sich folgendermaßen:

$$E\left(\hat{\mu}_2\right) = \frac{1}{n}\left[a_1E\left(X_1\right) + \ldots + a_nE\left(X_n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(a_1\mu + \ldots + a_n\mu\right) = \frac{1}{n}\mu\left(a_1 + \ldots + a_n\right) = \frac{1}{n}\mu \cdot n = \mu$$

Welche der beiden Schätzfunktionen hat aber die kleinere Varianz? Die Schätzfunktion mit der kleineren Varianz ist die relativ effizientere Schätzfunktion.

Für die Varianzen ergibt sich:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_1\right) = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}[\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + ... + \mathrm{Var}(X_n)]$$

$$= \frac{1}{n^2}\underbrace{(\sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2)}_{\text{n-mal}} = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_2\right) = \frac{1}{n^2}\left[a_1^2\mathrm{Var}\left(X_1\right) + a_2^2\mathrm{Var}(X_2) + \ldots + a_n^2\mathrm{Var}\left(X_n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(a_1^2\sigma^2 + a_2^2\sigma^2 + \ldots + a_n^2\sigma^2\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$$

Falls alle a_i gleich 1 sind, gilt:

$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) = n$$

In diesem Fall sind die beiden Varianzen identisch. Sofern nur ein a_i ungleich 1 ist, ist die Varianz von $\hat{\mu}_2$ größer als die Varianz von $\hat{\mu}_1$. Allgemein gilt damit:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_1\right) \leq \mathrm{Var}\left(\hat{\mu}_2\right)$$

Damit ist der erste Schätzer $\hat{\mu}_1$ relativ effizient zum zweiten Schätzer $\hat{\mu}_2$.

Konsistenz

Eine Reihe von Schätzfunktionen, die in der statistischen Praxis auftreten, haben die Eigenschaft, dass ihr Erwartungswert bei steigendem Stichprobenumfang n gegen den unbekannten Parameter θ strebt (asymptotische Erwartungstreue) und gleichzeitig auch ihre Varianz gegen 0 geht:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\hat{\theta}\right) = 0$$

Man bezeichnet diese asymptotische Güteeigenschaft einer Schätzfunktion als Konsistenz.

Ein konsistenter Schätzer fällt bei einem über alle Grenzen steigenden Stichprobenumfang mit dem unbekannten Parameter θ zusammen. Die Konsistenz einer Schätzfunktion ist also die Garantie, dass sich ein steigender Aufwand lohnt, um im Durchschnitt bessere Schätzergebnisse zu erhalten. Konsistenz wird in der Praxis häufig als minimale Güteanforderung angesehen, die an eine Schätzfunktion gestellt wird.

Beispiel:

Betrachtet wird erneut folgende Schätzfunktion:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Es soll überprüft werden, ob diese Schätzfunktion eine konsistente Schätzung für den unbekannten Erwartungswert μ ist.

Asymptotische Erwartungstreue

Zuvor wurde bereits gezeigt, dass $\bar{X}$ erwartungstreu ist. Da diese Eigenschaft für jeden beliebigen Stichprobenumfang gilt, ist sie auch für $n \to \infty$ erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\bar{X}\right) = \mu$$

Verschwindende Varianz

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\bar{X}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sigma^2 = 0$$

Das Stichprobenmittel $\bar{X}$ ist somit ein konsistenter Schätzer für den unbekannten Erwartungswert μ. Bei steigendem Stichprobenumfang n konzentrieren sich also die Realisationen von $\bar{X}$ immer enger um μ, da die Varianz geringer wird.

Beispiel:

Zehn Kasseler Studierende sind nach ihrem Einkommen (Zufallsvariable X) befragt worden. Aufgrund einer einfachen Zufallsstichprobe haben sich folgende Stichprobenrealisationen ergeben:

$$x_1 = 449,\ x_2 = 662,\ x_3 = 389,\ x_4 = 802,\ x_5 = 523,$$

$$x_6 = 339,\ x_7 = 540,\ x_8 = 603,\ x_9 = 744,\ x_{10} = 459$$

Aus den Stichprobendaten erhält man folgendes arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\left(449 + 662 + 389 + 802 + 523 + 339 + 540 + 603 + 744 + 459\right)$$

$$= \frac{1}{10} 5510 = 551\ [€]$$

Der Schätzwert für das Durchschnittseinkommen aller Kasseler Studierenden beträgt also 551 €. Das wahre arithmetische Mittel μ für alle Studierenden wird allerdings von diesem Punktschätzer abweichen. Das Stichprobenmittel $\bar{X}$ ist jedoch eine erwartungstreue (unverzerrte) und konsistente Schätzung des Durchschnittseinkommens aller Kasseler Studierenden.

Bekannt ist, dass es bei einer einfachen Zufallsstichprobe keine erwartungstreue Schätzfunktion gibt, die eine geringere Varianz aufweist als das Stichprobenmittel. Aus diesem Grund ist $\overline{X}$ ein effizienter Schätzer für μ.

Die Varianz des Stichprobenmittels lautet:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2 / n$$

Sie kann folgendermaßen erwartungstreu geschätzt werden:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = S^2 / n$$

Im Beispiel erhält man als Schätzung für die unbekannte Varianz bzw. die unbekannte Standardabweichung des durchschnittlichen Einkommens $\overline{X}$ aller Kasseler Studierenden:

$$s^2 = \frac{1}{10-1}\left[(449-551)^2 + (662-551)^2 + \ldots + (459-551)^2\right]$$

$$= \frac{1}{9} 206236 = 22915{,}111 \; [€^2]$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} = \frac{22915{,}111}{10} = 2291{,}511 [€^2]$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \sqrt{2291{,}511} = 47{,}870 [€]$$