**Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik** **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 29.05.2019

Übungsblatt 5 Besprechung am 05.06.2019

---

**Aufgabe 1 – Sphärische Multipolentwicklung** **30 Punkte**

Es seien zwei Vektoren $\vec{r}, \vec{r}\,' \in \mathbb{R}^3$ durch ihre Kugelkoordinaten $(r, \theta, \varphi)$ bzw. $(r', \theta', \varphi')$ gegeben. Falls $r > r'$ gilt folgende Identität durch Entwicklung in Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}$,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta', \varphi') \, Y_{lm}(\theta, \varphi) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die Multipolentwicklung im Fernfeld des Potenzials einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}\,')$ in Kugelkoordinaten folgendermaßen schreiben läßt,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \, .$$

Geben Sie dazu einen allgemeinen Ausdruck für die Koeffizienten $q_{lm}$ in Abhängigkeit der Ladungsverteilung an. Welche Terme der Doppelsumme über $m$ und $l$ tragen zur jeweiligen $n$ -ten Ordnung der Multipolentwicklung bei? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Notieren Sie die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten explizit bis zur ersten Ordnung (also $l = 1$) für eine allgemeine Ladungsverteilung in Abhängigkeit der entsprechenden sphärischen Multipolmomente $q_{lm}$.

(c) Drücken Sie $q_{0,0}, q_{1,0}, q_{1,1}$ und $q_{1,-1}$ durch die Gesamtladung $Q$ und die (kartesischen) Komponenten des Dipolmoments $\vec{p}$ aus.

**Aufgabe 2 – Wellenleiter** **30 Punkte**

Nehmen wir an, dass wir einen rechteckigen Wellenleiter aufgebaut haben, der durch die Flächen $\{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$ mit $0 < a, b$ begrenzt ist. Die leitenden Platten bei $x = 0$ und $x = a$ sind geerdet. Eine andere leitende Platte bei $y = 0$ ist mit dem Potenzial $V_0$ verbunden. Außerdem sei der elektrische Fluss, der die Platte bei $y = b$ durchfließt konstant und gleich $E_0$ (nach außen gerichtet).

(a) Formulieren Sie das oben beschriebene Randwertproblem für das Potenzial im Inneren des Wellenleiters unter der Annahme, dass sich keine Ladung im Innenraum befindet.

*Hinweis:* Der elektrische Fluss $\Phi_E$ ist definiert als

$$\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Überlegen Sie sich, wie $\vec{E}$ mit unserem Potenzial $\phi$ zusammenhängt.

(b) Lassen Sie uns nun das Problem in zwei verschiedene Potenziale unterteilen, $\phi = \phi_1 + \phi_2$, so dass alle Randbedingungen für $\phi_1$ auf 0 gesetzt werden, außer der auf $y = 0$ und alle Randbedingungen für $\phi_2$ auf 0 gesetzt werden, außer der auf $y = b$.

Erfüllt dieses Potenzial $\phi_1 + \phi_2$ die unter a) beschriebenen Bedingungen des Ausgangsproblems?

*Hinweis:* In diesem Problem treten eventuell gemischte Randbedingungen auf, was bedeutet, dass sowohl Dirichlet- als auch Neumann-Randbedingungen auf den verschiedenen Platten vorliegen können. Achten Sie darauf, dass Sie eine Dirichlet-Bedingung nicht in eine Neumann-Bedingung umwandeln oder andersherum, falls Sie diese auf Null setzen. Also z.B.

$$\begin{aligned}
\phi(0,y) = C_1 \quad &\longrightarrow \quad \hat{\phi}(0,y) = 0 \\
\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = C_2 \quad &\longrightarrow \quad \left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\
\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = C_3 \quad &\not\longrightarrow \quad \hat{\phi}(0,y) = 0
\end{aligned}$$

(c) Lösen Sie das Randwertproblem für $\phi_1$ durch Trennung der Variablen.

*Hinweis 1:* Machen Sie sich klar, dass aus $f(x) = g(y) \quad \forall x, y$ folgt, dass $f(x) = g(y) = \text{const}$. Diese Konstante kann dann $k < 0$, $k > 0$ oder $k = 0$ sein. In dem vorliegenden Fall, ergibt sich jedoch nur in einem der drei Fälle eine nicht-triviale Lösung.

*Hinweis 2:* Seien $X(x)$ und $Y(y)$ die Funktionen, die durch die Trennung der Variablen gegeben sind. Versuchen Sie zuerst die Differenzialgleichung für $X(x)$ mit deren Randbedingungen zu lösen. Lösen Sie anschließend die Differenzialgleichung für $Y(y)$ und verwenden Sie zuerst die Randbedingungen für $y = b$ und danach die Randbedingungen bei $y = 0$. Das macht es einfacher.

*Hinweis 3:* Für eine Funktion $h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right)$, wobei $h(x,0) = l(x)$, lassen sich die Koeffizienten $a_n$ berechnen durch

$$a_n = \frac{2}{c f_n(0)} \int_0^c l(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right) dx.$$

(d) Lösen Sie das Randwertproblem für $\phi_2$ durch Trennung der Variablen.

*Hinweis:* Versuchen Sie wieder zuerst die Differenzialgleichung $X(x)$ zu lösen. Lösen Sie anschließend die Differenzialgleichung für $Y(y)$ und verwenden Sie zuerst die Randbedingungen für $y = 0$ und danach die Randbedingungen bei $y = b$.

(e) Bestimmen Sie den gesamten Ausdruck für $\phi$.

(f) Zusatzpunkte[+6P]: Beweisen Sie Hinweis 3 in 2c).