Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen

(ohne Beweis)

- Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\cos\theta)\; e^{im\varphi}$$

  Dabei sind $P_l^m(\cos\theta)$ die zugeordneten Legendre-Polynome. Es gilt:

$$Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y^*_{l,m}(\theta,\varphi)$$

- zugeordnete Legendre-Polynome:

$$P_l^m(z) = (-1)^m \left(1-z^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z)$$

  Dabei sind $P_l(z)$ die Legendre-Polynome. Die $P_l^m(z)$ sind Lösungen der verallgemeinerten Legendre-Gleichung:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{df}{dz}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] f(z) = 0$$

- Legendre-Polynome:

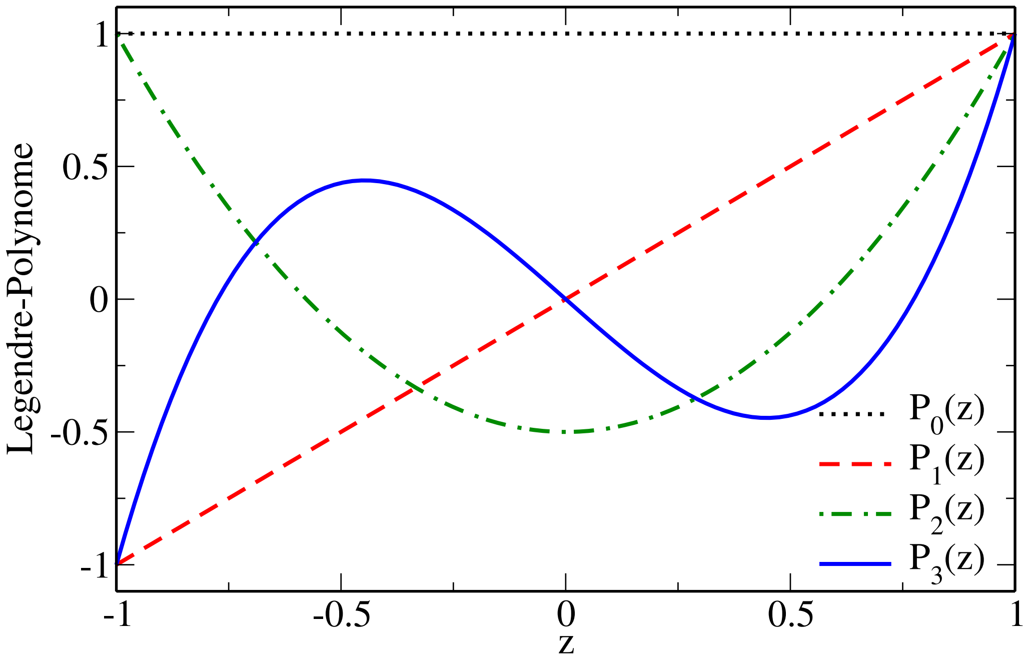
$$P_l(z) = \frac{1}{2^l\, l!}\,\frac{d^l}{dz^l}\left(z^2-1\right)^l$$

  Die $P_l(z)$ sind Lösungen der gewöhnlichen Legendre-Gleichung:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{df}{dz}\right] + l(l+1) f(z) = 0$$

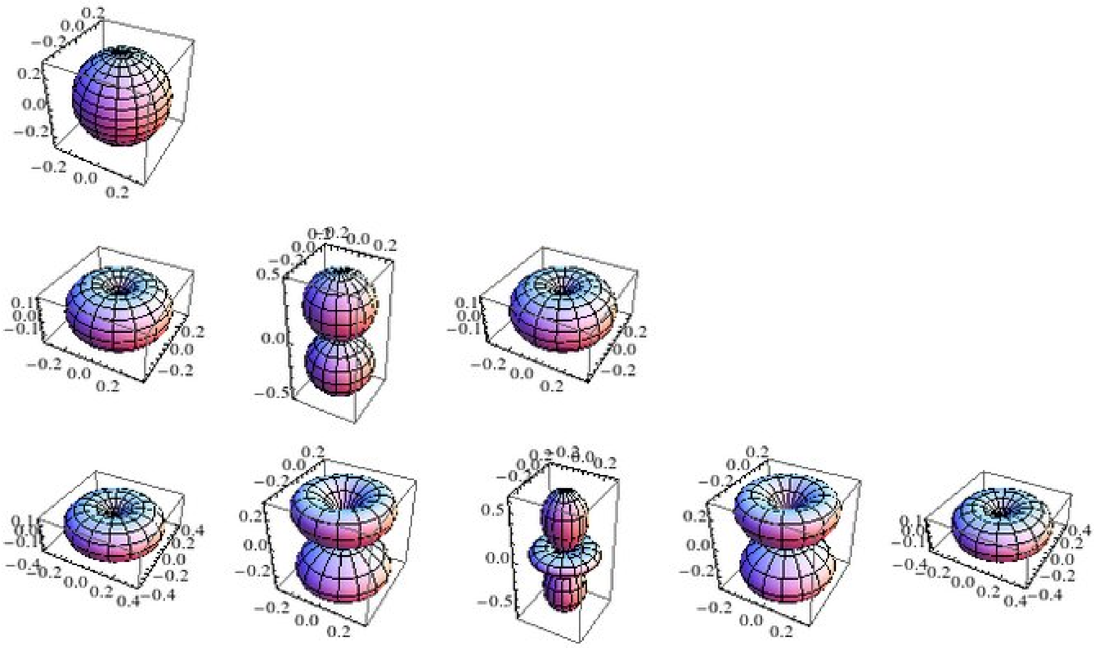
  Sie bilden einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen in $[-1,1]$, sind aber nicht auf Eins normiert.

$$P_0(z) = 1\,, \quad P_1(z) = z\,, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}\left(3z^2-1\right)\,, \ldots$$



- Beispiele für Kugelflächenfunktionen:

$$\begin{aligned}
Y_{0,0}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{4\pi}\,, \quad Y_{1,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \quad Y_{1,1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}\,, \quad Y_{1,-1}(\theta,\varphi) = ? \\
Y_{2,2}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}\,, \quad Y_{2,1}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi} \\
Y_{2,0}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)\,, \quad Y_{2,-1}(\theta,\varphi) = ?\,, \quad Y_{2,-2}(\theta,\varphi) = ?
\end{aligned}$$



Visualisierung in 3D z.B. mit python, siehe
https://www.python-forum.de/viewtopic.php?t=34322