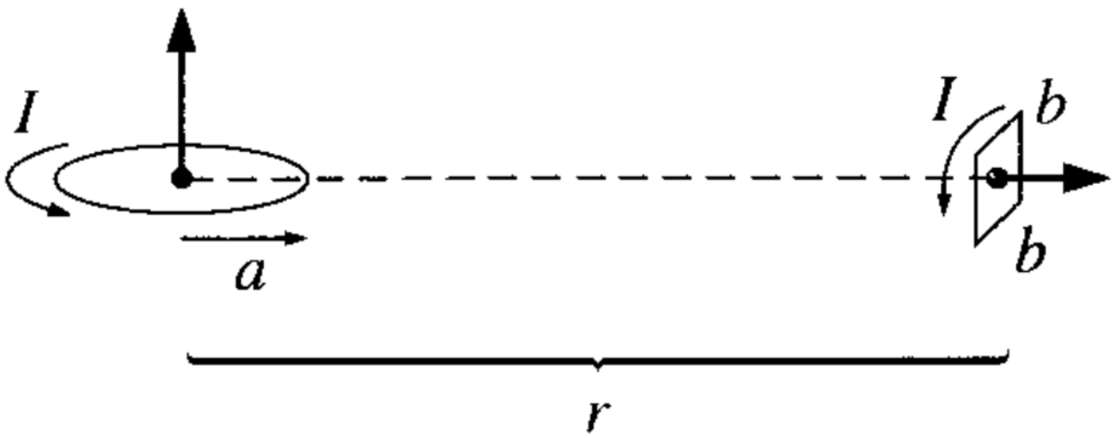
Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 26.06.2019

Übungsblatt 9 Besprechung am 03.07.2019

Aufgabe 1 – Drehmoment auf magnetischen Dipol 40 Punkte



Der Abstand zwischen den Zentren einer kreisförmigen Leiterschleife mit Radius a und einer quadratischen Leiterschleife der Seitenlänge b beträgt $r \gg a, b$. Durch beide Schleifen laufe jeweils der Strom I. Berechnen Sie das Drehmoment $\vec{N}_{Quadrat}$, welches ausgehend von der kreisförmigen Schleife auf die quadratischen Schleife wirkt. Gehen Sie dazu wie folgt vor [falls notwendig kann Gleichung (1) auch ohne Herleitung verwendet werden]:

(a) Das magnetische Dipolmoment einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ ist definiert als

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')\,.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{m}$ für eine ebene Stromschleife **beliebiger** Form gegeben ist als:

$$\vec{m} = IA\vec{n}, \tag{1}$$

wobei A die Fläche ist, welche von der Stromschleife umspannt wird und $\vec{n}$ der Normalenvektor auf dieser Fläche.
Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für eine Stromschleife $\vec{m} = \frac{I}{2} \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l}$ *gilt.*

(b) Zeigen Sie, dass

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}\,(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}$$

mit $\hat{r} \equiv \vec{r}/r$ das magnetische Feld eines Dipols mit magnetischem Dipolmoment $\vec{m}$ beschreibt.
Hinweis: Betrachten Sie den ersten Term der Multipolentwicklung des Vektorpotenzials $\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$.

(c) Ein Dipolmoment $\vec{m}$, das sich in einem externen magnetischen Feld $\vec{B}$ befindet, spürt das Drehmoment $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$. Berechnen Sie $\vec{N}_{Quadrat}$ für den oben beschriebenen Fall.
Hinweis: Beachten Sie, dass die beiden Schleifen weit voneinander entfernt sind.

(d) Finden Sie die Gleichgewichtsorientierung der quadratische Schleife im Fall, dass diese frei rotieren kann.

(e) Zeigen Sie, dass $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ auch für beliebige stationäre Ströme gilt.
Hinweis: Siehe Übungsblatt 8 - Aufgabe 1.

Aufgabe 2 – Eichtransformationen **20 Punkte**

Wir betrachten die Potenziale

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{\omega}{c} \sum_{2}^{i=1} \Big[(\vec{n}_i \cdot \vec{x})\ f_i'(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \Big], \qquad \vec{A}(\vec{x},t) = \vec{k} \sum_{2}^{i=1} \Big[(\vec{n}_i \cdot \vec{x})\ f_i'(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \Big]$$

mit den konstanten, paarweise orthogonalen Vektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ und $\vec{k}$. ω sei ebenfalls konstant und es gelte $|\vec{k}|^2 = \omega^2/c^2$. $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ seien normiert. Die Funktionen $f_i'(\cdots)$ sind die Ableitungen der Funktionen $f_i(\cdots)$ nach ihrem Argument.

(a) Wie ändert sich Φ und $\vec{A}$ unter der Eichtransformation

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\partial_t \Psi, \qquad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Psi$$

mit der Eichfunktion

$$\Psi(\vec{x},t) = -\sum_{2}^{i=1} \Big[(\vec{n}_i \cdot \vec{x})\ f_i'(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \Big]$$

(b) Überprüfen Sie, ob die Potenziale (Φ, $\vec{A}$) bzw. (Φ', $\vec{A}'$) Coulomb-Eichung erfüllen.

(c) Überprüfen Sie, ob die Potenziale (Φ, $\vec{A}$) bzw. (Φ', $\vec{A}'$) Lorenz-Eichung erfüllen.

(d) Berechnen Sie die zu (Φ', $\vec{A}'$) gehörenden Eichfelder.