Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 02.05.2019

Übungsblatt 1 Besprechung am 08.05.2019

Aufgabe 1 – Kronecker-Delta & Levi-Civita-Tensor **18 Punkte**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls i=j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Kronecker-Delta)}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{falls ijk= 123, 231, 312 (bzw. ijk= xyz, yzx, zxy)} \\ -1, & \text{falls ijk= 132, 321, 213 (bzw. ijk= xzy, zyx, yxz)} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(Levi-Civita-Tensor)}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors die Antikommutativität des Kreuzprodukts, also

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten:

i) $\sum_{ij} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} = 2\delta_{km}$

ii) $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

(c) Beweisen Sie die "bac-cab"-Regel:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

Hinweis: Sie können dazu die Kontraktionsregel aus (b)ii) verwenden

Aufgabe 2 – Vektoranalysis **20 Punkte + 6 Zusatzpunkte**

In der folgenden Aufgabe schreiben wir ∂_x für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ (das gleiche gilt für $(y, z, \ldots)$). Wir verwenden außerdem die Abkürzung $f(\vec{r}) = f(x, y, z) \equiv f$ für eine (beliebige) skalare Funktion und $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z) \equiv \vec{v}$ für ein (beliebiges) Vektorfeld. Folgende Operationen sind Ihnen bereits aus der Präsenzübung bekannt:

$$\vec{\nabla} f \equiv \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \operatorname{div} \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \equiv \Delta f = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) f$$

(a) Betrachten Sie folgende Ausdrücke mit $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\frac{1}{|\vec{r}|} \qquad \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \quad (\text{mit } \vec{r} \neq \vec{r}\,')$$

i) Berechnen Sie "grad" für alle Ausdrücke (wo möglich).

ii) Berechnen Sie "div" für alle Ausdrücke (wo möglich).

iii) Berechnen Sie "rot" für alle Ausdrücke (wo möglich).

(b) In der Präsenzübung haben wir bereits gezeigt, dass die Rotation eines Gradienten immer verschwindet ($\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \;\forall f$). dass auch die Divergenz einer Rotation immer verschwindet, also

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \qquad \forall \vec{v}$$

(c) Zeigen Sie (z.B. unter sinnvoller Verwendung des Levi-Civita-Tensors aus Aufgabe 1) folgende Produktregel

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v})$$

Zusatzpunkte[+3P]: Warum kann man hier nicht direkt die "bac-cap"-Regel aus Aufgabe 1c) anwenden?

(d) Zeigen Sie (z.B. unter sinnvoller Verwendung des Levi-Civita-Tensors aus Aufgabe 1), dass

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} - \Delta\vec{v}.$$

Hinweis: Sie können dazu die Kontraktionsregel aus 1b)ii) verwenden

Zusatzpunkte[+3P]: Warum kann man hier nicht direkt die Produktregel aus Aufgabe 2c) anwenden?

Aufgabe 3 – Delta-Funktion **22 Punkte**

Wie bereits in der Präsenzübung besprochen ist die Delta-Funktion definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)\,,$$

wobei f eine beliebige glatte Testfunktion ist. (Beachte: δ ist im streng mathematischen Sinne eine Distribution, also eine lineare Abbildung $\delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$, die Funktionen auf (complexe) Zahlen abbildet.)

(a) Zeigen Sie, dass $\forall a, b \neq 0$

$$\int_a^b \delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(0), & \text{falls } 0 \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie folgende Ableitungsregel der Delta-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\,\mathrm{d}x = -f'(0).$$

Hinweis: Partielle Integration

(c) Verwenden Sie das Ergebnis der letzten Aufgabe um folgende Gleichung zu beweisen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

$g^{(n)}(x)$ ist hierbei die n-te Ableitung der Funktion $g(x)$.

(d) Zeigen Sie, dass die n-te Ableitung der Delta-Funktion geschrieben werden kann als

$$\delta^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^n}\delta(x).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta'(x)\,\mathrm{d}x$

(ii) Zeigen Sie induktiv, dass Gleichung **??** gilt.