Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 15.05.2019

Übungsblatt 3 Besprechung am 22.05.2019

Aufgabe 1 – Geladene Röhre **14 Punkte**

Der Raum zwischen zwei unendlichen koaxialen Zylindern mit den Radien a und b $(a < b)$ ist elektrisch mit einer ungleichmäßigen kubischen Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = kr_{\text{cyl}}^2$ geladen, wobei r_{cyl} der Abstand zur Achse der Zylinder und k eine Konstante ist.

(a) Skizzieren Sie das System in 2D und bestimmen Sie ohne explizite Berechnungen die Richtung des elektrischen Feldes in jedem Punkt des Raumes. Begründen Sie kurz, warum Sie die jeweilige Feldrichtung gewählt haben.

(b) Wenn wir das Gaußsche Gesetz anwenden wollten, welche Art von Oberfläche sollten wir verwenden und warum?

(c) Bestimmen Sie das elektrische Feld in den verschiedenen Bereichen $b < r$, $a < r < b$ und $r < a$.

(d) Berechnen Sie die Potentialdifferenz zwischen den Punkten $A = (0, R_1, 0)$ und $B = (R_2, 0, 0)$, mit $a < R_1 < b < R_2$.

Aufgabe 2 – Die Kugel in der Kugel **10 Punkte**

Eine Kugel mit 20 cm Radius und vernachlässigbarer Dicke ist mit 10^{14} Ladungen pro Kubikzentimeter gefüllt, welche jeweils die Ladung $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$ tragen (dies kann zum Beispiel ein ionisiertes Gas sein). Im Inneren befindet sich eine isolierende Kugel mit neutraler Ladung und einem Radius von 2 cm, deren Mittelpunkt 5 cm von der Mitte der größeren Kugel entfernt ist. Die innere Kugel kann für diese Aufgabe als ladungsfreies Vakuum angenommen werden.

(a) Skizzieren Sie das System (in 2D) und bestimmen Sie seine Ladungsverteilung.

(b) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ an einem Punkt innerhalb der kleineren Kugel. *Hinweis: Gauß'sches Gesetz und Superpositionsprinzip.*

(c) Schreiben Sie einen kurzen Kommentar zu den Eigenschaften des resultierenden Feldes.

Aufgabe 3 – Potentiale **16 Punkte**

(a) Skizzieren Sie die Äquipotentialflächen der folgenden Potentiale:

$$\begin{cases} \Phi_1(\vec{r}) := \frac{2}{|\vec{r}-(0,0,-1)|} - \frac{4}{|\vec{r}-(0,0,1)|} \\ \Phi_2(\vec{r}) := \frac{2}{|\vec{r}-(0,1,0)|} + \frac{4}{|\vec{r}-(0,-1,0)|} \\ \Phi_3(\vec{r}) := C\log(\sqrt{x^2+y^2}) \\ \Phi_4(\vec{r}) := C\vec{r}^2 e^{-|\vec{r}|} \end{cases}$$

Skizzieren Sie ebenfalls den Verlauf der elektrischen Feldstärke durch einige, repräsentative Feldvektoren

Hinweis: Es reicht, wenn Sie eine 2D-Ansicht des Potentials plotten. Nutzen Sie die entsprechenden Symmetrien der Felder aus.

(b) Berechnen Sie den Gradienten in Zylinderkoordinaten ∇_{zyl}.

Hinweis: Schreiben Sie die kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ for $i = x, y, z$ als Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten $\vec{e}_m$ for $m = \rho, \phi, z$ und verwenden Sie die Kettenregel für partielle Ableitungen.

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld für jedes Potential aus Teil (a) unter der Verwendung eines angemessenen Koordinatensystems. Überprüfen Sie, ob Ihre Ergebnisse mit denen übereinstimmen, die Sie in Teil (a) gezeichnet haben.

Hinweis : $\nabla_{\text{Kugel}} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

(d) Beweisen Sie, dass das Potenzial Φ_3 durch eine unendliche Linienladung erzeugt werden kann, indem Sie das elektrische Feld aus der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ableiten.

Aufgabe 4 – Multipolentwicklung **20 Punkte**

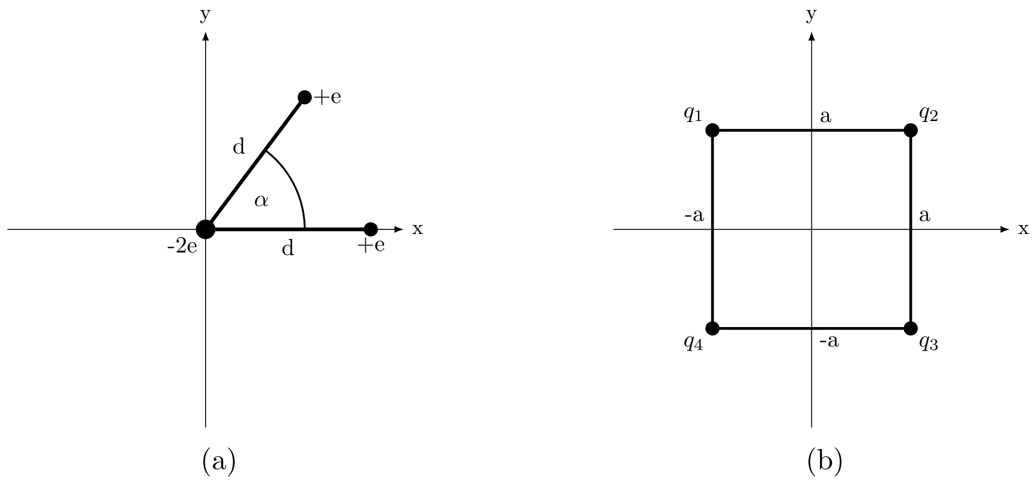

Abbildung 1: Ladungsverteilungen für Aufgabe 4

(a) Die Ladungsverteilung in Abbildung 1a soll ein deutlich vereinfachtes Modell eines Wassermoleküls darstellen. Berechnen Sie das Dipolmoment der Ladungsverteilung und bestimmen Sie $|\vec{p}|$ für die (experimentell bestimmten) Werte: $\alpha = 104.45°$ und $d = 95.8\,\text{pm}$.

(b) Bestimmen Sie das Dipolmoment für eine Ladungsverteilung $q_1 = q_2 = q$ und $q_3 = q_4 = -q$, wie sie in Abbildung 1b gezeigt ist. Geben Sie außerdem den führenden Term des resultierenden Potentials für große Abstände von der Ladungsverteilung an.

(c) Bestimmen Sie das Dipolmoment für Konstellation $q_1 = q_4 = q$ und $q_2 = q_3 = -q$, wieder angeordnet wie in Abbildung 1b. Vergleichen Sie das Ergebnis mit (b).

(d) Bestimmen Sie das Dipolmoment und das Quadrupolmoment, welches gegeben ist durch

$$\tilde{Q}_{ij} = \int \left(3 r_i r_j - |r| \delta_{ij}\right) \rho(x)\, \mathrm{d}^3 r$$

für Ladungen $q_1 = q_3 = q$ und $q_2 = q_4 = -q$, angeordnet wie in Abbildung 1b. Geben Sie außerdem den führenden Term des resultierenden Potentials für große Abstände von der Ladungsverteilung an.