Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Präsenzübung — Besprechung am 24.04.2019

Aufgabe 1 – Kronecker-Delta & Levi-Civita-Tensor

Erinnerung: Das Kronecker-Delta ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls i=j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$$

als Summe der einzelnen Vektorkomponenten $\vec{a}_i$ und $\vec{b}_i$. Verwenden Sie hierzu das Kronecker-Delta.

Erinnerung: Der Levi-Civita-Tensor ist definiert als

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls ijk= 123, 231, 312 (bzw. ijk= xyz, yzx, zxy)} \\ -1, & \text{falls ijk= 132, 321, 213 (bzw. ijk= xzy, zyx, yxz)} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Schreiben Sie das das Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = ?$$

als Summe der einzelnen Vektorkomponenten $\vec{a}_i$ und $\vec{b}_i$. Verwenden Sie hierzu den Levi-Civita-Tensor.

(c) Benutzen Sie das Levi-Civita-Symbol, um folgende Identität zu beweisen:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

Hinweis: Sie können dazu die Kontraktsregel $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ist} \equiv \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$ benutzen.

Aufgabe 2 – Vektoranalysis

In der folgenden Aufgabe schreiben wir ∂_x für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ (das gleiche gilt für $(y, z, \ldots)$). Wir verwenden außerdem die Abkürzung $f(\vec{r}) = f(x, y, z) \equiv f$ für eine (beliebige) skalare Funktion und $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z) \equiv \vec{v}$ für ein (beliebiges) Vektorfeld.

$$\vec{\nabla} f \equiv \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \operatorname{div} \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \Delta f = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) f$$

(a) Betrachten Sie folgende Vektorfelder

$$x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z (\equiv \vec{r}) \qquad\qquad \vec{v} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y.$$

berechnen Sie die Rotation “rot” und die Divergenz “div” der Vektorfelder.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von

$$|\vec{r}| \qquad\qquad \sqrt{x^2 + y^2}$$

(c) Zeigen Sie dass die Rotation eines Gradienten immer verschwindet, also

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \qquad \forall f$$

Hinweis: Verwenden Sie z.B. die Darstellung des Skalar- und Kreuzprodukts aus der ersten Aufgabe.

Aufgabe 3 – Delta-Funktion
Die Delta-Funktion ist definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,,$$

wobei f eine beliebige glatte Testfunktion ist. (Beachte: δ ist im streng mathematischen Sinne eine Distribution, also eine lineare Abbildung $\delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, die Funktionen auf (complexe) Zahlen abbildet.)

(a) Berechnen Sie folgende Eigenschaften der Delta-Distribution

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = ?$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)\,\mathrm{d}x = ?$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x\cdot a)\,\mathrm{d}x = ?$ für $a \neq 0$
Hinweis: Überprüfe dein Ergebnis für $a = \pm 1$

(b) Zeichnen die den Verlauf der folgenden Funktion

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Die Delta-Funktion $\delta(x)$ kann als Grenzwert von Dirac-Folgen veranschaulicht werden. Eine solche Folge ist z.B.

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon}}$$

Für $\epsilon \to 0$ ergibt sich die gewünschte Deltafunktion $\delta(x)$. Skizzieren Sie die Funktionen $\delta_\epsilon(x)$ für verschiedene Werte für ϵ verhalten.