Theoretische Physik 2 - Elektrodynamik **SS 2019**

Prof. Dr. Christiane Koch
Lehrstuhl für Theoretische Physik III

Abgabe am 03.07.2019
Übungsblatt 10 Besprechung am 10.07.2019

Aufgabe 1 – Lorentzinvarianz 16 Punkte

(a) Zeigen Sie explizit, dass das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B}$ lorentzinvariant ist. Erklären Sie kurz, was dies physikalisch bedeutet.
Hinweis: Falls zwei Inertialsysteme $\mathcal{S}$ und $\bar{\mathcal{S}}$ sich mit Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ (als Geschwindigkeit von $\bar{\mathcal{S}}$ relativ zu $\mathcal{S}$) zueinander bewegen, gilt

$$\bar{E}_x = E_x, \qquad \bar{E}_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right), \qquad \bar{E}_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right),$$
$$\bar{B}_x = B_x, \qquad \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \qquad \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right),$$

wobei $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

(b) Zeigen Sie explizit, dass die Größe $E^2 - c^2B^2$ lorentzinvariant ist. Erklären Sie kurz, was dies physikalisch bedeutet.

(c) Es sei $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{0}$ aber $\vec{E}(\vec{r}) \neq \vec{0}$ an einem Punkt $\vec{r}$ in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$. Existiert ein Inertialsystem, in dem $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$? Falls ja, geben Sie ein solches Inertialsystem an. Falls nein, begründen Sie, warum dies unmöglich ist.

Aufgabe 2 – Poynting-Vektor 28 Punkte

Eine sehr lange stromdurchflossene Zylinderspule mit Radius a und n Windungen pro Einheitslänge führe einen Strom I_s. Ein zur Spule koaxialer Drahtring mit Radius $b \gg a$ besitzt den Widerstand R. Verringert man nun langsam die Stromstärke in der Zylinderspule, wird im Ring der Strom I_r induziert.

(a) Skizzieren Sie die Anordnung.

(b) Berechnen Sie I_r in Abhängigkeit von $\frac{\mathrm{d}I_s}{\mathrm{d}t}$.

(c) Die Leistung ($I_r^2 R$), die während des Ausschaltens auf den Ring übertragen wird, kommt ausschließlich von der Spule. Verifizieren Sie dies, indem Sie den Poynting-Vektor direkt außerhalb des Spule berechnen. Integrieren Sie anschließend über die gesamte Oberfläche der Zylinderspule um die Leistung der Spule zu berechnen und vergleichen Sie diese mit der Leistung die auf den Ring übertragen wird.
Hinweis zum Poynting-Vektor: Das elektrische Feld ergibt sich durch die Änderung des (magnetischen) Flusses und das magnetische Feld wird durch den Strom durch die Spulenwindungen verursacht.

Aufgabe 3 – Zeitabhängige Maxwellgleichungen **16 Punkte**

Sei $\vec{j}(\vec{r})$ zeitunabhängig, $\rho(\vec{r}, t)$ jedoch nicht. (Solche Bedingungen herrschen z.B. beim laden eines Kondensators vor.)

(a) Zeigen Sie, dass die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ eine lineare Funktion der Zeit ist, also

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) + \dot{\rho}(\vec{r}, 0)t,$$

wobei $\dot{\rho}(\vec{r}, 0)$ die zeitliche Ableitung von ρ zur Zeit $t = 0$ ist.

(b) Auch wenn dies *keine* elektrostatische bzw. magnetostatische Anordnung darstellt, gilt (überraschenderweise) das Coulombsche und das Biot-Savart Gesetz. Bestätigen Sie dies, indem Sie zeigen, dass beide die Maxwell-Gleichungen (für den vorliegenden Fall) erfüllen.

Zusatzaufgabe (zum Punkte sammeln) **15 Bonuspunkte**

Wir betrachten zwei parallel zueinander angeordnete kreisförmige Scheiben, welche einen Plattenkondensator bilden (Radius r_0, Abstand d, $d \ll r_0$, Randeffekte werden vernachlässigt). In einem Versuch werden diese langsam über einen Widerstand R entladen, wobei die Platten die Anfangsladungen Q_0 und $-Q_0$ tragen sollen. Bestimmen Sie die Ladungen $\pm Q(t)$ auf den Platten und die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ im Bereich zwischen den Platten.

Hinweis: Bei der Entladung gilt:

$$V_C(t) + V_R(t) = 0,$$

wobei V_C die Spannung am Plattenkondensator und $V_R(t) = RI(t)$ die Spannung, die am Widerstand abfällt. Wie hängt der Strom nochmal von $Q(t)$ ab?