Physikalischer Raum

Aus unserer Erfahrung schreiben wir dem Raum intuitiv bestimmte Eigenschaften zu. Intuition ist aber nicht ausreichend zum Aufbau einer Theorie. Es bedarf vielmehr einer präzisen mathematischen Formulierung, um festzulegen, welche Aussagen in der Theorie gültig sind. Dies erfolgt mit Definitionen und der Formulierung von Axiomen sowie daraus abgeleiteten Sätzen.

Euklidischer Raum

Der dreidimensionale physikalische Raum wird in der klassischen Physik mit dem mathematischen Konstrukt des Euklidischen Raums beschrieben. Im Euklidischen Raum sind Punkte, Geraden und Ebenen definiert, für die bestimmte Aussagen zutreffen. Hilbert hat mit 21 Axiomen den Euklidischen Raum definiert (vgl. Anhang). Diese und alle daraus ableitbaren Aussagen können in der klassischen Physik auf den physikalischen Raum übertragen werden. Punkte, Geraden und Ebenen werden in physikalischen Gesetzen verwendet. Orte von Körpern sind z.B. Punkte. Geradlinige Bewegungen in Newtons erstem Axiom sind Bewegungen entlang von Geraden, Lichtstrahlen verlaufen im Vakuum entlang von Geraden.

In der Relativitätstheorie ist der Raum gekrümmt und es werden andere mathematische Konstrukte zur Beschreibung des physikalischen Raums verwendet.

Im Euklidischen Raum sind Strecken definiert. Jeder Strecke kann eine Länge zugeordnet werden. Zueinander kongruente Strecken haben die gleiche Länge. Axiom V.1, das Archimedische Axiom des Messens, stellt sicher, dass die Länge einer Strecke entlang einer Geraden mithilfe einer definierten Strecke (Meter) gemessen werden kann. Das Meter ist über ein Experiment definiert und kann damit überall im Raum dargestellt werden. Kopien davon sind als Metermaß verfügbar.

Im Euklidischen Raum sind weiterhin Winkel definiert. Jedem Winkel kann ein Winkelmaß zugeordnet werden. Zueinander kongruente Winkel haben das gleiche Winkelmaß. Das Winkelmaß benötigt keine Einheit. Es wird als Teil eines Vollkreises in Teilen von 2π oder in Teilen von 360° angegeben.

Strecken und Winkel sind aber nicht besonders geeignet, um mit Ihnen alleine physikalische Gesetze zu formulieren. Orte als Punkt im Raum können mit den mathematischen Mitteln des Euklidischen Raums nicht quantitativ bezeichnet werden, um daraus z.B. ihren Abstand (Länge der Strecke zwischen diesen beiden Punkten) zu berechnen.

Vektorraum

Zur Bezeichnung von Orten im Raum muss ein stärkeres mathematisches Konstrukt verwendet werden. Dies ist der Vektorraum (vgl. Anhang). Er hat allerdings zusätzliche Eigenschaften, die man im physikalischen Raum nicht findet, aber frei wählen kann. Vorhersagen über physikalische Vorgänge müssen unabhängig von dieser willkürlichen Wahl sein.

Beim Vektorraum muss ein Nullpunkt (Ursprung) gewählt werden. Dies ist ein ausgezeichneter Punkt im Raum. Alle Angaben werden bezüglich dieses Nullpunktes gemacht.

Bezugssystem

Ortsvektoren werden in Bezug auf einen Nullpunkt (Ursprung) angegeben. Dieser Nullpunkt ist der Ursprung eines Bezugssystems. Da im physikalischen Raum kein ausgezeichneter Punkt existiert, weiß man nichts über den willkürlich gewählten Nullpunkt. Insbesondere ist die Lage des Nullpunktes zu unterschiedlichen Zeiten unklar. Er könnte *ruhen oder sich gradlinig gleichförmig bewegen oder auch beschleunigt und auf kurvigen Bahnen bewegen*. Die kursiv gesetzten Aussagen sind allerding nicht sinnvoll, da es keinen anderen Bezug gibt, bezüglich dessen man diese Arten von Bewegung feststellen könnte.

Das Bezugssystem hat weiterhin eine Orientierung. Es kann über die Zeit *die Orientierung beibehalten oder auch rotieren*. Aber auch hier hat man keine anderen Anhaltspunkte im Raum, um das festzustellen. Weil es keinen absoluten Bezugspunkt und keine absolute Orientierung gibt, können nur anhand von Experimenten bestimmte Aussagen über das Bezugssystem gemacht werden. Newtons erstem Axiom teilt alle denkbaren Bezugssysteme mit einem einfachen Experiment in zwei Klassen ein: Inertialsysteme und nicht-Inertialsysteme.

Darstellung von Vektoren

Vektoren können graphisch als Pfeile dargestellt werden. Vektoradditionen und andere Operationen können graphisch ausgeführt werden. In physikalischen Gesetzen werden die Vektoren als Buchstaben mit Pfeil benannt. Das ist ohne Koordinatensystem möglich. Für eine numerische Darstellung von Vektoren ist allerdings ein Koordinatensystem erforderlich, das willkürlich gewählt werden kann. Die Einführung von Koordinatenachsen z.B. eines kartesischen Koordinatensystems mit seinen Basisvektoren ist am Nullpunkt verankert. Die Wahl des Koordinatensystems d.h. die Richtung seiner Basisvektoren ist wiederum willkürlich. Das mathematische Konstrukt für Vektoren, die in einem Koordinatensystem dargestellt werden, ist der Koordinatenraum.

Koordinatenraum

Vektoren können im Koordinatenraum dargestellt werden (vgl. Anhang). Dadurch können die Vektoren, die erstmal nur abstrakte mathematische Objekte sind, mit Hilfe von Kombinationen aus reellen Zahlen $\vec{r} = (x, y, z)$ dargestellt werden. Im Koordinatenraum können schließlich alle Berechnungen numerisch mit reellen Zahlen vollständig durchgeführt werden. Für die reellen Zahlen gelten die Axiome des Körpers der reellen Zahlen (vgl. Anhang).

Die willkürliche Wahl von Bezugssystem und Koordinatensystem muss bei der Interpretation der mathematischen Beschreibung physikalischer Vorgänge immer berücksichtigt werden. Orte und Geschwindigkeiten sind in verschiedenen Bezugssystemen unterschiedlich. Für die Beschleunigung gilt dies grundsätzlich auch. Sie ist allerdings in allen Inertialsystemen gleich. Die Kraft wird in Newtons zweitem Axiom über die Beschleunigung definiert. Daher sind auch Kräfte in allen Inertialsystemen gleich. Damit wird es möglich, dass Newtons drittes Axiom in allen Inertialsystemen gilt.

Die Darstellung von Vektoren ist allerdings auch in Inertialsystemen von der willkürlichen Wahl der Basisvektoren (Koordinatenachsen) abhängig. So dass die Vektorkomponenten aller Vektoren in allen Bezugssystemen von der willkürlichen Wahl des Koordinatensystems abhängen.

Bemerkung

Mit den im Anhang zusammengefassten Axiomen zum Euklidischen Raum, Vektorraum, Koordinatenraum und Körper der reellen Zahlen sind alle grundlegenden Rechenregeln und geometrischen Aussagen zusammengefasst, die wir in der klassischen Physik dem physikalischen Raum zuordnen können. Auch alle Zusammenhänge, die mathematisch aus den Axiomen abgeleitet werden können, lassen sich auf den physikalischen Raum übertragen.

Es wird dabei erkennbar, wie komplex der Aufbau eines quantitativen mathematischen Modells zur Beschreibung des physikalischen Raumes ist. In seiner präzisen mathematischen Formulierung ist es für Anfänger sicher schwer verständlich. Wesentliche Teile davon werden aber bereits im Mathematikunterricht der Schule beim Rechnen mit reellen Zahlen, der Analytischen Geometrie (Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen durch Vektoren und durch Gleichungen im Koordinatenraum) und der linearen Algebra erlernt.

Mathematische Axiome zum Euklidischen Raum, Vektorraum und Koordinatenraum.

1 Euklidischer Raum

David Hilbert hat ein System von 21 Axiomen in 5 Gruppen aufgestellt, um den Euklidischen Raum axiomatisch aufzubauen [1]. Hilbert bemerkt dazu, dass die Geometrie - ebenso wie die Arithmetik - zu ihrem Aufbau nur weniger einfacher Grundsätze [den Axiomen] bedarf. Die Aufstellung der Axiome [...] läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.

Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen Sie mit $A, B, C, \ldots$ die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Geraden* und bezeichenn Sie mit $a, b, c, \ldots$ und die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Alle drei sind Elemente der räumlichen Geometrie. Wir denken die Punkte, Geraden und Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie *liegen, zwischen, parallel, kongruent, stetig* deren genaue Beschreibung durch die folgenden *Axiome der Geometrie* erfolgt [1].

1.1 Axiome der Verknüpfung

I.1 Zwei voneinander verschiedene Punkte A und B bestimmen stets eine Gerade a.

I.2 Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.

I.3 Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.

I.4 Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene α.

I.5 Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen die Ebene α.

I.6 Wenn zwei Punkte A und B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

I.7 Wenn zwei Ebenen α und β einen Punkt A gemeinsam haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemeinsam.

I.8 Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

1.2 Axiome der Anordnung

II.1 Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.

II.2 Wenn A und C Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.

II.3 Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Wir betrachten auf einer Geraden a zwei Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine Strecke und bezeichnen dieselbe mit AB oder mit BA.

II.4 Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

1.3 Axiome der Kongruenz

III.1 Wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden a sind und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$. Jede Strecke ist sich selbst kongruent, d.h. es ist stets $AB \equiv AB$ und $AB \equiv BA$

III.2 Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent, d.h. wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$ so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.

III.3 Seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf der selben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch $AC \equiv A'C'$.

Es sei α eine beliebige Ebene und h,k seien irgend zwei verschiedene von einem Punkt O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen Winkel und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder mit $\sphericalangle(k, h)$ Aus den Axiomen II 1—4 kann leicht geschlossen werden, daß die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkte O die übrigen Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so gibt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heiße das *Innere des Winkels* (h, k) zum Unterschiede von dem anderen Gebiete, welches das Äußere des Winkels (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heißen *Schenkel* des Winkels und der Punkt O heißt der *Scheitel* des Winkels.

III.4 Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene a' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle(h', k')$ auf der gegebenen Seite von a liegen, in Zeichen: $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h. es ist stets $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$.

III.5 Wenn ein Winkel (h, k) sowohl dem Winkel (h', k') als auch dem Winkel (h'', k'') kongruent ist, so ist auch der Winkel (h', k') dem Winkel (h'', k'') kongruent, d. h. wenn $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$ und $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'')$ ist, so ist auch stets $\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$.

III.5 Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$ erfüllt.

1.4 Axiom der Parallelen

IV.1 (Euklidisches Axiom) Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene α nur eine Gerade b, die durch A läuft und a nicht schneidet; dieselbe heißt die Parallele zu a durch A.

1.5 Axiome der Stetigkeit

V.1 (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom) Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B; man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$, so dass A_1 zwischen A_1 und A_2, ferner A_2 zwischen A_1 und A_3, ferner A_3 zwischen A_2 und A_4, usw. liegt und überdies die Strecken einander gleich sind: dann gibt es in der Reihe der Punkte $A_2, A_3, A_4, \ldots$ stets einen solchen Punkt A_n , daß B zwischen A und A_n liegt.

V.2 (Axiom der Vollständigkeit). Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist, d. h.: zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daß in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome I - IV und V.1 erfüllt sind.

2 Vektorraum

Sei V eine Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper $\oplus : V \times V \to V(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \oplus \vec{b}$ eine zweistellige Verknüpfung genannt Vektoraddition und $\odot : K \times V \to V(\alpha, \vec{a}) \mapsto \alpha \odot \vec{a}$ eine zweistellige Verknüpfung genannt Skalarmultiplikation. Man nennt dann $(V, \oplus, \odot)$ einen Vektorraum über dem Körper K, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

A.1 Assoziativgesetz: Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$

$$(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c}) \tag{1}$$

A.2 Es gibt ein neutrales Element $\vec{0} \in V$ mit dem für alle $\vec{a} \in V$ gilt

$$\vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{a} = \vec{a} \tag{2}$$

A.3 Zu jedem $\vec{a} \in V$ existiert ein inverses Element $-\vec{a} \in V$ mit

$$\vec{a} \oplus (-\vec{a}) = (-\vec{a}) \oplus \vec{a} = \vec{0} \tag{3}$$

A.4 Kommutativgesetz: Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a} \tag{4}$$

A.5 Distributivgesetz: Für alle $\alpha \in K$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt

$$\alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\alpha \odot \vec{b}) \tag{5}$$

A.6 Distributivgesetz: Für alle $\alpha, \beta \in K$ und $\vec{a} \in V$ gilt

$$(\alpha + \beta) \odot \vec{a} = (\alpha \odot \vec{a}) \oplus (\beta \odot \vec{a}) \tag{6}$$

A.7 Für alle $\alpha, \beta \in K$ und $\vec{a} \in V$ gilt

$$(\alpha \cdot \beta) \odot \vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a}) \tag{7}$$

A.8 Für das neutrales Element der Multiplikation des Körpers $1 \in K$ gilt für alle $\vec{a} \in V$

$$1 \odot \vec{a} = \vec{a} \tag{8}$$

2.1 normierter Vektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \|\vec{a}\| \mapsto \alpha$ eine Norm auf V, dann nennt man $(V, \|\cdot\|)$ normierten Vektorraum, wenn gilt

A.9 Definitheit:

$$\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \tag{9}$$

A.10 Absolute Homogenität: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\alpha \odot \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\| \tag{10}$$

A.11 Dreiecksungleichung: Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \tag{11}$$

2.2 Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ und die Abbildung $\bullet : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \bullet \vec{b}$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gelten folgende Axiome

A.1 Definitheit:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \tag{12}$$

A.2 Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \tag{13}$$

A.3 Linearität:

$$(\vec{a} \oplus \vec{b}) \bullet \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) + (\vec{b} \bullet \vec{c}) \tag{14}$$

A.4 und mit $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\alpha \odot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\alpha \odot \vec{a}) \bullet \vec{b} \tag{15}$$

Das Skalarprodukt induziert eine Norm, die gegeben ist durch

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \tag{16}$$

Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt ist daher ein normierter Vektorraum.

3 Koordinatenraum

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ eine natürlich Zahl, so ist das n-fache kartesische Produkt

$$K^n = K \times K \times \cdots \times K \tag{17}$$

also

$$K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1, a_2, \ldots, a_n \in K\}$$

die Menge aller n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit Komponenten aus K. Auf K^n sei eine Abbildung (Addition) definiert $\oplus : K^n \times K^n \to K^n, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \oplus \vec{b}$ für die gilt

A.1 Komponentenweise Addition:

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, \ldots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \ldots, b_n)\\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)\end{aligned} \tag{18}$$

Sei ferner auf K^n eine Abbildung (skalare Multiplikation) definiert $\odot : \mathbb{R} \times K^n, (\alpha, \vec{a}) \mapsto \alpha \odot \vec{a}$ für die gilt

A.2 Komponentenweise Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned}&\alpha \odot (a_1, a_2, \ldots, a_n)\\ &= (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n)\end{aligned} \tag{19}$$

Dann ist $(K^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum, der als *Koordinatenraum* der Dimension n über dem Körper K bezeichnet wird. Seine Elemente heißen *Koordinatenvektoren* oder *Koordinatentupel*. Der Beweis ist leicht zu führen und braucht hier nicht gezeigt zu werden. Es folgt aus den beiden Axiomen weiterhin:

S.1 Das neutrale Element im Koordinatenraum ist

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0) \tag{20}$$

mit dem neutralen Element 0 der Addition im Körper K.

S.1 Das inverse Element der Addition zu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist

$$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \tag{21}$$

Im Koordinatenraum ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, \ldots, a_n) \bullet (b_1, b_2, \ldots, b_n)\\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n)\end{aligned} \tag{22}$$

3.1 Basis

Eine Basis eines Vektorraums $(V, \oplus, \odot)$ ist eine Teilmenge B von V mit folgenden Eigenschaften

A.1 Jedes Element von V läßt sich als Linerkombination von Vektoren aus B eindeutig darstellen.

Die Elemente einer Basis heißen Basisvektoren.

Eine Basis eines Vektorraums mit Skalarprodukt heißt Orthogonalbasis wenn für alle $\vec{a}, \vec{b} \in B$ gilt

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \tag{23}$$

Eine Basis heißt Orthonormalbasis wenn zusätzlich für alle $\vec{a} \in B$ gilt

$$\|\vec{a}\| = 1 \tag{24}$$

Eine Orthonormalbasis eines Koordinatenraums ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{25}$$

4 Körper

Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei zweistelligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die Addition und Multiplikation genannt werden. Es gelten folgende Axiome:

A.1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0

A.2 $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1

A.3 Es gilt das Distributivgesetz, d.h. für alle $a, b, c \in K$ gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{26}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{27}$$

4.1 Abelsche Gruppe

Eine Gruppe $(G, *)$ ist eine Menge G zusammen mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$ bezüglich G. Dadurch wird die Abbildung $* : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$ beschrieben. Es gelten die folgende Axiome:

A.1 Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$

$$(a * b) * c = a * (b * c) \tag{28}$$

A.2 Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit dem für alle $a \in G$ gilt

$$a * e = e * a = a \tag{29}$$

A.3 Zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \tag{30}$$

Eine Gruppe ist abelsch, wenn zusätzlich das Kommutativgesetz gilt.

A.4 Für alle $a, b \in G$ gilt

$$a * b = b * a \tag{31}$$

4.2 Ordnungsrelation

Eine geordnete Gruppe $(G, +, \leq)$ besteht aus einer Gruppe $(G, +)$ und einer Relation $\leq$ und erfüllt folgende Axiome

A.1 Für alle $a \in G$ gilt $a \leq a$, d.h.die Relation ist reflexiv.

A.2 Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$ für alle $a, b, c \in G$, d.h. die Relation ist transitiv.

A.3 (Verträglichkeit mit Adddition) Für alle $a, b, c \in G$ folgt aus $a \leq b$ immer $(a + c) \leq (b + c)$.

Die Gruppe ist total geordnet wenn zusätzlich gilt

A.4 (Totale Ordnung) Für alle $a, b \in G$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$.

Entsprechend können Ordnungsrelationen auch auf einer Halbgruppe, einem Monoid, einer abelschen Guppe oder einem Körper eingeführt werden. Bei einem total geordneten Körper muss zusätzlich die Verträglichkeit Ordnungsrelation mit der Multiplikation sichergestellt werden.

Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ besteht aus einem Körper $(K, +, \cdot)$ und einer Ordnungsrelation $\leq$ und erfüllt folgende Axiome

A.1 (Verträglichkeit mit Adddition) Für alle $a, b, c \in K$ folgt aus $a \leq b$ immer $(a + c) \leq (b + c)$.

A.2 Aus $0 \leq a$ und $0 \leq b$ folgt $0 \leq a \cdot b$.

Literatur

[1] David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1899