Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 22.05.2019

Übungsblatt 4 Besprechung am 29.05.2019

Aufgabe 1 – Die Erde als sphärischer Kondensator **20 Punkte**

Neben starken und sehr variablen elektrischen Feldern bei Gewittern gibt es in der Erdatmosphäre auch ein permanentes atmosphärisches elektrisches Feld bei schönem Wetter, das senkrecht zur Erdoberfläche steht (nach unten gerichtet), mit einer durchschnittlichen Feldstärke von etwa 130 V/m. Gewitter entladen Gewitterwolken, laden aber dabei die Erdoberfläche negativ und die leitenden Schichten der oberen Atmosphäre positiv auf. Außerhalb von Gewittern fließt ein beständiger winziger Entladungsstrom, der der andauernden Aufladung durch die Gewitter das Gleichgewicht hält. In dieser Aufgabe betrachten wir lediglich den Fall, dass (überall) schönes Wetter herrscht.

(a) Die Erdoberfläche kann dann in guter Näherung als die Oberfläche eines Leiters betrachtet werden. Wie hoch ist die Ladungsdichte auf dieser Oberfläche? Wie vielen Elektronen pro Quadratmillimeter entspricht das?

(b) Das maximale elektrische Feld, das die Luft vor dem elektrischen Ausfall (d.h. bevor ein elektrischer Strom durch sie fließt) aufrechterhalten kann, beträgt 3 MV/m. Welches ist das maximale Potenzial, an dem sich die Erdoberfläche befinden kann, bevor dies passiert? Um wie viel muss die tatsächliche Ladungsdichte dafür erhöht werden?

(c) Nehmen wir an, dass die Ionosphäre eine geladene Kugelschale ist, welche die gleiche Ladung wie in Aufgabe (a) trägt, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Wir können das System dann als kugelförmigen Kondensator behandeln. Wie hoch wäre die Kapazität dieses Kondensators?

Hinweis: Da das Medium zwischen diesen beiden Kugelschalen Luft ist, müssen Sie die Permittivität des Vakuums ε_0 durch die Permittivität der Luft $\varepsilon_{\text{Luft}}$ ersetzen. Diese ist gegeben durch $\varepsilon_{\text{Luft}} = 1.0059\,\varepsilon_0$.

Zusätzliche Informationen:
Erdradius: 6371 km; Höhe der Ionosphäre: 90 km; Elektronenladung: $e = 1.6 \cdot 10^{19}\,\text{C}$

Aufgabe 2 – Spiegelgalerie **20 Punkte**

Betrachten Sie einen geerdeten Leiter, der folgendes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ ausfüllt,

$$\left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -2a\right\} \cup \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2a\right\}\ ,$$

wobei $a > 0$. Betrachten Sie eine Punktladung mit Ladung q am Ort $(-a, 0, 0)$ und eine Punktladung mit Ladung $-q$ am Ort $(a, 0, 0)$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze für dieses Problem an.

(b) Spiegeln Sie die beiden Ladungen einmal an der linken und einmal an der rechten Seite. Zeigen Sie, dass diese sechs (zwei reale, vier reflektierte) Ladungen die notwendigen Randbedingungen an dem gegebenen Leiter nicht erfüllen.

(c) Begründen Sie, warum sich dieses Problem im Raum $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 2a\}$ effektiv durch eine Ladungsverteilung

$$\rho\left(\vec{r}\right) = \delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-1\right)^{k+1} q\delta\left(x - \left(2k+1\right)a\right)$$

beschreiben lässt. Skizzieren Sie diese Ladungsverteilung und zeigen Sie explizit, dass das Potenzial auf dem Leiter verschwindet.
Hinweis: Stellen Sie sich vor, Sie stehen zwischen zwei Spiegeln. Was sehen Sie?

(d) Berechnen Sie die Feldenergie $\mathcal{E}$ dieser Anordnung.
Hinweis: Da wir es mit Punktladungen zu tun haben, ist es sinnvoll, den Ausdruck $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_- = \frac{1}{2}(qV_+ - qV_-)$ zu benutzen, wobei V_+ das Potenzial aller Ladungen außer der (realen) Ladung q am Ort $(-a, 0, 0)$ ist und V_- das Potenzial aller Ladungen außer der (realen) Ladung $-q$ am Ort $(a, 0, 0)$ ist. Beweisen und benutzen Sie den Ausdruck für die Taylorreihe von $\ln(1+x)$: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln(2)$.

Aufgabe 3 – Greensche Funktion **20 Punkte**

In der Elektrostatik ist die Greensche Funktion G_0 als die Lösung der Poisson-Gleichung für eine Einheits-Punktladung definiert:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \ .$$

Die allgemeine Form der Greenschen Funktion lautet $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') + f(\vec{r}, \vec{r}\,')$, wobei die Funktion $f(\vec{r}, \vec{r}\,')$ der Laplace-Gleichung genügt und benutzt wird, um die Randbedingungen zu erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \ .$$

Hinweis: Diese Aufgabe benötigt keine aufwendigen Rechnungen und Beweise.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion und des Greenschen Theorems lässt sich die Poisson-Gleichung für das elektrostatische Potenzial Φ in einem Volumen V in eine Integralgleichung umformen:

$$\Phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,') G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \mathrm{d}V' + \epsilon_0 \oint_{\partial V} \Bigg[\underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}\,') \frac{\partial \Phi}{\partial n}}_{\text{(A)}} - \underbrace{\Phi(\vec{r}\,') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n}}_{\text{(B)}} \Bigg] \mathrm{d}S' \ .$$

Über die Oberflächenintegrale gehen die Randbedingungen in die Gleichung ein. Ist sowohl das Potenzial als auch dessen Normalenableitung auf dem Rand des Volumens gegeben, ist das Problem jedoch überbestimmt, da sich diese Bedingungen in der Regel nicht gleichzeitig erfüllen lassen. Durch Wahl von $f(\vec{r}, \vec{r}\,')$ können wir die Lösung $\Phi(\vec{r})$ an die Randbedingungen des Problems anpassen.

(b) Dirichlet-Randbedingungen für das Potenzial liegen vor, wenn das Potenzial auf der Oberfläche ($\Phi_S(\vec{r}) \equiv \Phi(\vec{r})\ \forall \vec{r} \in S$) bekannt ist. Da wir in diesem Fall keine Informationen über die Normalenableitung auf dem Rand haben, muss der erste Term des Oberflächenintegrals (A) verschwinden. Welche Bedingungen muss $f(\vec{r}, \vec{r}\,')$ erfüllen, damit dies passiert?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass die Wahl

$$\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n} = 0 \qquad \forall\, \vec{r}\,' \in \partial V$$

nicht erlaubt ist.

(d) Betrachten wir nun den Fall der Neumann-Randbedingungen für das Potenzial. Hierbei ist $\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial n}$ auf der Oberfläche gegeben, nicht jedoch das Potenzial $\Phi(\vec{r})$ selbst. Daher muss der zweite Term des Oberflächenintegrals (B) verschwinden. Wie wir in (c) gezeigt haben, ist dies nicht möglich. Es ist allerdings möglich, den Term auf eine Konstante zu reduzieren:

$$\epsilon_0 \oint_{\partial V} \Phi(\vec{r}\,') \frac{\partial G_{\mathrm{N}}(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n} \, \mathrm{d}S' = -\Phi_0 \; .$$

Erklären Sie kurz, warum dies genügt, und bestimmen Sie einen möglichen Ausdruck für Φ_0.