Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 19.06.2019
Übungsblatt 8 Besprechung am 26.06.2019

Aufgabe 1 – Faradaysches Induktionsgesetz **24 Punkte**

Kleine Formelsammlung:

- Drehmoment auf ein Linienelement:

$$\mathrm{d}\vec{N}(t) = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}$$

mit $\mathrm{d}\vec{F} = \rho(\vec{r})\vec{E}\,\mathrm{d}l$

- Verknüpfung von Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{N}$:

$$\vec{L} = \int \vec{N}\,\mathrm{d}t$$

(a) In einem unendlich langen, geraden Leiter fließe ein zeitlich linear ansteigender Strom $I(t)$. Welche Richtung hat dann der in der rechteckförmigen Leiterschleife (siehe Abb. links) induzierte Strom und in welche Richtung wirkt die Kraft auf die Leiterschleife?

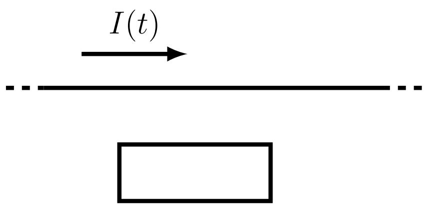
(b) Berechnen Sie das durch ein Magnetfeld

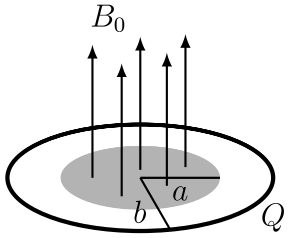
$$B(x,y,z,t) = B(t)\,\vec{e}_z \begin{cases} 1 & \text{wenn } x^2+y^2 < R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

induzierte elektrische Feld.

(c) Feynmans Ladungsrad: Auf der Randlinie eines kreisförmigen Rades (Radius b) sei eine Ladung Q gleichmäßig verteilt. Das Rad sei frei drehbar aufgehängt. Innerhalb eines zylindrischen Gebietes vom Radius $a < b$ befinde sich orthogonal zum Rad ein homogenes Magnetfeld der Stärke B_0 (siehe auch Abb. rechts). Das Rad befinde sich in Ruhe. Schaltet man das Magnetfeld ab, so übt das induzierte elektrische Feld eine Kraft auf die Linienladung des Rades aus. Berechnen Sie den Drehimpuls der hierdurch insgesamt auf das Rad übertragen wird. Woher kommt dieser Drehimpuls?

Hinweis: Berechnen Sie zuerst das Drehmoment und bestimmen Sie anschließend aus diesem einen Ausdruck für den Gesamtdrehimpuls, welcher nicht mehr von der konkreten Form der Ableitung $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ abhängt.





Aufgabe 2 – Rotierende Hohlkugel **36 Punkte**

Betrachten Sie eine homogen geladene Hohlkugel im Vakuum mit Gesamtladung Q und Radius R, welche mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ rotiert. Bezeichnen Sie die Oberflächenladungsdichte mit σ. Das Vektorpotential dieser Anordung ist durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\vec{\omega} \times \vec{r}), & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3 r^3} (\vec{\omega} \times \vec{r}), & r \geq R \end{cases} .$$

(a) Schreiben Sie das Vektorpotential in Kugelkoordinaten, um zu zeigen, dass $\forall \vec{r}$: $\vec{A}(\vec{r}) \parallel \hat{e}_\varphi$. Motivieren Sie diese Richtungsabhängigkeit des Vektorpotentials kurz. *Hinweis: Zeigen und benutzen Sie die Relation* $\hat{e}_z = \cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta$.

(b) Bestimmen Sie σ, $\rho(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$.
Hinweis: $\rho(\vec{r})$ ist zeitunabhängig (warum?) und hat eine sehr einfache Form. Benutzen Sie den Satz von Gauß, um $\vec{E}$ zu bestimmen.

(c) Bestimmen Sie $\vec{B}(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$. Überprüfen Sie dabei explizit, ob die Stromdichte aus der Formel $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{v}$ konsistent mit der Stromdichte ist, welche Sie über $\vec{B}(\vec{r})$ aus den Maxwell-Gleichungen erhalten. Falls dies nicht der Fall ist, erklären Sie die Diskrepanz! *Hinweis: Für die Rotation in Kugelkoordinaten gilt*

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi .$$

Das Ergebnis für das $\vec{B}$-Feld lautet

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} \hat{e}_z, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3 r^3} (2 \cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta), & r \geq R \end{cases} .$$

(d) Bestimmen Sie den Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes.
Hinweis: Die elektromagnetische Impulsdichte ist gegeben durch

$$\vec{\Pi} = \vec{D} \times \vec{B} .$$